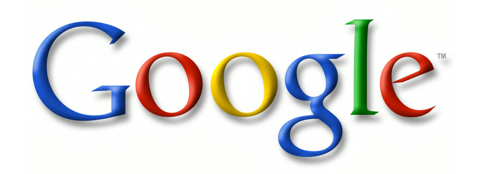



Stanford University Libraries

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

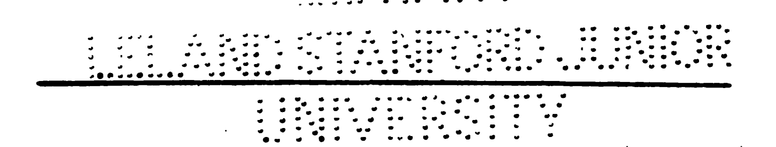
In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.



Zwei und funfzigster Band.

In vier Heften.

Mit drei lithographirten Tafeln.

Berlin, 1856.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Inhaltsverzeichnifs
des zwei und funfzigsten Bandes, nach den Gegenständen.

Reine Mathematik.

1. Analysis.

2. Geometrie.

1.

Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées.

Premier mémoire.

(Par M. *Charles Hermite*, à Paris.)

Une proposition élémentaire et fondamentale dans la théorie arithmétique des formes, consiste en ce que, pour un degré donné, et pour un nombre donné d'indéterminées, toutes les formes à coefficients entiers qui possèdent les mêmes *invariants* sont réductibles à un nombre fini de classes distinctes. Ce théorème a été démontré par *Lagrange* et *Gauss* pour les formes quadratiques à *deux* et à *trois* indéterminées; je l'ai étendu ensuite aux formes quadratiques *générales*, et à toutes celles qui sont décomposables en facteurs linéaires; ainsi il parait bien vrai dans toute sa généralité. Mais pour arriver à l'établir de cette sorte, il faudrait résoudre dans toute leur étendue, les problèmes suivants, aussi beaux que difficiles.

Le *premier* qui appartient à *l'algèbre*, consiste à obtenir la notion complète de ces fonctions rationnelles entières des coefficients, nommées *Invariants* par Mr. *Sylvester*, dans le sens primitivement attribué par Mr. *Gauss* au mot de *Déterminant*.

Le *second* qui est du ressort de *l'arithmétique*, consiste à découvrir par quelles substitutions à coefficients entiers on peut transformer une forme donnée, en une autre dont les coefficients aient des limites, fonctions seulements des *invariants*. Enfin il faut une méthode propre à donner le système complet des formes réduites, représentant la totalité des classes distinctes pour des valeurs assignées a priori aux invariants.

En me bornant à la considération des formes à deux indéterminées, j'ai présenté un premier essai sur ces questions dans mon Mémoire sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres. Le principe dont j'ai fait usage, fait résulter de la même analyse, la notion des invariants et la théorie arithmétique de la réduction. Mais dès le cinquième degré, l'application de ma méthode devient si compliquée, que les résultats généraux ne se trouvaient établis qu'à titre de possibilité, et il restait à découvrir une

méthode numériquement applicable. C'est ce qui a été l'objet de mes recherches assidues depuis plusieurs années, et j'espère y être enfin parvenu, mais pour le cas seulement des formes de degrés *impairs*. Une différence profonde se manifeste en effet, dans la nature analytique des formes binaires, suivant que le degré est un nombre *pair* ou *impair*. Ces dernières me semblent plus faciles à traiter; j'ai trouvé qu'elles jouissent (sauf une exception, celle des formes cubiques) de cette propriété arithmétique générale, que pour un système donné de valeurs des invariants, les formes des diverses classes sont transformables les unes dans les autres par des substitutions linéaires au determinant *un*, mais à coefficients fractionnaires; c'est à dire, en adoptant la notion proposée par Mr. *Eisenstein*, que les diverses classes qui ont les memes invariants, ne forment qu'un genre. Les formes de degrés *pairs*, m'ont présenté de plus grandes difficultés, que dès longtemps je ne puis espérer de vaincre. Mais j'ai remarqué que le cas des formes *biquadratiques* se distinguait d'une manière toute particulière, comme le cas des formes *cubiques*, par rapport aux autres formes de degrés impairs. Aussi me suis-je proposé d'en faire une étude spéciale, dans ce mémoire, en développant à leur égard les principes fondés sur l'introduction de variables *continues*, que j'ai précédemment exposé (Tome 41 de ce journal). J'offrirai ensuite avec plus d'étendue et plus de développement, la nouvelle théorie dont j'ai donné une idée sommaire dans le Journal de Math. de *Cambridge* et *Dublin* (Sur la théorie des fonctions homogènes a deux indéterminées, Cambridge an Dublin Mathématical Journal, 1854), et qui m'a conduit aux résultats que je viens d'annoncer sur les formes de degrés impairs.

Première partie.

Théorie algébrique des formes biquadratiques.

I.

Sur les invariants et covariants des formes biquadratiques.

Je ferai usage dans ces recherches, de la notation qu'employe Mr. *Cayley* pour représenter d'une manière abrégée les formes à deux indéterminées. Elle consiste à poser:

$$ax^m + mbx^{m-1}y + \frac{m.m-1}{1.2}cx^{m-2}y^2 + \dots + \frac{m.m-1}{1.2}c'x^2y^{m-2} + mb'xy^{m-1} + a'y^m$$
$$= (a, b, c, \dots c', b', a')\widehat{\ }(x, y)^m,$$

et son principal avantage est d'indiquer commodément les opérations relatives

aux substitutions linéaires. Par exemple, si la transformée.

$$AX^m + mBX^{m-1}Y + \frac{m.m-1}{1.2}CX^{m-2}Y^2 + \dots + \frac{m.m-1}{1.2}C'X^2Y^{m-2} + mB'XY^{m-1} + A'Y^m$$

a été obtenue en faisant:

$$x = \alpha X + \beta Y, \quad y = \gamma X + \delta Y,$$

on écrira:

$$(a, b, c, \dots b', c', a' \widehat{\wr} \alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y)^m = (A, B, C, \dots C', B', A' \widehat{\wr} X, Y)^m.$$

Cela posé, soit $f = (a, b, c, b', a' \widehat{\wr} x, y)^4$ l'expression générale d'une forme biquadratique, les deux fonctions

$$i = aa' - 4bb' + 3c^2, \quad j = aca' + 2bcb' - ab'^2 - a'b^2 - c^3$$

dont la découverte appartient à Mr. *Cayley*, sont les *invariants* fondamentaux de f. Elles jouissent de cette propriété, qu'en supposant:

$$(a, b, c, a', b', c' \widehat{\wr} \alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)^4 = (A, B, C, B', A' \widehat{\wr} x, y)^4,$$

les fonctions semblables

$$I = AA' - 4BB' + 3C^2, \quad J = ACA' + 2BCB' - AB'^2 - A'B^2 - C^3,$$

vérifieront les egalités

$$I = i(\alpha\delta - \beta\gamma)^4, \quad J = j(\alpha\delta - \beta\gamma)^6.$$

De plus, elles sont bien des invariants fondamentaux; car Mr. *Sylvester* a démontré que toute fonction rationnelle et entière de u, b, c, b', a', qui se reproduit, multipliée par une puissance du déterminant $\alpha\delta - \beta\gamma$, lorsqu'on y remplace a, b, c, b', a', par A, B, C, B', A', est nécessairement une fonction entière de i et j. Je pense pouvoir renvoyer pour les démonstrations de ces proposition importantes aux travaux des savants géomètres que je viens de citer, et arriver immed tement à la notion des *covariants* de la forme *biquadratique.*

Et d'abord je rappellerai qu'on nomme *covariant* d'une forme de degré quelconque: $f = (a, b, c, \dots c', b', a' \widehat{\wr} x, y)^m$, toute autre forme $\varphi(a, b, c, \dots, x, y)$ dont les coefficients sont fonctions rationnelles et entieres de a, b, c, etc., et qui jouit de la propriété qu'exprime l'équation

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)^K . \varphi(a, b, c, \dots; \alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) = \varphi(A, B, C, \dots; x, y);$$

les quantités A, B, etc étant toujours celles qui donnent:

$$(a, b, c, \dots c', b', a' \widehat{\wr} \alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)^m = (A, B, C, \dots \widehat{\wr} x, y)^m.$$

Telle est par exemple, relativement à toute forme f, la forme

$$\left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)^2-\frac{d^2f}{dx^2}\cdot\frac{d^2f}{dy^2};$$

comme l'a démontré sous un point de vue plus général Mr. *Hesse*. Dans la théorie spéciale des formes biquadratiques, le covariant ainsi obtenu joue un rôle important; nous le désignerons par g, en posant:

$$g=\tfrac{1}{16}\left(\left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)^2-\frac{d^2f}{dx^2}\cdot\frac{d^2f}{dy^2}\right)$$
$$=(b^2-ac,\,bc-ab',\,3c^2-2bb'-aa',\,b'c-a'b,\,b'^2-a'c')\widehat{\ }(x,y)^4.$$

De f et g on tire la notion d'un nouveau covariant du 6e degré, que je définirai ainsi:

$$h=\tfrac{1}{8}\begin{vmatrix}\dfrac{df}{dx}, & \dfrac{df}{dy}\\[2mm] \dfrac{dg}{dx}, & \dfrac{dg}{dy}\end{vmatrix}.$$

En faisant:

$$h=(p,q,r,s,r',q',p')\widehat{\ }(x,y)^6,$$

on aura ces valeurs:

$$p=\quad a^2b'-3abc+2b^3,\qquad 6q=+a^2a'+2abb'-9ac^2+6b^2c,$$
$$p'=-a'^2b+3a'b'c-2b'^3,\qquad 6q'=-a'^2a-2a'b'b+9a'c^2-6b'^2c,$$
$$3r=+aba'-3acb'+2b^2b',$$
$$3r'=-a'b'a+3a'cb-2b'^2b,\qquad 2s=a'b^2-ab'^2.$$

Il existe entre f, g, h, et les invariants i, j, une relation remarquable et importante, savoir:

$$(A.)\qquad 4g^3-if^2g-jf^3=h^2.$$

Mr. *Cayley* qui m'a communiqué cette relation que j'avais aussi obtenue de mon côté, en a tiré une méthode ingénieuse et très originale pour la résolution de l'équation du 4me degré. Comme cette résolution est un point essentiel de la théorie algébrique des formes biquadratiques, je vais la présenter sous le point de vue qui m'est propre, et y rattacher la démonstration de l'équation ($A.$).

II.

Résolution de l'équation du 4e degré.

Soit, en décomposant en les facteurs linéaires la forme proposée:

$$(a,b,c,b',a')\widehat{\ }(x,y)^4=a(x-\alpha y)(x-\beta y)(x-\gamma y)(x-\delta y).$$

La réduite du 3e degré s'obtient comme on sait, en considérant la fonction résolvante

$$t = a(\alpha+\beta-\gamma-\delta)$$

dont il faut calculer le carré. Or on peut mettre t^2 sous cette forme:

$$\begin{aligned}3t^2 = a^2\{(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\alpha-\delta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\beta-\delta)^2+(\gamma-\delta)^2\} \\ +4a^2\{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)+(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)\},\end{aligned}$$

d'où, en posant

$$\theta = \tfrac{1}{12}a\{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)+(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)\},$$

et évaluant en fonction des coefficients, la somme des carrés des différences des racines:

$$t^2 = 16\{b^2-ac+a\theta\}.$$

Cette quantité θ que nous avons introduite, dépend, comme on le sait d'avance, d'une équation du 3e degré, qui aurait pour racines:

$$(B.)\quad \begin{cases}\theta_1 = \tfrac{1}{12}a\{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)+(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)\}, \\ \theta_2 = \tfrac{1}{12}a\{(\alpha-\beta)(\delta-\gamma)+(\alpha-\gamma)(\delta-\beta)\}, \\ \theta_3 = \tfrac{1}{12}a\{(\alpha-\delta)(\gamma-\beta)+(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)\}.\end{cases}$$

Or cette équation s'obtient très facilement par la remarque suivante. Posons:

$$\begin{aligned}(a,b,c,b',a')\widehat{\ }(mx+\mu y, nx+\nu y)^4 = (A,B,C,B',A')\widehat{\ }(x,y)^4 \\ = A(x-ay)(x-by)(x-cy)(x-dy),\end{aligned}$$

on aura ces valeurs pour le coefficient A, et les racines de la transformée, savoir:

$$A = a(m-\alpha n)(m-\beta n)(m-\gamma n)(m-\delta n),$$

$$a = -\frac{\mu-\alpha\nu}{m-\alpha n},\quad b = -\frac{\mu-\beta\nu}{m-\beta n},\quad c = -\frac{\mu-\gamma\nu}{m-\gamma n},\quad d = -\frac{\mu-\delta\nu}{m-\delta n},$$

d'où on conclura:

$$\begin{aligned}A(a-d)(b-c) &= (m\nu-n\mu)^2.a(\alpha-\delta)(\beta-\gamma), \\ A(a-c)(b-d) &= (m\nu-n\mu)^2.a(\beta-\gamma)(\beta-\delta), \\ A(a-b)(c-d) &= (m\nu-n\mu)^2.a(\alpha-\beta)(\gamma-\delta).\end{aligned}$$

Ces relations montrent que les quantités θ se réproduisent dans toutes les transformées, multipliées par le déterminant de la substitution; ainsi les coefficients de l'équation dont elles dépendent, sont des *invariants* de la forme proposée. Ces coefficients sont d'ailleurs des fonctions entières de a, b, c, b', a'; donc d'après la proposition de Mr. *Sylvester*, ils s'expriment à fonction entière

des quantités i et j. L'équation cherchée est ainsi de la forme suivante:

$$\theta^3 + \varrho i\theta + \sigma j = 0;$$

ϱ et σ étant numériques. En effet, le coefficient de θ^2 doit être nul, puisqu'il n'existe pas d'invariants de premier degré, et les deux autres ne peuvent être que proportionnels respectivement à i et j, qui sont les seuls invariants du second et du troisième degré. Pour trouver ϱ et σ, considérons un cas particulier, p. ex. celui de la forme $(1,0,-1,0,0)\widehat{}(x,y)^4$: on a alors: $i=3$, $j=1$; $\theta_1=-1$, $\theta_2=\frac{1}{2}$, $\theta_3=\frac{1}{2}$, et par suite l'identité: $(\theta-\frac{1}{2})^2(\theta+1)=\theta^3+3\varrho\theta+\sigma$, d'où: $\varrho=-\frac{1}{4}$, $\sigma=+\frac{1}{4}$. L'équation en θ est donc généralement

$$4\theta^3 - i\theta + j = 0.$$

Le ***discriminant*** de la forme proposée se ramène immédiatement au discriminant de cette équation en θ, car on tire des relations $(B.)$:

$$\theta_1-\theta_2=\tfrac{1}{4}a(\alpha-\gamma)(\beta-\delta),\qquad \theta_1-\theta_3=\tfrac{1}{4}a(\alpha-\theta)(\beta-\gamma),$$
$$\theta_2-\theta_3=\tfrac{1}{4}a(\alpha-\beta)(\delta-\gamma),$$

donc:

$$(\theta_1-\theta_2)^2(\theta_1-\theta_3)^2(\theta_2-\theta_3)^2=\frac{a^6}{4^6}(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2(\beta-\gamma)^2(\beta-\delta)^2(\gamma-\delta)^2$$
$$=\frac{1}{4^2}(i^3-27j^2).$$

Cette expression si importante, se présente ainsi immédiatement sous la forme remarquable que lui a donnée Mr. *Cayley*. Dans le cas où elle est ***négative,*** deux des racines de la forme biquadratique sont imaginaires, et les deux autres réelles. Mais si elle est ***positive,*** elles peuvent être toutes réelles, ou toutes imaginaires.

En général, le produit des carrés des différences des racines d'une équation du degré quelconque, est positif ou négatif suivant que le nombre des racines imaginaires de cette équation est $\equiv 0$ ou $\equiv 2$ Mod. 4. La condition nécessaire et suffisante pour que le premier cas ait lieu, consiste en ce que les trois valeurs distinctes du carré de la fonction résolvante, c. à d. les trois quantités $b^2-ac+a\theta_1$, $b^2-ac+a\theta_2$, $b^2-ac+a\theta_3$ soient positives. Or leur somme est $3(b^2-ac)$, la somme de leurs produits deux à deux est $3(b^2-ac)^2-\frac{1}{4}ia^2$, et nous prouverons plus loin que leur produit est un carré; donc pour qu'elles soient positives, il suffit d'écrire:

$$b^2-ac>0,\quad 12(b^2-ac)^2-ia^2>0.$$

L'on obtient ainsi sous la forme la plus simple, et indépendamment du théorème de Mr. *Sturm,* les conditions de réalité des racines de l'équation générale du 4e degré.

III.

Relation entre les formes, f, g, h; et conséquences de cette relation dans la théorie des fonctions elliptiques.

L'equation remarquable qui existe entre la forme proposée f et ses deux covariants g et h, savoir:

$$(A.)\quad 4g^3 - if^2g - jf^3 = h^2,$$

peut être obtenue par plusieurs méthodes. Celle que nous employons la rattachera à ce fait bien connu, et qui nous reste à etablir que le produit des trois valeurs distinctes du carré de la fonction résolvante, qui aura l'expression

$$4(b^2 - ac + a\theta_1)(b^2 - ac + a\theta_2)(b^2 - ac + a\theta_3) = 4(b^2 - ac)^3 - ia^2(b^2 - ac) - ja,$$

est un *carré parfait.*

Partons pour celà de l'identité suivante:

$$(a, b, c, b', a')\widehat{\ }(x - by, ay)^4$$
$$= (a, 0, -a(b^2 - ac), a(a^2b' - 3abc + 2b^3), ia^3 - 3a(b^2 - ac)^2)\widehat{\ }(x, y)^4,$$

où le second membre est une transformée par une substitution au déterminant a, de la forme proposée. Il en résulte pour l'invariant J de cette transformée, la valeur: $J = ja^6$. Or en calculant directement J, on trouve:

$$J = a^3\{4(b^2 - ac)^3 - ia^2(b^2 - ac) - (a^2b' - 3abc + 2b^3)^2\},$$

et en égalant cette expression à ja^6, il vient:

$$4(b^2 - ac)^3 - ia^2(b^2 - ac) - ja^3 = (a^2b' - 3abc + 2b^3)^2;$$

ce qui démontre la proposition annoncée.

L'équation $(A.)$ s'en déduit de la manière suivante. Posons

$$(a, b, c, b', a')\widehat{\ }(mx + \mu y, nx + \nu y)^4 = (A, B, C, B', A')\widehat{\ }(x, y)^4,$$

m et n étant des quantités arbitraires, et μ et ν étant telles que le déterminant de la substitution est $m\nu - n\mu = 1$. Relativement à la transformée ainsi obtenue, nous aurons:

$$4(B^2 - AC)^3 - iA^2(B^2 - AC) - jA^3 = (A^2B' - 3ABC + 2B^3)^2;$$

car les invariants i et j seront restés les mêmes. J'ajoute que les quantités A, $B^2 - AC$, $A^2B' - 3ABC + 2B^3$, deviendront respectivement: f, g, h, en y mettant m et n au lieu de x et y, de sorte que nous tomberons précisément sur la relation à démontrer.

Soit en effet $\varphi(a, b, c, b', a'; x, y)$ l'une quelconque des formes f, g, h; nous aurons, comme il a été dit (§. I.), la relation caractéristique pour les

covariants:

$$(m\nu - n\mu)^{\varkappa}\varphi(a, b, c, b', a'; mx+\mu y, nx+\nu y) = \varphi(A, B, C, B', A'; x, y),$$

ou seulement:

$$\varphi(a, b, c, b', a', mx+\mu y, nx+\nu y) = \varphi(A, B, C, B', A'; x, y),$$

puisque le déterminant de la substitution est *l'unité.* Faisons dans cette identité $x=1$, $y=0$, le second membre se réduira au coefficient de la puissance la plus élevée de x, c. à d. en supposant successivement $\varphi = f, g, h$, aux quantités A, B^2-AC, $A^2B'-3ABC+2B^3$. Or dans les mêmes circonstances le premier membre représente les formes f, g, h, l'orsqu'on y met les quantités arbitraires m et n, au lieu des indéterminées x et y; ainsi que nous voulions le démontrer.

La relation

$$4g^3 - if^2g - jf^3 = h^2$$

trouve une application immédiate à la théorie des *fonctions elliptiques.* Mettons la sous la forme:

$$\sqrt{\left[4\left(\frac{g}{f}\right)^3 - i\left(\frac{g}{f}\right) - j\right]} = \frac{h}{f^2}\sqrt{f},$$

en divisant par f^3 et extrayant la racine carrée des deux membres. Considérons ensuite, l'indéterminée x comme une variable indépendante, et faisons $y=1$; il suit du principe algébrique de *Jacobi* pour la transformation des intégrales elliptiques que la substitution rationnelle

$$z = \frac{g}{f} = \frac{(b^2-ac, bc-ab', 3c^2-2bb'-aa', b'c-a'b, b'^2-a'c)\widehat{\ }(x, 1)^4}{(a, b, c, b', a')\widehat{\ }(x, 1)^4}$$

donnera:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(4z^3-iz-j)}} = M\int \frac{dx}{\sqrt{((a, b, c, b', a')\widehat{\ }(x, 1)^4)}};$$

M étant une constante. Mettons encore $z \cdot \frac{j}{i}$ au lieu de z, l'intégrale $\int \frac{dz}{\sqrt{(4z^3-iz-j)}}$ sera ramenée à la suivante: $\int \frac{dz}{\sqrt{(\varrho z^3-z-1)}}$; ϱ désignant la constante $\frac{4j^2}{i^3}$. Ainsi nous avons la réduction de l'intégrale elliptique la plus générale à une autre plus simple où n'entre qu'un seul *paramètre.* Et l'on voit immédiatement que toutes les intégrales liées à la proposée $\int \frac{dx}{\sqrt{((a, b, c, b', a')\widehat{\ }(x, 1)^4)}}$, par une substitution linéaire quelconque: $x = \frac{mX+\mu}{nX+\nu}$, conduiront absolument

à la même intégrale réduite, le rapport $\frac{j^2}{i^3}$ conservant la même valeur, dans toutes ces transformées.

Seconde partie.

Théorie arithmétique des formes biquadratiques.

I.

De la forme quadratique sur laquelle repose la théorie de la réduction.

Je considérerai spécialement dans ce qui va suivre les formes quadratiques *réelles*, et je me propose d'exposer à leur égard, l'application de la méthode générale que j'ai donnée dans mon mémoire sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres. Cette application aurait dû trouver immédiatement place à la suite de ce mémoire, mais alors je n'avais pu encore réussir à lever plusieurs difficultés dont la solution sera maintenant très facile, en se fondant sur les résultats que j'ai donnés ici dans la première partie. Dans une autre occasion j'essayerai de traiter aussi les formes *biquadratiques,* qui ont des racines *imaginaires,* et qui me semblent devoir donner lieu à une étude intéressante.

Soit comme précédemment:

$$f = (a, b, c, b', a'\widehat{)}(x, y)^4 = a(x-\alpha y)(x-\beta y)(x-\gamma y)(x-\delta y);$$

les racines α, β, γ, δ, étant *réelles*. Le principe arithmétique de la théorie de la réduction, repose sur la considération de la forme quadratique

$$\varphi = t(x-\alpha y)^2 + t'(x-\beta y)^2 + t''(x-\gamma y)^2 + t'''(x-\delta y)^2,$$

où les quantités t, t', t'', t''', sont des variables *réelles* et *positives*. Nommons Δ *l'invariant* de cette forme, et S la substitution à coefficients entiers, propre à la réduire pour un système donné de valeurs des quantités t. En effectuant dans f, cette substitution S, on aura une transformée:

$$F = (A, B, C, B', A'\widehat{)}(x, y)^4,$$

dont les coefficients vérifieront les conditions suivantes:

$$(a.) \quad AA' < \frac{1}{144}\cdot\frac{a^2\Delta^2}{tt't''t'''}, \quad BB' < \frac{1}{144}\cdot\frac{a^2\Delta^2}{tt't''t'''}, \quad C^2 < \frac{1}{144}\cdot\frac{a^2\Delta^2}{tt't''t'''},$$

qu'on doit considérer en valeur absolue. Ces conditions que j'ai données dans le mémoire précité (§. V. 4°.), conduisent à considérer attentivement

la fonction

$$T = \frac{a^2 \Delta^2}{t\,t'\,t''\,t'''},$$

et à rechercher les valeurs réelles et positives des variables t, pour lesquelles elle prend la plus petite valeur possible. J'ai établi que ce minimum avait une valeur constante dans toutes les transformées équivalentes à la forme proposée, ce qui m'a permis de la prendre comme définition de l'invariant de la forme biquadratique. J'ai démontré aussi que φ devenait un covariant de f, lorsqu'on y remplacerait t, t', etc. par les valeurs speciales qui fournissent le minimum de T. Ce sont ces diverses conséquences de ma méthode générale, que je vais développer seulement pour le cas particulier des formes biquadratiques. Je les ferai précéder de ces deux remarques.

Premièrement, aux inégalités

$$AA' < \tfrac{1}{144} T, \quad BB' < \tfrac{1}{144} T, \quad C^2 < \tfrac{1}{144} T$$

on peut joindre les suivantes:

$$AB'^2 < \frac{1}{12^3} T^{\frac{3}{2}}, \quad A'B^2 < \frac{1}{12^3} T^{\frac{3}{2}},$$

qui se tirent de la même analyse, afin, par exemple, d'obtenir une limite pour le coefficient B, si l'on suppose $B' = 0$; l'inégalité $BB' < \frac{1}{144} T$ ne pouvant plus alors être employée. On généralisera très facilement cette remarque, qui est essentielle pour prouver qu'il n'existe qu'un nombre fini de formes F, dont les coefficients vérifient un pareil système d'inégalités. Dans le cas présent, il n'y a à faire d'autre restriction, que de supposer qu'on n'ait jamais simultanément $A = 0$, $B = 0$, ou: $A' = 0$, $B' = 0$, c. à d. que la forme quadratique n'a pas de racines *doubles;* comme on le voit aisément. Il est d'ailleurs inutile d'exclure le cas des racines commensurables, qui pourrait donner A ou $A' = 0$.

La *seconde* observation qui me reste à faire est relative à cette opération arithmétique de la réduction de la forme quadratique φ, pour tous les systèmes de valeurs des variables t, t', t'', t''', qui joue un rôle essentiel dans ma méthode. Divisons cette forme par le coefficient du premier terme, de sorte qu'elle devienne: $x^2 - 2\xi xy + \eta y^2$, en posant:

$$\xi = \frac{\alpha t + \beta t' + \gamma t'' + \delta t'''}{t + t' + t'' + t'''}, \quad \eta = \frac{\alpha^2 t + \beta^2 t' + \gamma^2 t'' + \delta^2 t'''}{t + t' + t'' + t'''}.$$

Au lieu des quantités t, on pourra faire varier ξ et η; alors, ce qui caracté-

risera, pour une forme donnée, l'opération dont nous nous occupons, est l'étendue des valeurs que pourront recevoir ces nouvelles variables lorsque les quantités passeront par tous les états de grandeur. Or la forme analytique de ξ et η, rappelle immédiatement les expressions connues pour les coordonnées du point d'application de la résultante d'un système de forces parallèles. Considérons donc sur un plan, quatre points A, B, C, D, rapportés à des axes rectangulaires, et ayant pour abscisses α, β, γ, δ et pour ordonnées α^2, β^2, γ^2, δ^2. Le quadrilatère $ABCD$ sera inscriptible dans une *parabole,* comme on le voit aisément, et par suite sera convexe. Si donc on applique aux divers sommets A, B, C, D, des forces parallèles et de même sens, respectivement représentées par t, t', t'', t''', le point d'application de leur résultante, sera situé dans son intérieur, et y pourra occuper une position quelconque, suivant les valeurs des composantes. Les quantités ξ et η, représentent donc les coordonnées d'un tel point; ce qui donne une image très nette des divers états de grandeur par lesquels elles devront passer, pour correspondre à toutes les valeurs possibles que doivent prendre les quantités t, t', t'', t''', dans la forme φ.

II.

Détermination du minimum de la fonction T.

On trouve aisément pour l'invariant de la forme quadratique φ, l'expression

$$\Delta = tt'(\alpha-\beta)^2+tt''(\alpha-\gamma)^2+tt'''(\alpha-\delta)^2+t't''(\beta-\gamma)^2+t't'''(\beta-\delta)^2 + t''t'''(\gamma-\delta)^2.$$

Cela posé, formons les équations $\frac{dT}{dt}=0$, $\frac{dT}{dt'}=0$, $\frac{dT}{dt''}=0$, $\frac{dT}{dt'''}=0$; on verra qu'elles se réduisent aux suivantes:

$$2t\frac{d\Delta}{dt}-\Delta=0,\quad 2t'\frac{d\Delta}{dt'}-\Delta=0,\quad 2t''\frac{d\Delta}{dt''}-\Delta=0,\quad 2t'''\frac{d\Delta}{dt'''}-\Delta=0.$$

Maintenant prenons la somme de deux d'entre elles, et retranchons en la somme des deux autres. Il résultera de là trois combinaisons linéaires distinctes, que voici:

$$tt'(\alpha-\beta)^2=t''t'''(\gamma-\delta)^2,\quad tt''(\alpha-\gamma)^2=t't'''(\beta-\delta)^2,\quad tt'''(\alpha-\delta)^2=t't''(\beta-\gamma)^2.$$

Avant d'en écrire les diverses solutions, faisons cette substitution:

$$t = \frac{\tau}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}, \quad t' = \frac{-\tau'}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}, \quad t'' = \frac{\tau''}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)},$$
$$t''' = \frac{-\tau'''}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)},$$

il viendra plus simplement:

$$\tau\tau' = \tau''\tau''', \quad \tau\tau'' = \tau'\tau''', \quad \tau\tau''' = \tau'\tau''.$$

Cela posé, comme nous avons seulement à déterminer les rapports des inconnues, prenons par exemple $\tau = 1$. On trouvera ces quatre systèmes de valeurs:

$$1^\circ. \begin{cases} \tau = +1, \\ \tau' = +1, \\ \tau'' = +1, \\ \tau''' = +1, \end{cases} \quad 2^\circ. \begin{cases} \tau = +1, \\ \tau' = -1, \\ \tau'' = +1, \\ \tau''' = -1, \end{cases} \quad 3^\circ. \begin{cases} \tau = +1, \\ \tau' = +1, \\ \tau'' = -1, \\ \tau''' = -1, \end{cases} \quad 4^\circ. \begin{cases} \tau = +1, \\ \tau' = -1, \\ \tau'' = -1, \\ \tau''' = +1, \end{cases}$$

Or il est essentiel de rechercher celui qui donne pour t, t', t'', t''' des quantités *positives*, comme l'exige la question. Supposons à cet effet, que α, β, γ, δ représentent les racines de la forme biquadratique, rangées par ordre croissant de grandeur. Il est aisé de voir que le premier système conduit seul à des solutions *positives* et que les trois autres doivent être écartés. Effectivement, si l'on fait pour un instant:

$$\chi(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta),$$

les quantités t, auront alors pour valeurs:

$$t = +\frac{1}{\chi'(\alpha)}, \quad t' = -\frac{1}{\chi'(\beta)}, \quad t'' = +\frac{1}{\chi'(\gamma)}, \quad t''' = -\frac{1}{\chi'(\delta)}.$$

et l'on sait bien qu'on obtient des résultats alternativement positifs et négatifs, en substituant dans la fonction dérivée la série constante des racines. Nous sommes donc conduit à cette expression remarquable de la forme quadratique φ, que nous écrivons en introduisant le facteur $\frac{1}{a}$, savoir:

$$\varphi = \frac{1}{a}\left\{\frac{(x-\alpha y)^2}{\chi'(\alpha)} - \frac{(x-\beta y)^2}{\chi'(\beta)} + \frac{(x-\gamma y)^2}{\chi'(\gamma)} - \frac{(x-\delta y)^2}{\chi'(\delta)}\right\},$$

et il nous reste à former son invariant $\varDelta$, afin d'obtenir la valeur minimum de la fonction T.

Les quantités ξ et η, dont il a été question précédemment, représentent pour cette forme φ, les coordonnées du point d'intersection des diagonales du quadrilatère $ABCD$.

A cet effet, nous observerons qu'on a par une formule connue:

$$\frac{(x-\alpha y)^2}{\chi'(\alpha)}+\frac{(x-\beta y)^2}{\chi'(\beta)}+\frac{(x-\gamma y)^2}{\chi'(\gamma)}+\frac{(x-\delta y)^2}{\chi'(\delta)} = 0,$$

d'où résulte cette autre expression de φ:

$$\varphi = \frac{2}{a}\left\{\frac{(x-\alpha y)^2}{\chi'(\alpha)}+\frac{(x-\gamma y)^2}{\chi'(\gamma)}\right\}.$$

Or on en tire sans difficulté:

$$\varDelta = \frac{4}{a^2}\frac{(\alpha-\gamma)^2}{\chi'(\alpha)\chi'(\gamma)}.$$

On a d'ailleurs:

$$t\,t'\,t''\,t''' = \frac{1}{a^4\chi'(\alpha)\chi'(\beta)\chi'(\gamma)\chi'(\delta)},$$

donc:

$$T = \frac{a^2\varDelta^2}{t\,t'\,t''\,t'''} = 16a^2(\alpha-\gamma)^4\cdot\frac{\chi'(\beta)\chi'(\delta)}{\chi'(\alpha)\chi'(\gamma)},$$

et en supprimant les facteurs communs: $T = 16a^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\delta)^2$.

Nous retrouvons ainsi les invariants fondamentaux des formes biquadratiques, comme coefficients de l'équation du troisième degré qui déterminerai T en fonction de a, b, c, b', a'. Au fond c'est l'équation en θ, que nous avons trouvée dans la première partie, en traitant la résolution algébrique de l'équation du 4e degré, qui se présente de nouveau. Nous avons en effet trouvé: $\theta_1-\theta_2 = \frac{1}{4}a(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)$, donc: $T = 16^2(\theta_1-\theta_2)^2$; ce qui peut s'exprimer en fonction entière de la troisième racine θ_3. Les considérations suivantes vont nous conduire aux covariants g et h, de sorte que le système complet des éléments analytiques de la théorie des formes biquadratiques, résultera naturellement des principes sur lesquels nous avons fondé la théorie arithmétique de la réduction.

III.

Expression par les coefficients de f, de la forme quadratique φ qui correspond au minimum de T.

Nous allons d'abord vérifier à posteriori que la forme

$$\varphi = \frac{1}{a}\left\{\frac{(x-\alpha y)^2}{\chi'(\alpha)}-\frac{(x-\beta y)^2}{\chi'(\beta)}+\frac{(x-\gamma y)^2}{\chi'(\gamma)}-\frac{(x-\delta y)^2}{\chi'(\delta)}\right\}$$

qui correspond ainsi au minimum de T est un *covariant* de f; comme nous le savons par la théorie générale. Soit à cet effet:

$$(a, b, c, b', a')\widehat{\ }(mx+\mu y,\ nx+\nu y)^4$$
$$= (A, B, C, B', A')\widehat{\ }(x, y)^4 = A(x-\mathfrak{a}y)(x-\mathfrak{b}y)(x-\mathfrak{c}y)(x-\mathfrak{d}y)$$

et Φ, la même forme que φ, par rapport à la transformée $(A, B, C, B', A')(x, y)^4$. En posant:

$$X(x) = (x-\mathfrak{a})(x-\mathfrak{b})(x-\mathfrak{c})(x-\mathfrak{d})$$

on aura:

$$\Phi = \frac{1}{A}\left\{\frac{(x-\mathfrak{a}y)^4}{X'(\mathfrak{a})} - \frac{(x-\mathfrak{b}y)^4}{X'(\mathfrak{b})} + \frac{(x-\mathfrak{c}y)^4}{X'(\mathfrak{c})} - \frac{(x-\mathfrak{d}y)^4}{X'(\mathfrak{d})}\right\}.$$

Or au moyen des valeurs données (1re partie II.) pour A, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, on trouvera immédiatement

$$\begin{aligned} mx+\mu y-\alpha(nx+\nu y) &= (m-\alpha n)(x-\mathfrak{a}y), \\ mx+\mu y-\beta(nx+\nu y) &= (m-\beta n)(x-\mathfrak{b}y), \\ mx+\mu y-\gamma(nx+\nu y) &= (m-\gamma n)(x-\mathfrak{c}y), \\ mx+\mu y-\delta(nx+\nu y) &= (m-\delta n)(x-\mathfrak{d}y), \end{aligned}$$

et:

$$\begin{aligned} \frac{(m-\alpha n)^4}{a\chi'(\alpha)} &= \frac{1}{AX'(\mathfrak{a})}\cdot\frac{1}{(m\nu-n\mu)^3}, \\ \frac{(m-\beta n)^4}{a\chi'(\beta)} &= \frac{1}{AX'(\mathfrak{b})}\cdot\frac{1}{(m\nu-n\mu)^3}, \\ \frac{(m-\gamma n)^4}{a\chi'(\gamma)} &= \frac{1}{AX'(\mathfrak{c})}\cdot\frac{1}{(m\nu-n\mu)^3}, \\ \frac{(m-\delta n)^4}{a\chi'(\delta)} &= \frac{1}{AX'(\mathfrak{d})}\cdot\frac{1}{(m\nu-n\mu)^3}; \end{aligned}$$

d'où résulte qu'on obtient $\frac{1}{(m\nu-n\mu)^3}\Phi$, en mettant dans φ, $mx+\mu y$, et $nx+\nu y$, au lieu de x et y.

Cela posé, pour évaluer φ au moyen des coefficients de f, nous observerons que la fonction résolvante

$$\alpha-\beta+\gamma-\delta$$

varie ou conserve sa valeur pour les mêmes permutations des racines $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, que la forme φ, de sorte que suivant l'expression de *Lagrange* on a ainsi deux fonctions semblables de ces racines. Or nous avons précédemment obtenu (1re partie II.) le carré de la fonction résolvante en fonction de la quantité θ, d'où il suit que le carré de φ s'exprimera rationnellement par les coefficients de la forme proposée f, et cette même quantité θ. Mais il importe de fixer avec précision celle des trois quantités que nous avons désignées par θ_1, θ_2, θ_3, qui entrera ainsi dans l'expression de φ^2. Et d'abord les trois valeurs $(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2$, $(\alpha+\delta-\gamma-\beta)^2$, $(\alpha+\gamma-\beta-\delta)^2$, s'expriment respective-

ment par θ_1, θ_2, θ_3; c'est donc la racine θ_3 que nous aurons à employer, et qu'il faut essayer de caractériser, de manière à la faire reconnaître sans ambiguité.

Rappelons à cet effet les relations:

$$\theta_1-\theta_2=\tfrac{1}{4}a(\alpha-\gamma)(\beta-\delta),\qquad \theta_1-\theta_3=\tfrac{1}{4}a(\alpha-\delta)(\beta-\gamma),$$
$$\theta_2-\theta_3=\tfrac{1}{4}a(\alpha-\beta)(\delta-\gamma).$$

Comme nous avons supposé les racines $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ rangées par ordre croissant de grandeur, on voit qu'on aura:

$$\theta_1-\theta_2>0,\quad \theta_1-\theta_3>0,\quad \theta_2-\theta_3<0,$$

si le coefficient a est *positif*, et s'il est *négatif:*

$$\theta_1-\theta_2<0,\quad \theta_1-\theta_3<0,\quad \theta_2-\theta_3>0;$$

donc dans les deux cas, θ_3 est la racine moyenne, comprise entre les deux autres θ_1 et θ_2.

Ce point important établi, voici comment on obtiendra φ^2. De la seconde des expressions précédemment données, savoir:

$$\varphi=\frac{2}{a}\left\{\frac{(x-\alpha y)^2}{\chi'(\alpha)}+\frac{(x-\gamma y)^2}{\chi'(\gamma)}\right\},$$

on concluera aisément:

$$\varphi=\frac{2}{a^2(\alpha-\beta)(\delta-\gamma).(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}.(a(\alpha-\beta+\gamma-\delta),\ a(\beta\delta-\alpha\gamma),$$
$$a(\alpha\beta\gamma+\alpha\gamma\delta-\alpha\beta\delta-\beta\gamma\delta))\widehat{\ }(x,y)^2.$$

Le facteur irrationnel $\frac{2}{a^2(\alpha-\beta)(\delta-\gamma).(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}$, est un ***invariant***, comme égal à $\frac{1}{8(\theta_1-\theta_2)(\theta_1-\theta_3)}$; ainsi la forme plus simple

$$\psi=(a(\alpha-\beta+\gamma-\delta),\ a(\beta\delta-\alpha\gamma),\ a(\alpha\beta\gamma+\alpha\gamma\delta-\alpha\beta\delta-\beta\gamma\delta))\widehat{\ }(x,y)^2$$

sera un ***covariant*** de f, aussi bien que φ. Or le carré de son premier terme s'obtient de suite par la formule

$$a^2(\alpha+\gamma-\beta-\delta)^2=16(b^2-ac+a\theta_3).$$

On en conclut le résultat suivant, auquel nous voulions parvenir, savoir:

$$\psi^2=16(g+\theta_3 f),$$

f étant la forme proposée, et g le ***covariant*** dont nous avons donné la définition au commencement de ce mémoire. En effet, on peut dire en général, que deux covariants d'une même forme, qui ont leurs premiers termes égaux,

sont par cela seul, nécessairement identiques. C'est une conséquence immédiate de ce que nous avons établi (1[re] partie III.), en déduisant les fonctions f, g et h, seulement de leurs premiers termes a, b^2-ac, et $a^2b'-3abc+2b^3$. Nous sommes ainsi ramenés par une voie nouvelle à la considération du covariant g, et aussi à la relation importante:

$$4g^3-if^2g-jf^3=4(g+\theta_1 f)(g+\theta_2 f)(g+\theta_3 f)=h^2.$$

Chacun des facteurs $g+\theta_1 f$, $g+\theta_2 f$, $g+\theta_3 f$, se trouve être en effet, le carré d'une forme quadratique analogue à ψ. (Cette propriété a été aussi obtenue par Mr. **Cayley**, qui m'en a donné recemment communication; elle est le point de départ de la méthode de résolution de l'équation générale du 4[e] degré, dont j'ai parlé au commencement de ce mémoire.) Ainsi leur produit est bien un carré parfait. En même temps, nous obtenons la décomposition en trois facteurs du second degré, du covariant h, d'où l'on peut conclure la résolution de l'équation $h=0$.

IV.

Des questions arithmétiques dont les résultats précédents donnent la solution.

Étant proposées deux formes biquadratiques f et f', on pourra reconnaître si elles sont équivalents, ou non, en calculant leurs transformées réduites F et F'. Pour obtenir ces transformées réduites, on formera l'équation en θ, qui sera la même pour f et f'; car on doit d'abord supposer à ces deux formes les mêmes *invariants.* Cela fait, on choisira la racine moyenne de cette équation en θ, et on en déduira les deux formes quadratiques ψ et ψ', en extrayant la racine carrée des fonctions $f+\theta g$, $f'+\theta g'$.

La réduite F s'obtiendra en effectuant dans f, la substitution à coefficient entiers et au déterminant *un*, propre à réduire ψ, et la réduite F', en effectuant dans f', la substitution propre à réduire ψ'. Maintenant il suit de notre théorie la condition nécessaire et suffisante pour que f et f' soient *équivalentes* et que F et F' soient *identiques.*

En second lieu, si l'on propose de calculer le système complet des formes réduites qui ont les mêmes *invariants* i et j, on déduit de la valeur minimum de T, ci-dessus obtenue, savoir: $T=16^2.(\theta_1-\theta_2)^2$, où θ_1 et θ_2 désignent la plus grande et la plus petite racine de l'équation en θ, la règle suivante:

On calculera tous les systèmes de nombres entiers A, B, C, B', A', qui vérifient en valeur absolue les conditions:

$$AA' < (\tfrac{4}{3})^2(\theta_1-\theta_2)^2, \quad BB' < (\tfrac{4}{3})^2(\theta_1-\theta_2)^2, \quad C' < \tfrac{4}{3}(\theta_1-\theta_2),$$
$$AB'^2 < (\tfrac{4}{3})^3(\theta_1-\theta_2)^3, \quad A'B^2 < (\tfrac{4}{3})^3(\theta_1-\theta_2).$$

Ces systèmes, en nombre évidemment fini, donneront autant de formes F, F', F'', etc. On choisira les réduites destinées à représenter définitivement les classes distinctes de mêmes invariants, en calculant les formes quadratiques $\sqrt{(F+\theta_3 G)}$, $\sqrt{(F'+\theta_3 G')}$, etc. et conservant seulement celles des formes F, F', etc. auxquelles correspondront ainsi des formes quadratiques réduites, où le coefficient moyen ne surpasse pas celui de x^2, qui lui même ne doit pas surpasser celui de y^2.

Dans une autre occasion, j'espère pouvoir présenter des applications numériques de cette théorie; je me bornerai maintenant à remarquer cette circonstance que pour les formes quadratiques à facteurs réelles, l'invariant j est essentiellement limité par la valeur donnée de i. Effectivement, comme le discriminant i^3-27j^2 doit être positif, il faut qu'on ait $j^2 < \frac{1}{27}i^3$; on peut donc dire que toutes les formes biquadratiques à racines réelles $(a, b, c, b', a')\widehat{\ }(x, y)^4$, pour lesquelles la fonction $aa'-4bb'+3c^2$ a une valeur donnée, sont réductibles à un nombre fini de classes distinctes.

Paris, Juillet 1854.

2.

Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées.

Second mémoire.

(Par M. *Charles Hermite*, à Paris.)

Dans mon premier mémoire qui a eu pour principal objet l'étude des formes biquadratiques, j'ai eu soin de considérer séparément, la théorie *algébrique* et la théorie *arithmétique* de ces formes. Relativement aux formes *quadratiques*, une pareille distinction serait inutile, en raison du petit nombre de notions algébriques qu'il est nécessaire d'établir comme base des considérations arithmétiques. Mais dès qu'on s'élève aux formes *binaires* de degré quelconque, on voit la théorie algébrique, prendre un développement inattendu et digne du plus grand intérêt. En effet, en présence des éléments analytiques nouveaux, dont elle manifeste l'existence, les notions les plus simples et les plus faciles qui nous sont requises par l'étude des formes quadratiques, viennent alors s'offrir sous un tout autre aspect, et parfois donnent naissance à des notions nouvelles. Je me propose d'en montrer ici un exemple, en traitant de la distribution en ordres des formes *cubiques* et *biquadratiques*.

M. *Eisenstein*, dans son beau mémoire intitulé: Nouveaux théorèmes d'arithmétique transcendante, publié tome 35 de ce journal, a déjà remarqué que la présence des formes adjointes dans la théorie des formes quadratiques *ternaires*, conduisait à faire reposer la distribution en ordres de ces formes, sur un principe nouveau et différent de celui que M. *Gauss* a donné pour les formes *binaires*. Nous allons voir que pour les formes *cubiques* et *biquadratiques*, le principe de M. *Eisenstein*, va lui-même se présenter sous un jour plus étendu, et conduira à trois subdivisions différentes de la totalité des formes qui possèdent les mêmes *invariants fondamentaux*.

C'est là d'ailleurs un résultat qui appartient en propre aux formes dont nous parlons; de sorte que la forme du cinquième degré et celle de degrés plus élevés, donnent lieu pour la distribution en ordres à des considérations

toutes différentes. Plusieurs autres faits se présenteront, comme nous l'avons déjà annoncé dans la suite de ces recherches, pour manifester dans des circonstances variées, cette différence de nature qu'on rapproche naturellement de cette différence analytique si profonde, entre les racines des équations des quatre premiers degrés, qui s'expriment par simples radicaux, et celles de degrés plus élevés qu'il est impossible d'obtenir de cette manière.

Dans l'espérance que de pareilles considérations intéresseraient peut-être, j'ai développé avec détails, l'application aux formes du *cinquième* degré des propositions algébriques générales sur lesquelles reposent la distribution en ordre des formes binaires. Plusieurs des résultats qui se présenteront dans cette application, se retrouveront d'ailleurs et joueront un rôle important dans l'étude spéciale des formes du cinquième degré, à laquelle je consacrerai prochainement un nouveau mémoire.

I.

Principe de la distribution en ordres des formes binaires.

Il est un point de vue sous lequel la notion des ordres de classes quadratiques de même *déterminant* s'étend immédiatement à toutes les formes, quel que soit leur degré et le nombre de leurs indéterminées. Ainsi, en ne considérant que les formes *binaires,* et leur appliquant la méthode suivie par M. *Gauss* dans le §. 226 des „Disquisitiones Arithmeticae", on peut nommer *primitives,* toutes les formes

$$f = (a, b, c, \ldots \widehat{)}(x, y)^m$$

de mêmes *invariants,* dans lesquelles le plus grand commun diviseur de a, b, c, etc. est l'unité. Cela dit, l'ordre *proprement primitif,* sera défini comme réunissant toutes les formes dans lesquelles le plus grand commun diviseur de

$$a, \; mb, \; \frac{m.m-1}{1.2}c, \text{ etc.}$$

sera l'unité, et ensuite on obtiendra autant d'ordres *improprement primitifs* que le plus grand commun diviseur de ces mêmes nombres pourra recevoir de valeurs distinctes.

Maintenant, si l'on passe aux formes

$$F = (A, B, C, \ldots \widehat{)}(x, y)^m,$$

dont les coefficients A, B, C, ... ont un plus grand commun diviseur δ, on

pourra les nommer *dérivées* des formes primitives $f = \frac{1}{\delta} F$. Cela posé, pour chaque valeur de δ, on aura un groupe de formes dérivées, dont la distribution en ordres suivra immédiatement celles des formes primitives qui leur correspondent. Rien de plus facile, on le voit, que cette première extension des principes de Mr. *Gauss* qu'il nous a suffi d'indiquer en peu de mots. Mais dès qu'on considère d'autres formes que les formes *quadratiques* à deux indétérminées, on voit intervenir de nouveaux éléments analytiques qui jouent dans toute la théorie un rôle essentiel; ce sont les formes *adjointes*, et les formes nommées *covariants* par Mr. *Sylvester*. Ces deux genres de formes ne sont pas essentiellement distincts, comme on le sait, dans la théorie des formes *binaires*; ils se ramènent aux seuls covariants dont je crois devoir encore rappeler la propriété caractéristique.

Soit

$$f = (a, b, c, \ldots \widehat{)(} x, y)^m$$

une forme binaire, et supposons qu'on ait identiquement:

$$(a, b, c, \ldots \widehat{)(} \xi x + \xi' y, \eta x + \eta' y)^m = (A, B, C, \ldots \widehat{)(} x, y)^m,$$

on donnera le nom de *covariant* de f, à toute fonction $\varphi(a, b, c, \ldots; x, y)$ rationnelle et entière en $a, b, c, \ldots; x, y$, qui satisfait à la condition

$$(A.) \quad (\xi\eta' - \eta\xi')^s \varphi(a, b, c, \ldots; \xi x + \xi' y, \eta x + \eta' y) = \varphi(A, B, C, \ldots; x, y),$$

l'exposant de la puissance à laquelle est élevé le déterminant de la substitution $\xi\eta' - \eta\xi'$, étant *entier* et *positif*. Cela posé, il est bien facile de reconnaître que le plus grand commun diviseur des coefficients d'un *covariant* quelconque φ, de la forme f, sera un élement numérique, caractéristique de la classe entière à laquelle appartient cette forme. Nommant pour un instant, φ', une expression *semblable* à φ, mais se rapportant à une forme f' arithmétiquement équivalente à f, il suit de l'équation $(A.)$, que φ et φ' seront elles mêmes arithmétiquement *équivalentes*, et auront nécessairement le même plus grand commun diviseur pour leurs coefficients. L'ensemble des classes, f, f_1, f_2, etc. qui ont les mêmes *invariants*, peut être ainsi divisé en ordres, en appliquant le principe même de Mr. *Gauss*, tel que nous l'avons présenté tout-à-l'heure, aux *covariants* φ, φ_1, φ_2, etc. qui leur correspondent respectivement. Et par là, on voit s'offrir autant de divisions en ordres, que de covariants distincts, de sorte que l'idée arithmétique très simple, qui nous a été donnée par la théorie des formes quadratiques, reçoit par le fait de

l'existence des divers covariants, un développement aussi intéressant que difficile à suivre. On est conduit en effet à ces problèmes, sources de belles recherches analytiques:

1°. Trouver tous les covariants des formes d'un degré donné.

2°. Trouver comment dépendent des *invariants* fondamentaux, les diviseurs d'un *covariant* quelconque, qui fournissent les caractères d'une division en ordres, relative à ce covariant.

3°. Comparer entre elles toutes les divisions en ordre qui reposent sur la considération des divers covariants.

C'est la solution de ces questions que nous nous proposons d'offrir pour les formes *cubiques* et *biquadratiques*. Elle se fonde principalement sur les propositions générales que nous allons établir.

II.

Propositions sur les covariants des formes binaires.

1re Proposition. Soient g et h, deux covariants quelconques de la forme

$$f = (a, b, c, \ldots \widehat{)} (x, y)^m,$$

de sorte qu'en faisant:

$$(a, b, c, \ldots \widehat{)} (kx + \varkappa y, lx + \lambda' y)^m = (A, B, C, \ldots \widehat{)} (x, y)^m$$

et pour abréger:

$$\omega = k\lambda - \varkappa l,$$

on ait:

$$(1.) \quad \omega^s g(a, b, c, \ldots; kx + \varkappa y, lx + \lambda y) = g(A, B, C, \ldots; x, y),$$

$$(2.) \quad \omega^t h(a, b, c, \ldots; kx + \varkappa y, lx + \lambda y) = h(A, B, C, \ldots; x, y).$$

Je dis qu'en posant:

$$(3.) \quad g\left(a, b, c, \ldots; xX - \frac{\partial h}{\partial y} Y, yX + \frac{\partial h}{\partial x} Y\right) = \theta(a, b, c, \ldots; x, y, X, Y),$$

on aura l'identité

$$(4.) \quad \omega^s \theta(a, b, c, \ldots; kx + \varkappa y, lx + \lambda y, X, \omega^{t+1} Y) = \theta(A, B, C, \ldots; x, y, X, Y).$$

Ainsi les coefficients des divers termes en X et Y dans cette fonction θ, se vérifieront de même forme que (1.) et (2.), et seront dèslors des covariants de f.

Soit:

$$\xi = kx + \varkappa y, \qquad \eta = lx + \lambda y$$
$$u = xX - \frac{\partial h}{\partial y} Y, \quad v = yX + \frac{\partial h}{\partial x} Y;$$

nommons U et V, ce que deviennent respectivement u et v, quand on remplace les coefficients $a, b, c, \ldots$ qui entrent dans la forme h, par $A, B, C, \ldots$ de sorte que;

$$(5.) \quad U = xX - \frac{\partial h(A, B, C, \ldots;\ x, y)}{\partial y} Y, \quad V = yX + \frac{\partial h(A, B, C, \ldots;\ x, y)}{\partial x} Y,$$

je vais établir comme lemme, qu'on aura:

$$(6.) \quad \begin{cases} kU + \varkappa V = \xi X - \omega^{t+1} \dfrac{\partial h(a, b, c, \ldots;\ \xi, \eta)}{\partial \eta} Y, \\ lU + \lambda V = \eta X + \omega^{t+1} \dfrac{\partial h(a, b, c, \ldots;\ \xi, \eta)}{\partial \xi} Y. \end{cases}$$

J'observe pour cela que l'identité (2.), ou ce qui revient au même, celle-ci:

$$\omega^t h(a, b, c, \ldots;\ \xi, \eta) = h(A, B, C, \ldots;\ x, y)$$

donne par la différentiation:

$$(7.) \quad \frac{\partial h(A, B, C, \ldots;\ x, y)}{\partial x} = \omega^t \left\{ k \cdot \frac{\partial h(a, b, c, \ldots;\ \xi, \eta)}{\partial \xi} + l \cdot \frac{\partial h(a, b, c, \ldots;\ \xi, \eta)}{\partial \eta} \right\},$$

$$(8.) \quad \frac{\partial h(A, B, C, \ldots;\ x, y)}{\partial y} = \omega^t \left\{ \varkappa \cdot \frac{\partial h(a, b, c, \ldots;\ \xi, \eta)}{\partial \xi} + \lambda \cdot \frac{\partial h(a, b, c, \ldots;\ \xi, \eta)}{\partial \eta} \right\}.$$

Or les équations (5.) donnent immédiatement:

$$kU + \varkappa V = (kx + \varkappa y) X + \left\{ \varkappa \cdot \frac{\partial h(A, B, C, \ldots;\ x, y)}{\partial x} - k \cdot \frac{\partial h(A, B, C, \ldots;\ x, y)}{\partial y} \right\} Y,$$

$$lU + \lambda V = (lx + \lambda y) X + \left\{ \lambda \cdot \frac{\partial h(A, B, C, \ldots;\ x, y)}{\partial x} - l \cdot \frac{\partial h(A, B, C, \ldots;\ x, y)}{\partial y} \right\} Y,$$

et en substituant les valeurs des deux dérivées partielles que fournissent les équations (7.) et (8.), il vient précisément l'équation (6.) que nous nous proposions d'établir.

Cela posé, revenons à la relation (1.), que nous allons réproduire en écrivant U et V au lieu de x et y, savoir:

$$(9.) \quad \omega^t g(a, b, c, \ldots;\ kU + \varkappa V, lU + \lambda V) = g(A, B, C, \ldots;\ U, V),$$

et à la relation (3.) par laquelle est définie la fonction θ:

$$(10.) \quad g(a, b, c, \ldots;\ u, v) = \theta(a, b, c, \ldots;\ x, y, X, Y).$$

Si dans cette dernière identité nous substituons $A, B, C, \ldots$ à $a, b, c, \ldots$, il faudra aussi mettre U et V au lieu de u et v, et il viendra:

$$g(A, B, C, \ldots; U, V) = \theta(A, B, C, \ldots; x, y, X, Y),$$

ou bien, à cause de l'équation (9.):

$$\omega^{s} g(a, b, c, \ldots; kU + \varkappa V, lU + \lambda V) = \theta(A, B, C, \ldots; x, y, X, Y).$$

Maintenant il résulte du lemme précédemment établi (équat. 6.) que $kU + \varkappa V$, $lU + \lambda V$, qui entrent dans le premier membre, sont ce que deviennent respectivement u et v, lorsqu'on y remplace x et y par ξ et η, et qu'on multiplie Y par ω^{t+1}. L'expression $g(a, b, c, \ldots; kU + \varkappa V, lU + \lambda V)$ n'est donc autre chose, en vertu de l'équation (10.), que $\theta(a, b, c, \ldots; \xi, \eta, X, \omega^{t+1} Y)$, et nous obtenons de la sorte la relation que nous voulions établir, savoir:

$$\omega^{s} \theta(a, b, c, \ldots; \xi, \eta, X, \omega^{t+1} Y) = \theta(A, B, C, \ldots; x, y, X, Y).$$

On peut aisément juger par cette première proposition, de la multitude des *covariants* qui existent pour une forme donnée. Ainsi, en prenant g et h égaux à f, qui est évidemment un *covariant* par rapport à elle même, on en obtiendra un certain nombre, avec lesquels on pourra encore employer le même théorème. Si donc on ne retrouve pas ainsi des formes obtenues précédemment, on verra de nouveaux covariants naître de tous ceux qui se sont déjà présentés, et il semble bien difficile de déduire de là une expression analytique générale pour tant de quantités qui peuvent, tout en restant dans le même principe, naître les unes des autres, de tant de manières différents. Voici ce qu'il m'a été donné de trouver après de longues méditations sur ce sujet.

2e *Proposition.* Nommons *covariants associés* à h, ceux qui résultent de la première proposition lorsqu'on suppose g égal à la forme f: je dis que tout covariant de f, quelqu'il soit, ou au moins son produit par une puissance entière de h, sera une fonction rationnelle et entière des *covariants associés*.

Pour mieux préciser d'abord, cette notion des *covariants associés*, reprenons l'expression analytique qui leur donne naissance, savoir:

$$\left(a, b, c, \ldots\right)\!\widehat{}\!\left(xX - \frac{\partial h}{\partial y} Y,\; yX + \frac{\partial h}{\partial x} Y\right)^{m}.$$

Il conviendra, en nommant n le degré de h en x et y, d'écrire $\frac{1}{n} Y$ au lieu de Y. Cela étant, si l'on met en évidence les coefficients des divers termes

en X et Y, il est clair que celui de X^m, sera la forme proposée f, et en faisant:

$$\left(a, b, c, \ldots\widehat{\right)\left(}xX - \frac{1}{n}\cdot\frac{\partial h}{\partial y}Y,\ yX + \frac{1}{n}\cdot\frac{\partial h}{\partial x}Y\right)^m = \left(f, h_1, h_2, \ldots h_m\widehat{\right)\left(}X, Y\right)^m,$$

ces quantités $h_1, h_2, \ldots h_m$ seront ce que nous nommons dorénavant les *covariants associés* à h.

Cela posé, soit $\pi(a, b, c, \ldots; x, y)$ un covariant quelconque de f; nous pourrons écrire les deux identités:

$$(a, b, c, \ldots\widehat{)(}xX + x'Y, yX + y'Y)^m = (A, B, C, \ldots\widehat{)(}X, Y)^m$$

$$(xy' - yx')^\mu \pi(a, b, c, \ldots; xX + x'Y, yX + y'Y) = \pi(A, B, C, \ldots; X, Y),$$

μ étant un certain nombre entier. Maintenant faisons:

$$x' = -\frac{1}{n}\cdot\frac{\partial h}{\partial y},\quad y' = \frac{1}{n}\cdot\frac{\partial h}{\partial x},$$

les coefficients $A, B, C, \ldots$ deviendront respectivement f, h_1, h_2, etc., et le déterminant $xy' - yx'$, la forme h elle même. Supposons encore dans la seconde équation $X = 1$, $Y = 0$, son second membre se réduira évidemment au coefficient de la puissance la plus élevée de X, fonction rationnelle et entière de $A, B, C, \ldots$ que nous désignerons par $(A, B, C, \ldots)$. Il vient donc ainsi l'équation suivante:

$$(11.)\quad h^\mu \pi(a, b, c, \ldots; x, y) = (f, h_1, h_2, \ldots)$$

par laquelle notre proposition se trouve démontrée.

Pour en montrer immédiatement une application, nous allons faire voir que tous les covariants d'une forme quadratique $f = (a, b, c\widehat{)(}x, y)^2$, s'obtiennent en multipliant une puissance de f par une puissance de l'invariant $b^2 - ac$.

Remarquons d'abord que le second membre de la relation (11.), est homogène en f, h_1, h_2, etc., car il provient de l'expression $(A, B, C, \ldots)$ qui est nécessairement homogène en $A, B, C, \ldots$ puisqu'en général tout covariant d'une forme est une fonction entière homogène des coefficients de cette forme. Cela étant, on trouve en prennant $h = f$:

$$\left(a, b, c\widehat{\right)\left(}xX - \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}Y,\quad yX + \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}Y\right)^2 = (f, 0, (ac - b^2)f\widehat{)(}X, Y)^2,$$

et:

$$f^\mu . \pi(a, b, c; x, y) = (f, 0, (ac - b^2)f).$$

Or le second membre, devant être homogène par rapport aux deux quantités

f et $(ac-b^2)f$, ne peut être que le produit d'une puissance de f par une fonction de l'invariant, et pour qu'un tel résultat soit aussi homogène en a, b, c, cette fonction de l'invariant doit être proportionnelle à une simple puissance. Donc tout covariant de la forme quadratique proposée, fonction rationnelle et entière de x, y, et a, b, c, par définition, est compris dans la formule $(b^2-ac)^i.f^k$, i et k étant entiers.

Si simple et si prévu que fût ce résultat, je n'ai pas cru inutile de l'établir rigoureusement, à cause des conséquences qui s'en déduiront par l'application de la loi de réciprocité: conséquences que j'ai déjà indiquées dans le journal de Mr. *Thompson*. D'ailleurs il montre sous un certain point de vue, comment les formes *quadratiques* se distinguent de formes *cubiques* et *biquadratiques*, dont nous allons nous occuper, tout en partageant avec elles une propriété caractéristique que nous verrons tout-à-coup disparaître dans les formes du *cinquième* degré. Nous ferons précéder ces questions de quelques remarques sur le système particulier des covariants qui sont associés à la forme proposée.

III.

Sur le système des covariants associés à la forme proposée.

On l'obtient en mettant en évidence, les divers termes en X et Y, dans l'expression

$$(a, b, c, \ldots \widehat{\big)}\Big(xX-\frac{1}{m}.\frac{\partial f}{\partial y}Y,\quad yX+\frac{1}{m}.\frac{\partial f}{\partial x}Y\Big)^m,$$

de sorte que si nous faisons:

$$(a, b, c, \ldots \widehat{\big)}\Big(xX-\frac{1}{m}.\frac{\partial f}{\partial y}Y,\quad yX+\frac{1}{m}.\frac{\partial f}{\partial x}Y\Big)^m = (f, f_1, f_2, \ldots f_m \widehat{)}(X, Y)^m,$$

les covariants associés à f, se trouveront désignés par f_1, f_2, ... f_m. Leurs premiers termes s'obtiennent facilement; car en faisant $y=0$, dans les expressions

$$xX-\frac{1}{m}.\frac{\partial f}{\partial y}Y \quad \text{et} \quad yX+\frac{1}{m}.\frac{\partial f}{\partial x}Y,$$

elles deviennent simplement:

$$xX-bY \quad \text{et} \quad aY.$$

En faisant pour abréger $\frac{1}{m.m-1\ldots m-i+1}.\frac{\partial^i f}{\partial x^i}=\varphi_i(x, y)$, on trouvera ainsi:

$$f_i = \varphi_i(-b, a)x^{(i-1)m-2i}+\ldots$$

Ce coefficient $\varphi_i(-b, a)$, est divisible par a, comme on le voit aisément; il s'ensuit, qu'en employant la méthode donnée dans mon premier mémoire, pour déduire un covariant de son premier terme, on obtiendra la forme f en facteur commun dans la série entière des covariants associés. Cette remarque faite, je vais étudier de plus près les quotients $\frac{1}{a}\varphi_i(-b, a)$, en supposant à i les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, pour lesquelles on trouve les coefficients de f; suivant l'ordre alphabétique:

$$\frac{1}{a}\varphi_1(-b, a) = 0,$$

$$\frac{1}{a}\varphi_2(-b, a) = -b^2 + ac,$$

$$\frac{1}{a}\varphi_3(-b, a) = 2b^3 - 3abc + a^2d,$$

$$\frac{1}{a}\varphi_4(-b, a) = -3b^4 + 6acb^2 - 4bda^2 + ea^3,$$

$$\frac{1}{a}\varphi_5(-b, a) = 4b^5 - 10acb^3 + 10b^2da^2 - 5bea^3 + fa^4.$$

Introduisons pour cela, les expressions suivantes; savoir:

A, invariant de $\varphi_2(x, y) = b^2 - ac$,

B, id. $\varphi_3(x, y) = (bc - ad)^2 - 4(b^2 - ac)(c^2 - bd)$,

C, id. $\varphi_4(x, y) = ae - 4bd + 3c^2$,

D, id. $\varphi_5(x, y) = (af - 3be + 2cd)^2 - 4(ae - 4bd + 3c^2)(bf - 4ce + 3d^2)$,

on verifiera sans peine les relations:

$$\frac{1}{a}\varphi_2(-b, a) = -A,$$

$$\frac{1}{a}\varphi_3(-b, a) = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{\partial B}{\partial d},$$

$$\frac{1}{a}\varphi_4(-b, a) = a^2C - 3A^2,$$

$$\frac{1}{a}\varphi_5(-b, a) = \tfrac{2}{3}A\frac{\partial B}{\partial d} - \tfrac{1}{2}a^2\frac{\partial B}{\partial f}.$$

Cela posé, soient g, g', les invariants analogues à A, C, mais relatifs aux formes

$$\frac{1}{m.m-1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\!(X, Y)^2$$

$$\frac{1}{m.m-1.m-2.m-3}\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y}, \frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}, \frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3}, \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right)\widehat{\ }(X, Y)^4,$$

et h, et h', les quantités:

$$h = \frac{1}{m(m-2)}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$
$$h' = \frac{1}{4m(m-3)}\left(\frac{\partial g'}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g'}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

on aura ces expressions des premiers covariants associés de f, savoir:

$$f_2 = -f.g,$$
$$f_3 = f.h,$$
$$f_4 = f.(f^2 g' - 3g^2),$$
$$f_5 = f.(2gh - f^2 h').$$

Cela résulte immédiatement, de ce que leurs termes les plus élevés en x, ont précisément pour coefficients les quantités $\varphi_2(-b, a)$, $\varphi_3(-b, a)$, etc. Mais je ne m'arreterai pas à le vérifier, m'étant seulement proposé de faire voir, comment viennent s'offrir dans ma théorie, les covariants auxquels Mr. *Sylvester* a donné les désignations de ***Hessieurs*** ou ***Démanants***, et qui ont été nommés précédemment g, g', g''.

IV.

Division en ordres des formes cubiques.

D'après ce que nous avons dit en commençant, le point de départ de cette théorie de la division en ordres, est la recherche complète de tous les covariants des formes *cubiques*. Nous allons nous en occuper, en nous fondant sur les propositions générales précédemment établies.

Soit la forme proposée:

$$f = (a, b, c, d)\widehat{\ }(x, y)^3,$$

on trouvera d'abord pour ses covariants associés, f_1 étant identiquement nul, les expressions $f_2 = -fg$, $f_3 = -fh$. Afin d'introduire par la suite $2g$ au lieu de g, nous écrivons: $f_2 = -\frac{1}{2}fg$, et nous aurons ces valeurs:

$$g = (2(b^2 - ac), bc - ad, 2(c^2 - bd))\widehat{\ }(x, y)^2,$$

$$h = (2b^3 - 3abc + a^2 d, b^2 c + abd - 2ac^2, -c^2 b + 2b^2 d - acd, -2c^3 + 3bcd - ad^2)\widehat{\ }(x, y)^3.$$

Cela posé, recherchons si d'autres covariants ne naitraient pas, par exemple, du développement de:

$$\left(a, b, c, d\widehat{\Big)}\Big(xX - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}Y,\ yX + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}X\right)^3.$$

Or on trouve sans peine que:

$$\left(a, b, c, d\widehat{\Big)}\Big(xX - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}Y,\ yX + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}X\right)^3 = (f, h, \varDelta f, \varDelta h\widehat{)}(X, Y)^3,$$

$\varDelta$ désignant l'invariant unique de f, savoir:

$$\varDelta = (bc - ad)^2 - 4(b^2 - ac)(c^2 - bd) = 4ac^3 + 4db^3 + a^2d^2 - 6abcd - 3b^2c^2.$$

Ce sont donc encore f et h qui se présentent, mais accompagnés maintenant de *l'invariant* $\varDelta$. Notre seconde proposition (§. II.) conduit ainsi à ces deux conclusions:

Tout covariant θ de la forme *cubique* f, est exprimable, soit de cette manière:

$$(1.)\qquad \theta = \frac{\Pi(f, g, h)}{f^\mu},$$

soit de la suivante:

$$(2.)\qquad \theta = \frac{\Phi(f, h, \varDelta)}{g^\nu},$$

les deux numérateurs étant des fonctions rationnelles et entières des diverses quantités qui y entrent, et les exposants μ et ν, étant entiérs. Or de là il est facile de conclure, que θ peut également s'exprimer par une fonction entière de f, g, h et $\varDelta$.

Pour établir la démonstration, j'observe d'abord, que deux quelconques de ces trois quantités, f, g, h, peuvent être regardées comme entièrement indépendantes. On le voit en considérant un cas particulier. Soit p. ex. $f = x^3 + y^3$, on trouvera: $g = -2xy$, $h = x^3 - y^3$: quantités qui, envisagées deux à deux, ne peuvent être liées par aucune relation, indépendante de x et y. Mais entre f, g, et h, une telle relation existe nécessairement, et s'obtient en comparant les invariants des deux formes $(a, b, c, d\widehat{)}(x, y)^3$ et $(f, 0, -\frac{1}{2}fg, fh\widehat{)}(X, Y)^3$, qui sont respectivement $\varDelta$ et $f^4h^2 - \frac{1}{2}f^4g^3$. Or la seconde, résultant de la première, par la substitution linéaire au déterminant f, qui donne naissance aux covariants associés à f, on trouvera:

$$\varDelta f^6 = f^4h^2 - \tfrac{1}{2}\varDelta f^4 g^3,$$

et plus simplement:

$$(3.)\qquad \varDelta f^2 + \tfrac{1}{2}g^3 = h^2.$$

(Cette équation a été recemment indiquée par Mr. *Cayley*, dans un mémoire intitulé: Nouvelles recherches sur les covariants.)

Cela posé, j'observe que les numérateurs dans les expressions (1.) et (2.) de θ, pourront être ramenés en vertu de cette relation, à contenir seulement la première puissance de h; ainsi on pourra écrire:

$$\Pi(f,g,h) = \Pi_0(f,g,\Delta)+h\Pi_1(f,g,\Delta),$$
$$\Phi(f,h,\Delta) = \Phi_0(f,g,\Delta)+h\Phi_1(f,g,\Delta),$$

les nouvelles fonctions, Π_0, Π_1, Φ_0, Φ_1, étant essentiellement entières en f, g, et Δ.

Égalons maintenant les deux expressions du covariant θ, il viendra:

$$\frac{1}{f^\mu}\Pi_0(f,g,\Delta)+\frac{h}{f^\mu}\Pi_1(f,g,\Delta) = \frac{1}{g^\nu}\Phi_0(f,g,\Delta)+\frac{h}{g^\nu}\Phi_1(f,g,\Delta).$$

Or je dis qu'on devra avoir séparement:

$$(4.)\quad \frac{1}{f^\mu}\Pi_0(f,g,\Delta) = \frac{1}{g^\nu}\Phi_0(f,g,\Delta),$$
$$(5.)\quad \frac{1}{f^\mu}\Pi_1(f,g,\Delta) = \frac{1}{g^\nu}\Phi_1(f,g,\Delta).$$

Effectivement, s'il n'en était pas ainsi, on aurait entre f, g, h, une équation essentiellement distincte de (3.), contenant h au premier degré seulement. Il serait donc possible, en éliminant cette quantité, d'obtenir entre f et g, une relation indépendante de x et y; contrairement à ce que nous avons précédemment établi. Or l'égalité (4.), lorsqu'on a chassé les dénominateurs, prouve immédiatement que Π_0 est divisible par f^μ, et Φ_0 par g^ν. Une conséquence toute semblable se tire de l'égalité (5.). Ainsi nous avons ce théorème:

Tout covariant de la forme cubique proposée f, est une fonction entière de f, g, h et de l'invariant Δ; le covariant h, pouvant être regardé comme entrant seulement au premier degré dans cette fonction.

Delà découlent beaucoup de conséquences sur lesquelles nous aurons à revenir dans la suite de ces recherches. En nous bornant maintenant à ce qui se rapporte à la division en ordres des formes *cubiques*, nous voyons que cette division peut être faite de trois manières différentes.

Soient en effet: $f, f', f'', \dots f^{(i)}$ les formes par lesquelles on peut représenter la totalité des classes *cubiques* différentes pour un même invariant Δ; à ces formes correspondront d'une part, les covariants *quadra-*

tiques, $g, g', g'', \ldots g^{(i)}$, et de l'autre les covariants *cubiques*, $h, h', h'', \ldots h^{(i)}$. Cela posé, chacun de ces trois groupes de formes, que pour abréger nous nommerons (f), (g) et (h), pourra tout d'abord être individuellement divisé en ordres, en appliquant le principe de Mr. *Gauss*, tel que nous l'avons présenté (§. I.). Or en réunissant dans le même groupe, toutes les formes de (f), dont les covariants quadratiques appartiennent au même ordre dans (g), on obtiendra une seconde division en ordres de (f), que nous dirons attachée à g. Et semblablement, si l'on prend pour point de départ la division en ordres de (h), et qu'on réunisse encore dans un même groupe les formes de (f), dont les covariants *cubiques* appartiennent au même ordre de (h), on arrivera à une troisième division en ordre de (f), que nous dirons attachée à h. De ces deux dernières divisions, celle qui est attachée à g, a la plus grande importance; comme nous nous reservons de le montrer dans un autre mémoire. Elle sert de base en effet à la détermination complète du nombre des classes cubiques pour un invariant donné: recherche que Mr. *Eisenstein* a déjà traité d'une manière aussi ingénieuse qu'élegante, mais seulement dans un cas particulier. Pour ce qui regarde la division en ordres attachée au covariant h, je ne puis la justifier que par l'analogie avec la précédente, car jusqu'ici je n'ai pas encore été amené à en faire usage, et à la caractériser par quelque propriété arithmétique particulière. Cependant dans plusieurs circonstances, j'ai vu le covariant h, jouer un rôle important, et j'en vais citer un exemple, qui se rapporte précisément à la recherche du nombre des classes *cubiques*. Il est nécessaire dans la méthode que j'ai suivie, d'obtenir l'expression analytique de toutes les formes, pour lesquelles le covariant quadratique est le même. Or f désignant une forme determinée dont le covariant quadratique est g, toutes les autres qui auront le même covariant, seront données par la formule: $tf+uh$, h étant le covariant cubique de f; t et u des constantes liées par la relation

$$t^2 - \varDelta u^2 = 1.$$

Il me reste encore à indiquer comment les diviseurs communs des coefficients de f, g, ou h, dépendent de $\varDelta$. Or en nommant λ, μ, ν, ces diviseurs, et remarquant que les invariants de f, g, h, à savoir: $\varDelta$, $\varDelta$, et $\varDelta^3$, sont respectivement des fonctions homogènes du 4e du 2e et encore du 4e ordre, des coefficients de ces formes, on voit immédiatement que:

λ^4 est un diviseur de Δ,
μ^2 id. . . . . . . Δ,
ν^4 id. . . . . . . Δ^3.

A ces relations, il faut aussi joindre les suivantes:

λ^2 est un diviseur des coefficients de g,
λ^3 id. . . . . h,
μ id. . . . . $2h$.

Les deux premières sont évidentes, et la troisième suit de l'équation

$$6h = \frac{\partial g}{\partial x}.\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial y}.\frac{\partial f}{\partial x},$$

dont le second membre contient le facteur *trois*, qui est amené par les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.

V.

Division en ordres des formes biquadratiques.

La recherche du système complet des covariants est le point de départ de cette question; comme de la précédente. Nous allons la traiter en nous proposant de mettre dans tout son jour, l'analogie que nous avons reconnue à cet égard, entre les formes *cubiques* et *biquadratiques*.

Soit, en conservant les dénominations de mon premier mémoire,

$$f = (a, b, c, b', a'\widehat{)(}x, y)^4$$

la forme proposée; ses covariants associés seront d'après les formules générales données à la fin du (§. III.):

$$f_1 = 0,$$
$$f_2 = -fg,$$
$$f_3 = fh,$$
$$f_4 = f(if^2 - 3g^2),$$

i étant *l'invariant quadratique* $aa' - 4bb' + 3c^2$; g et h, les *covariants* que nous avons déjà considérés, savoir:

$$g = (b^2 - ac,\ \tfrac{1}{2}(bc - ab'),\ \tfrac{1}{6}(3c^2 - 2bb' - aa'),\ \tfrac{1}{2}(b'c - a'b),\ b'^2 - a'c\widehat{)(}x, y)^4,$$
$$h = (p,\ q,\ r,\ s,\ r',\ q',\ p',\widehat{)(}x, y)^6,$$

en faisant pour abréger:

$$p = 2b^3 - 3abc + a^2b', \qquad 6q = 6b^2c - 9ac^2 + 2abb' + a^2a' \text{ etc.}$$

Cela posé, les covariants associés à g, résulteront de l'identité suivante

$$(a, b, c, b', a')\widehat{\Big(}xX - \frac{1}{4}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}Y,\ yX + \frac{1}{4}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}Y\Big)^2$$
$$= \big(f, \tfrac{1}{2}h, -\tfrac{1}{4}f(jf+ih), -\tfrac{1}{8}h(jf+ih), -jg^3 + \tfrac{7}{16}h(jf+ih)^2\big)\widehat{(}X, Y)^4,$$

qu'on vérifiera par un calcul un peu long, quoique sans difficulté, en réduisant les covariants à leurs premiers termes. Il en résulte que nous retrouvons les quantités f, g, h, accompagnées des deux invariants i et j. Ainsi la seconde proposition du (§. II.) conduit à ces deux conclusions:

Tout covariant θ de la forme biquadratique f, est exprimable, soit de cette manière:

$$(1.)\qquad \theta = \frac{\pi(f, g, h;\, i)}{f^{\mu}},$$

soit de la suivante:

$$(2.)\qquad \theta = \frac{\Phi(f, g, h;\, i, j)}{g^{\nu}};$$

les deux numérateurs étant des fonctions rationnelles et entières des diverses quantités qui y entrent, et les exposants, μ, ν, étant entiers.

Je vais maintenant établir que θ peut également s'exprimer par une fonction entière de f, g, h, i et j. J'observe d'abord que f et g ne sauraient être liés par aucune relation indépendante de x et y; comme on le voit en considérant le cas particulier de $f = x^4 + y^4$, qui donne $g = -x^2y^2$. Mais une telle relation existe entre f, g, et h, et a été établie dans mon premier mémoire, savoir:

$$4g^3 - igf^2 - jf^3 = h^2.$$

Or on voit que les numérateurs dans les expressions (1. et 2.) de θ, pourront être ramenés à l'aide de cette relation, à ne contenir que la première puissance de h. Ainsi on pourra écrire:

$$\Pi(f, g, h;\, i) = \Pi_0(f, g;\, i, j) + h\Pi_1(f, g;\, i, j),$$
$$\Phi(f, g, h;\, i, j) = \Phi_0(f, g;\, i, j) + h\Phi_1(f, g;\, i, j),$$

les nouvelles fonctions Π_0, Π_1, Φ_0, Φ_1, étant essentiellement entières en f, g, h, i et j. Il suit de là, en égalant les deux expressions du covariant θ:

$$\frac{1}{f^{\mu}}\Pi_0(f, g;\, i, j) + \frac{h}{f^{\mu}}\Pi_1(f, g;\, i, j) = \frac{1}{g^{\nu}}\Phi_0(f, g;\, i, j) + \frac{h}{g^{\nu}}\Phi_1(f, g;\, i, j);$$

donc, achevant de raisonner absolument comme nous l'avons fait pour les formes

cubiques, on obtiendra les équations séparées:

$$\frac{1}{f^{\mu}}\Pi_0(f,g;i,j) = \frac{1}{g^{\nu}}\Phi_0(f,g;i,j),$$
$$\frac{1}{f^{\mu}}\Pi_1(f,g;i,j) = \frac{1}{g^{\nu}}\Phi_1(f,g;i,j),$$

desquelles il résulte que Π_0 et Π_1 sont divisibles par f^{μ}; Φ_0 et Φ_1 par g^{μ}. Ainsi nous avons ce théorème:

Tout covariant de la forme *biquadratique* f, est une fonction rationnelle et entière de f, g, h, et des deux invariants i, j, le covariant h pouvant être regardé comme entrant seulement au premier degré dans cette relation.

Pour procéder maintenant à la division en ordres, il conviendra d'introduire au lieu de g et h, $6g$ et $6h$, qui ne contiendront aucun coefficient fractionnaire. La méthode que nous avons employée pour les formes *cubiques,* donnera alors trois divisions différentes de l'ensemble des classes distinctes qui ont les mêmes invariants i et j. L'une sera directement déduite de la considération des diviseurs communs aux coefficients des formes qui représentent ces classes; les autres seront respectivement attachées à $6g$ et $6h$. Mais moins avancés dans l'étude arithmétique des formes *biquadratiques,* nous ne pouvons encore, comme nous l'avons annoncé pour les formes *cubiques,* attribuer à aucune de ces divisions, d'autres propriétés que celles-là mêmes qui leur servent de définition. Nous nous bornerons donc à la recherche des relations qui existent entre les diviseurs des coefficients des formes f, $6g$, $6h$, et les invariants i, j, recherche qui exige plus de développement que dans la théorie des formes cubiques; car elle dépend de la détermination des divers invariants de $6g$ et $6h$. Nous nous occuperons, d'abord à cet égard, de la forme g, mais en nous plaçant à un point de vue plus général, afin d'en tirer occasion de présenter quelques remarques sur un beau théorème qu'a donné Mr. *Hesse,* et qu'on peut énoncer ainsi:

Soit F une forme biquadratique composée linéairement en f et g, savoir

$$F = tf - ug,$$

t et u étant des constantes: si l'on nomme G le covariant déduit de F, comme g de f, on aura:

$$G = u'g - t'f,$$

u' et t', désignant de nouvelles constantes.

Une nouvelle démonstration de ce théorème résulte d'abord immédiatement de notre proposition, que tous les covariants des formes biquadratiques sont des fonctions entières de f, g, h. Effectivement, la forme G, qui sera évidemment un covariant de f, doit être, comme cela se voit à priori, du *quatrième* degré en x et y. Or les seuls covariants du 4ᵉ degré, qui puissent résulter d'une fonction entière de f, g, h, sont des fonctions linéaires de f et g. G est donc, comme la forme F elle même, une expression de cette nature. Cela étant, on trouvera, comme il suit, t' et u', au moyen de t et u. Nommons: I, J et H, les quantités analogues à i, j, et h, pour la forme F. Entre ces quantités on aura la relation

$$4G^3 - IGF^2 - JF^3 \doteq H^2,$$

que j'écrirai ainsi:

$$(4, 0, -\tfrac{1}{3}I, -J)\widehat{\ }(G, F)^3 = H^2.$$

Or on reconnait immédiatement par l'expression de H au moyen des dérivées partielles $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dG}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$, $\frac{dG}{dy}$, que l'on a:

$$H = (tu' - ut')h.$$

Nous pouvons donc poser:

$$(4, 0, -\tfrac{1}{3}I, -J)\widehat{\ }(G, F)^3 = H^2 = (tu' - ut')^2 h^2$$
$$= (tu' - ut')^2 (4, 0, -\tfrac{1}{3}i, -j)\widehat{\ }(g, f)^3,$$

et en observant que les équations

$$F = tf - ug, \quad G = u'g - t'f$$

donnent:

$$f = \frac{uG + u'F}{tu' - ut'}, \quad g = \frac{tG + t'F}{tu' - ut'},$$

$$(4, 0, -\tfrac{1}{3}I, -J)\widehat{\ }(G, F)^3$$
$$= (tu' - ut')^2 \left(4, 0, -\tfrac{1}{3}i, -j\right)\widehat{\ }\left(\frac{tG + t'F}{tu' + ut'}, \frac{uG + u'F}{tu' + ut'}\right)^3,$$

cette dernière relation peut elle même évidemment se ramener à la suivante:

$$(3.) \quad (tu' - ut')\widehat{\ }(4, 0, -\tfrac{1}{3}I, -J)\widehat{\ }(G, F)^3$$
$$= (4, 0, -\tfrac{1}{3}i, -j)\widehat{\ }(tG + t'F, uG + u'F)^3,$$

que nous allons traiter comme identique par rapport à G et F.

A cet effet je désigne pour un instant par $\varphi(t, u)$, la forme cubique $(4, 0, -\tfrac{1}{3}i, -j)\widehat{\ }(t, u)^3$. On trouvera, en égalant les coefficients de G^3 et

G^2F^2, ces deux équations:

$$4(tu'-vt') = \varphi(t,u),$$
$$0 = t'\frac{d\varphi}{dt} + u'\frac{d\varphi}{du},$$

desquelles on tirera:

$$t' = -\frac{1}{12}\cdot\frac{d\varphi}{du}, \quad u' = \frac{1}{12}\cdot\frac{d\varphi}{dt};$$

expressions bien simples comme on voit.

Mais notre principal objet est d'obtenir les invariants I et J, qu'il nous faudra tout-à-l'heure employer dans le cas particulier où $F=6g$. Soient dans ce but, χ et ψ, les covariants quadratique et cubique de φ, savoir:

$$\chi = (\tfrac{4}{3}i,\ 2j,\ \tfrac{1}{9}i^2)\widehat{\ }(t,u)^2,$$
$$\psi = (-16j,\ -\tfrac{8}{9}i^2,\ -\tfrac{4}{3}ij,\ -\tfrac{2}{27}i^3-4j^2)\widehat{\ }(t,u)^3,$$

on trouvera, en employant les valeurs obtenues pour t' et u':

$$\left(4,0,-\tfrac{1}{3}i,-j\right)\widehat{\ }\left(tG-\frac{1}{12}\cdot\frac{d\varphi}{du}F,\ uG+\frac{1}{12}\cdot\frac{d\varphi}{dt}F\right)^3$$
$$= \left(\varphi,0,-\frac{1}{4^2}\varphi\chi,\ \frac{1}{4^3}\varphi\psi\right)\widehat{\ }(G,F)^3;$$

car nous avons été amenés à faire usage précédemment de la substitution qui donne naissance aux covariants associés. L'équation (3.) devient ainsi, en remplacant $tu'-ut'$ par $\tfrac{1}{4}\varphi$:

$$\tfrac{1}{4}\varphi(4,0,-\tfrac{1}{3}I,-J)\widehat{\ }(G,F)^3 = \left(\varphi,0,-\frac{1}{4^2}\varphi\chi,\ \frac{1}{4^3}\varphi\psi\right)\widehat{\ }(G,F)^3,$$

et l'on en tire:

$$I = \tfrac{3}{4}\chi = (i,\ \tfrac{3}{2}j,\ \tfrac{1}{12}i^2)\widehat{\ }(t,u)^2,$$
$$J = -\tfrac{1}{16}\psi = \left(j,\ \tfrac{1}{18}i^2,\ \tfrac{1}{12}ij,\ \frac{54j^2-i^3}{6^3}\right)\widehat{\ }(t,u).$$

En particulier, si l'on suppose $t=0$, $u=-6$, afin d'obtenir $F=6g$, on trouvera:

$$I = 3i^2, \quad J = i^3-54j^2.$$

C'est là le résultat que nous voulions établir pour arriver à caractériser les nombres entiers, diviseurs des coefficients de $6g$.

Nous allons maintenant procéder à une recherche analogue relativement aux coefficients de la forme $6h$. Cette recherche tout d'abord semble plus difficile; car nous ne possedons aucune proposition sur les invariants des formes

du 6ᵉ degré. Mais il se présente ici le premier exemple d'un fait remarquable, que nous verrons plus tard se reproduire dans bien des circonstances. La forme h possède en effet cette singulière propriété que tous ses invariants, sont ou le discriminant, ou les puissances du discriminant de la forme biquadratique proposée f. Voici, je crois la manière la plus facile, de le démontrer. Imaginons que par une substitution S, au déterminant *un*, on fasse évanouir dans f, les coefficients de x^3y et xy^3, de sorte que la transformée obtenue soit:

$$F = (A, 0, C, 0, A')\widehat{)}(X, Y)^4.$$

Cette substitution effectuée dans h, donnera précisement pour transformée la forme H qu'on déduirait de F, par le même loi que h de f. Or on trouve ainsi:

$$H = (0, \tfrac{1}{6}A(AA'-9C^2), 0, 0, 0, -\tfrac{1}{6}A'(AA'-9C^2), 0\widehat{)}(X, Y)^6.$$

Cela posé, un invariant quelconque de h, fonction homogène de p, q, r, s, r', q', p', ne changera pas de valeur en substituant à ces coefficients ceux de la transformée H. Mais par là, cet invariant devient une fonction homogène des deux seules quantités $A(AA'-9C^2)$ et $A'(AA'-9C^2)$, et même une fonction qui ne doit pas changer par rapport à la substitution $X = -Y'$, $Y = X'$; il ne peut donc être que *proportionnel* à une puissance du produit $AA'(AA'-9C^2)^2$. Or ce produit s'exprime aisément en i et j: car F étant une transformée de f par une substitution au déterminant 1, on a:

$$i = AA' + 3C^2, \quad j = C(AA' - C^2)$$

et par suite le discriminant $\varDelta$ a pour valeur:

$$\varDelta = i^3 - 27j^2 = AA'(AA'-9C^2)^2;$$

d'où résulte ce que nous avons annoncé.

Ceci établi, on sait par un théorème de M. *Cayley*, que l'expression

$$pp' - 6qq' + 15rr' - 10s^2$$

est un invariant de la forme $(p, q, r, s, r', q', p'\widehat{)}(x, y)^6$, de sorte qu'on doit avoir, en désignant par μ une quantité numérique:

$$pp' - 6qq' + 15rr' - 10s^2 = \mu\varDelta.$$

Or en supposant $b = 0$, $b' = 0$, on trouve de suite que μ doit être $\frac{1}{6}$; nous avons donc pour la forme $6h$, un invariant de *second degré* par rapport à ses coefficients, et dont la valeur est $6\varDelta$. Ce dernier résultat et les expressions précedemment obtenues pour les invariants de $6g$, donnent les conséquences suivantes:

Désignant par λ, μ, ν, les diviseurs des coefficients des formes f, $6g$, $6h$,

λ^2 est un diviseur de l'invariant i,
λ^3 id. . . . . j,
μ^2 id. . . . . $3i^2$,
μ^3 id. . . . . $i^3 - 54j^2$,
ν^2 id. . . . . 6Δ, ou: $6(i^3 - 27j^2)$.

A ces relations il faut aussi joindre celles-ci qu'il nous suffira d'indiquer:

λ^2 est un diviseur des coefficients de $6g$,
λ^3 id. . . . . $6h$,
μ id. . . . . $8h$.

Comme pour les formes cubiques, la dernière resulte de l'équation

$$8h = \frac{dg}{dx}\cdot\frac{df}{dy} - \frac{dg}{dy}\cdot\frac{df}{dx}.$$

Je terminerai par une remarque qui ne sera pas peut-être sans importance au point de vue arithmétique, et qui se tire des formules que j'ai données pour le théorème de M. *Hesse*. Elle consiste en ce que le discriminant Δ, est un *facteur* dans le covariant G, et les deux invariants I et J de la forme $F = i^2 f + 9jg$.

VI.

Sur les covariants des formes du cinquième degré.

Il a été précédement établi, que tous les covariants des formes cubiques et biquadratiques s'expriment en fonction rationnelle et entière de deux d'entre eux, et de la forme proposée. Ces deux covariants fondamentaux ont, comme nous l'avons vu, une origine commune, et se trouvent dans le groupe des covariants associés à la forme primitive. Or cette proprieté fondamentale n'existe plus pour les formes du *cinquième* degré, et il devient alors impossible d'exprimer tous les covariants en fonction entière de ceux que nous avons défini comme associés à la proposée. Effectivement, les formules générales données à la fin du (§. III.) mettent en évidence ces quatre covariants associés, g, g', h, h', dont voici les premiers termes:

$$g = (b^2 - ac)x^6 + \ldots,$$
$$g' = (ae - 4bd + 3c^2)x^2 + \ldots,$$
$$h = (2b^3 - 3abc + a^2 d)x^9 + \ldots,$$
$$h' = \{(af - 3be + 2cd)^2 - 4b(ae - 4bd + 3c^2)\}x^6 + \ldots,$$

la forme primitive étant supposée:

$$f = (a, b, c, d, e, f \widehat{)} (x, y)^5.$$

Or il existe au moins un covariant *cubique,* qu'on pourra par exemple définir comme l'invariant j de la forme *biquadratique* suivante:

$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}, \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}, \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}, \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \widehat{\Big)} (X, Y)\right)^4,$$

et qui ne pourra jamais s'exprimer par une fonction entière de g, g', h, h', qui sont respectivement des degrés, 6, 2, 9 et 5.

Il existe donc bien au point de vue algébrique, un caractère important qui appartient exclusivement aux formes de degrés moindres que *cinq;* mais il y a même pour ces formes, des propriétés qu'on doit regarder comme exceptionnelles, et qui peuvent veritablement les faire considérer comme des cas singuliers dans les théories générales. Ainsi: les formes cubiques ne possèdent point de covariants linéaires, qui se présentent pour toutes les autres formes de degrés impairs. Les formes biquadratiques n'ont pas non plus de covariants quadratiques, qui présentent au contraire pour toutes les autres formes de degrés pairs. Or de là découlent dans la nature de ces formes de profondes différences, que nous nous attacherons à apprecier et à faire ressortir dans la suite de nos recherches.

Paris, Juillet 1854.

3.

Extrait d'une lettre de Mr. *Ch. Hermite* de Paris à Mr. *Borchardt* de Berlin sur le nombre des racines d'une équation algébrique comprises entre des limites données.

. . . . . En poursuivant mes recherches sur le théorème de Mr. *Sturm*, j'ai réussi à traiter par les mêmes principes les équations à coefficients imaginaires; ce qui m'a conduit au théorème de Mr. *Cauchy* pour le cas du rectangle, du cercle, et d'une infinité d'autres courbes qui sont même à branches infinies, comme l'hyperbole. La théorie des formes quadratiques vient ainsi donner pour ces théorèmes des démonstrations indépendantes de toute considération de continuité, comme celle que Vous avez déjà pu conclure Vous-même de ce que j'ai dit au sujet du théorème de Mr. *Sturm* dans les Comptes rendus de l'Académie (1853, 1er semestre p. 294). La réduction d'une forme quadratique à une somme de carrés qui a été le sujet de Votre mémoire sur l'équation dont dépendent les inégalités séculaires, joue le principal rôle dans mes recherches. Seulement au lieu des substitutions où la somme des carrés des variables qu'on introduit, est égale à la somme des carrés des variables primitives, je considère des substitutions réelles quelconques. On a alors cette proposition, donc je donnerai une démonstration très facile, dans la suite des mémoires sur les formes quadratiques que je destine un journal de Mr. *Crelle*.

De quelque manière que l'on fasse évanouir les rectangles d'une forme quadratique par une substitution réelle, le nombre des carrés qui se présenteront, affecté de coefficients de même signes, sera constant. Ce nombre est ainsi un véritable invariant pour l'ensemble des formes équivalentes par des substitutions réelles. Maintenant voici le premier théorème qu'il faut établir, pour traiter les équations à coefficients imaginaires.

1.

Soient $X = x + ix'$, $Y = y + iy'$, ... $U = u + iu'$, n variables imaginaires, i désignant $\sqrt{-1}$, et $X_0 = x - ix'$, $Y_0 = y - iy'$, ... $U_0 = u - iu'$ leurs conjuguées respectives, la forme quadratique suivante:

$$\begin{aligned}\varphi = & X_0(a_{1,1}X + a_{1,2}Y + \cdots + a_{1,n}U) \\ + & Y_0(a_{2,1}X + a_{2,2}Y + \cdots + a_{2,n}U) \\ + & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + & U_0(a_{n,1}X + a_{n,2}Y + \cdots + a_{n,n}U)\end{aligned}$$

sera évidemment réelle en mettant en évidence, $x, y, \ldots u; x', y', \ldots u'$, si les constantes $a_{\mu,\nu}$ et $a_{\nu,\mu}$ sont des quantités imaginaires conjuguées, ce qui suppose réelles $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots a_{n,n}$. Sous cette condition nommons: Δ_1, Δ_2, Δ_3, $\ldots \Delta_n$; les déterminants qui suivent:

$$\Delta_1 = a_{1,1}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}, \quad \ldots$$

$$\ldots \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

et qui sont près le terme principal, ayant le signe $+$. Tous ces déterminants sont réels, car ils se reproduisent en mettant les colonnes horizontales à la place des colonnes verticales, ou $a_{\nu,\mu}$ au lieu de $a_{\mu,\nu}$; ce qui revient à changer dans les élements $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$. Cela étant, si l'on fait évanouir les rectangles de la forme φ par une substitution réelle, le nombre des carrés qui se présenteront avec des coefficients positifs, sera double du nombre des termes positifs de la suite

$$\Delta_1, \quad \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \quad \ldots \quad \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

et le nombre des carrés multipliés par des coefficients négatifs, le double du nombre des termes négatifs de la même suite. On voit par ce théorème que les formes telles que φ, se comportent comme des formes à un nombre d'indéterminées moitié moindre; ce qui est surtout important pour l'Arithmétique; comme je l'ai démontré dans la théorie nouvelle dont j'ai fait dépendre la décomposition des nombres en quatre carrés. Mais la notice de ce genre de formes, me semble également indispensable pour arriver au théoreme suivant, qui est un théorème fondamental.

2.

Soit: $F(z) = Az^n + Bz^{n-1} + \cdots + Kz + L = 0$ une équation dont les coefficients sont des quantités imaginaires quelconques, et $a, b, c, \ldots k$

ses racines; nommons A_0, B_0, ... K_0, L_0, les quantités conjuguées de A, B, ... K, L, et posons $F_0(z) = A_0 z^n + B_0 z^{n-1} + \cdots + K_0 z + L_0$. La forme quadratique suivante:

$$\begin{aligned}\varphi = & \frac{i}{F_0(a)F'(a)}(x + ay + \cdots + a^{n-1}u)^2 \\ & + \frac{i}{F_0(b)F'(b)}(x + by + \cdots + b^{n-1}u)^2 \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{i}{F_0(k)F'(k)}(x + ky + \cdots + k^{n-1}u)^2,\end{aligned}$$

fonction symétrique des racines $a, b, \ldots k$, sera toujours réelle, et jouira de cette propriété que si l'on fait évanouir les rectangles, le nombre des carrés affectés de coefficients *positifs*, sera egal au nombre des racines, $a, b, \ldots k$, dans lesquelles le coefficient de i sera *positif*, et le nombre des carrés affectés de coefficients *négatifs* égal au nombre des racines dans lesquelles le coefficient de i est *négatif*.

Pour le démontrer, je vais introduire, comme plus haut, les indéterminées imaginaires conjuguées: $X = x + ix'$, $X_0 = x - ix'$, $Y = y + iy'$, $Y_0 = y - iy'$, ... $U = u + iu'$, $U_0 = u - iu'$, et en posant pour abréger, $\Theta(a) = X + aY + \cdots + a^{n-1}U$, $\Theta_0(a) = X_0 + aY_0 + \cdots + a^{n-1}U_0$, je considérerai la nouvelle forme

$$\begin{aligned}\Phi = & \frac{i}{F_0(a)F'(a)} \cdot \Theta(a)\Theta_0(a) + \frac{i}{F_0(b)F'(b)} \cdot \Theta(b)\Theta_0(b) + \cdots + \frac{i}{F_0(k)F'(k)} \cdot \Theta(k)\Theta_0(k) \\ = & \Sigma \frac{i}{F_0(a)F'(a)} \cdot \Theta(a)\Theta_0(a).\end{aligned}$$

En désignant par φ' ce que devient φ, lorsqu'on met $x', y', \ldots u'$, au lieu de $x, y, \ldots u$, on aura évidemment: $\Phi = \varphi + \varphi'$; mais il sera beaucoup plus facile de raisonner sur cette forme Φ, que sur φ, qui contient un nombre d'indéterminées deux fois moindre. Pour démontrer en premier lieu la réalité des coefficients, je remarquerai que les racines de l'équation $F_0(z) = 0$, seront les conjuguées, $a_0, b_0, \ldots k_0$, des racines de la proposée, de sorte qu'on aura par la décomposition en fractions simples:

$$\frac{\Theta(a)}{F_0(a)} = \frac{\Theta(a_0)}{(c - a_0)F_0'(a_0)} + \frac{\Theta(b_0)}{(a - b_0)F_0'(b_0)} + \cdots + \frac{\Theta(k_0)}{(a - k_0)F_0'(k_0)};$$

d'où cette expression de Φ, savoir:

$$\begin{aligned}\Phi = & \frac{i\Theta_0(a)}{F'(a)}\left\{\frac{\Theta(a_0)}{(a-a_0)F'_0(a_0)}+\frac{\Theta(b_0)}{(a-b_0)F'_0(b_0)}+\cdots+\frac{\Theta(k_0)}{(a-k_0)F'_0(k_0)}\right\}\\ & +\frac{i\Theta_0(b)}{F'(b)}\left\{\frac{\Theta(a_0)}{(b-a_0)F'_0(a_0)}+\frac{\Theta(b_0)}{(b-b_0)F'_0(b_0)}+\cdots+\frac{\Theta(k_0)}{(b-k_0)F'_0(k_0)}\right\}\\ & +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ & +\frac{i\Theta_0(k)}{F'(k)}\left\{\frac{\Theta(a_0)}{(k-a_0)F'_0(a_0)}+\frac{\Theta(b_0)}{(k-b_0)F'_0(b_0)}+\cdots+\frac{\Theta(k_0)}{(k-k_0)F'_0(k_0)}\right\}.\end{aligned}$$

Or, en réunissant les termes contenus dans une même colonne verticale, on trouvera de suite $\Phi=\Sigma\frac{-i\Theta_0(a)\Theta(a)}{F(a_0)F'_0(a_0)}$, ce qui est bien l'expression primitive, dans laquelle on a changé $+i$ en $-i$.

Ce premier point établi, je fais la substitution suivante:

$$\frac{\Theta(a_0)}{F'_0(a_0)}=\xi,\quad \frac{\Theta(b_0)}{F'_0(b_0)}=\eta,\quad \cdots\quad \frac{\Theta(k_0)}{F'_0(k_0)}=v,$$
$$\frac{\Theta_0(a)}{F'(a)}=\xi_0,\quad \frac{\Theta_0(b)}{F'(b)}=\eta_0,\quad \cdots\quad \frac{\Theta_0(k)}{F'(k)}=v_0,$$

ξ et ξ_0, η et η_0, ... v et v_0 étant des variables imaginaires conjuguées. De là résultera évidemment une substitution toute réelle, entre les éléments réels des indéterminées $X, Y, \ldots U$ et $\xi, \eta, \ldots v$, puisque le système des équations posées ne change pas en mettant $-i$ au lieu de $+i$. Ainsi, lorsqu'on fait évanouir les rectangles, le nombre des coefficients des carrés qui ont un signe donné, sera le même pour la forme Φ et la transformée en $\xi, \eta, \ldots v$, savoir:

$$\begin{aligned}\psi = & i\xi_0\left(\frac{\xi}{a-a_0}+\frac{\eta}{a-b_0}+\cdots+\frac{v}{a-k_0}\right)\\ & +i\eta_0\left(\frac{\xi}{b-a_0}+\frac{\eta}{b-b_0}+\cdots+\frac{v}{b-k_0}\right)\\ & +\cdots\cdots\cdots\cdots\\ & +iv_0\left(\frac{\xi}{k-a_0}+\frac{\eta}{k-b_0}+\cdots+\frac{v}{k-k_0}\right).\end{aligned}$$

Or il est facile d'appliquer à cette transformée le théorème (1.), et d'obtenir le terme général de la suite

$$\Delta_1,\quad \frac{\Delta_2}{\Delta_1},\quad \frac{\Delta_3}{\Delta_2},\quad \cdots\quad \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}.$$

Je considère pour cela m des carrés $a, b, \ldots k$, que je désignerai par $a, b, \ldots f, g$; le rapport de déterminants $\frac{\Delta_m}{\Delta_{m-1}}$, sera la valeur de $\frac{\mu'}{\mu}$ qu'on tirera des équations linéaires

$$\frac{i\xi}{a-a_0}+\frac{i\eta}{a-b_0}+\cdots+\frac{i\lambda}{a-f_0}+\frac{i\mu}{a-g_0}=\xi',$$
$$\frac{i\xi}{b-a_0}+\frac{i\eta}{b-b_0}+\cdots+\frac{i\lambda}{b-f_0}+\frac{i\mu}{b-g_0}=\eta',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{i\xi}{g-a_0}+\frac{i\eta}{g-b_0}+\cdots+\frac{i\lambda}{g-f_0}+\frac{i\mu}{g-g_0}=\mu',$$

dans l'hypothèse particulière que les seconds membres, à l'exception de μ', soient nuls.

Or on satisfait à ces équations de la manière suivante. Soit:

$$\Pi(z)=(z-a)(z-b)\dots(z-g),\quad \Pi_0(z)=(z-a_0)(z-b_0)\dots(z-g_0),$$

on fera:

$$i\xi=\frac{\Pi(a_0)}{\Pi'_0(a_0)}\left\{\frac{\xi'\Pi_0(a)}{(a_0-a)\Pi'(a)}+\frac{\eta'\Pi_0(b)}{(a_0-b)\Pi'(b)}+\cdots+\frac{\mu'\Pi_0(g)}{(a_0-g)\Pi'(g)}\right\},$$
$$i\eta=\frac{\Pi(b_0)}{\Pi'_0(b_0)}\left\{\frac{\xi'\Pi_0(a)}{(b_0-a)\Pi'(a)}+\frac{\eta'\Pi_0(b)}{(b_0-b)\Pi'(b)}+\cdots+\frac{\mu'\Pi_0(g)}{(b_0-g)\Pi'(g)}\right\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$i\mu=\frac{\Pi(g_0)}{\Pi'_0(g_0)}\left\{\frac{\xi'\Pi_0(a)}{(g_0-a)\Pi'(a)}+\frac{\eta'\Pi_0(b)}{(g_0-b)\Pi'(b)}+\cdots+\frac{\mu'\Pi_0(g)}{(g_0-g)\Pi'(g)}\right\},$$

ce qui donnera de suite pour le cas particulier qu'on a en vue, $\frac{\mu'\Pi(g_0)\Pi_0(g)}{(g_0-g)\Pi'_0(g_0)\Pi'(g)}$, donc: $\frac{\mu'}{\mu}=\frac{\Delta_m}{\Delta_{m-1}}=i(g_0-g)$: Norme $\frac{\Pi_0(g)}{\Pi'(g)}$, quantité qui a précisément le signe du coefficient de i dans la racine g. Ainsi les coefficients des carrés dans la forme Ψ, ou dans la forme Φ, lorsqu'on aura fait évanouir les rectangles, offriront un nombre de termes positifs et de termes négatifs, double du nombre des termes positifs et négatifs de la suite

$$i(a_0-a),\quad i(b_0-b),\quad \dots\quad i(k_0-k);$$

donc à cause de la relation $\Phi=\varphi+\varphi'$, *le nombre des coefficients des carrés qui offriront un signe donné, lorsqu'on fera évanouir les rectangles dans la forme φ, sera égal au nombre des termes, ayant ce même signe, dans la série des coefficients de i des racines $a, b, \dots k$.*

3.

Les résultats précédents sembleront sans doute inapplicables dans la pratique, à cause de la difficulté d'évaluer les fractions symétriques des racines qui se présentent pour les coefficients de la forme quadratique φ. Mais ce

n'est là qu'une difficulté apparente, comme Vous allez voir. Reprenons l'expression $\varphi = \Sigma \frac{i}{F_0(a) F'(a)}(x + ay + \cdots + a^{n-1} u)^2$, et faisons la substitution suivante que m'a suggérée la notion des formes adjointes, telle que je l'ai indiquée dans une de mes lettres à Mr. *Jacobi* (tome XL. p. 263 et suiv. de ce Journal) sur la théorie des nombres.

Posons:

$$\tfrac{1}{2}\frac{d\varphi}{dx} = z_0, \quad \tfrac{1}{2}\frac{d\varphi}{dy} = z_1, \quad \ldots \quad \tfrac{1}{2}\frac{d\varphi}{du} = z_{n-1}.$$

Un calcul extrêmement simple, montre que si l'on désigne par $\mathfrak{F}(a)$, $\mathfrak{F}(b)$, ... $\mathfrak{F}(k)$ ce que deviennent les quotients $\frac{F(z)}{z-a}$, $\frac{F(z)}{z-b}$, ... $\frac{F(z)}{z-k}$, quand on y remplace z^μ par z_μ, on obtiendra la transformée: $\mathfrak{F} = \Sigma \frac{-iF_0(a)}{F'(a)}\{\mathfrak{F}(a)\}^2$.

Or cette transformée qu'on peut substituer pour notre objet à la forme φ, s'évalue immédiatement et sous forme explicitement réelle, au moyen des coefficients de l'équation proposée $F(z) = 0$. Considérez pour cela l'expression $\Sigma \frac{F_0(a)}{F'(a)} \cdot \frac{F(z)}{z-a} \cdot \frac{F'(z)}{z'-a}$, où z et z' sont deux variables distinctes, elle se transforme successivement de la manière qu'expriment ces relations, savoir:

$$\Sigma \frac{F_0(a)}{F'(a)} \cdot \frac{F(z)}{z-a} \cdot \frac{F(z')}{z'-a} = F(z) F(z') \Sigma \frac{F_0(a)}{F'(a)} \cdot \frac{1}{(z-a)(z'-a)}$$

$$= \frac{F(z) F(z')}{z'-z} \Sigma \frac{F_0(a)}{F'(a)} \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z'-a}\right) = \frac{F(z) F(z')}{z'-z}\left(\frac{F_0(z)}{F(z)} - \frac{F_0(z')}{F(z')}\right)$$

$$= \frac{F(z') F_0(z) - F(z) F_0(z')}{z'-z}.$$

Ainsi la transformée $\mathfrak{F}$, sera ce que deviendra l'expression évidemment réelle: $-i\frac{F(z')F_0(z) - F(z)F_0(z')}{z'-z}$, quand, après avoir effectué la division, on remplace successivement, z^0, z^1, z^2, ... z^{n-1}, puis z'^0, z'^1, z'^2, ... z'^{n-1}, par $z_0, z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$. Soit par exemple $F(z) = az^2 + bz + c + i(a'z^2 + b'z + c')$, on trouvera:

$$\tfrac{1}{2}\frac{F(z')F_0(z) - F(z)F_0(z')}{z'-z} = (ab' - ba')zz' + (ac' - ca')(z + z') + bc' - cb'$$

et par suite cette expression de

$$\mathfrak{F} : \tfrac{1}{2}\mathfrak{F} = (ab' - ba')z_1^2 + 2(ac' - ca')z_0 z_1 + (bc' - cb')z_0^2.$$

Cette méthode pour obtenir la forme $\mathfrak{F}$, et les rapports de cette forme avec les racines de l'équation $F(z)=0$, étant bien établis, voici les premières conséquences à en tirer.

4.

Soit Φ, le coefficient de i dans l'expression $\varphi(x+iy)$, où φ est une fonction rationnelle à coefficients réels ou imaginaires. Si l'on considère x et y, comme deux coordonnées rectangulaires dans un plan, l'équation $\Phi=0$, représentera une courbe, relativement à laquelle nous distinguerons dans ce plan, deux regions différentes. Je dirai que les points dont ces coordonnées substituées dans la fonction Φ, la rendent positive, occupent la region positive, et que ceux qui la rendent négative, occupent la region négative. Cela posé, représentons géométriquement chacune des racines imaginaires, $a, b, \dots k$, par un point dont l'abscisse et l'ordonnée seraient la partie réelle et le coefficient de i de cette racine, on pourra déterminer combien de points ainsi obtenus, se trouvent dans l'une ou l'autre des régions que nous avons définies. En effet, si l'on élimine z, entre les équations $F(z)=0$, $u=\varphi(z)$, l'équation en u, aura pour racines, $\varphi(a)$, $\varphi(b)$, $\dots$ $\varphi(k)$; ainsi la forme quadratique, déduite de cette équation, conduira à déterminer le nombre de ces racines, dans lesquelles le coefficient de i a un signe donné, et par conséquent le nombre des racines, $a, b, \dots k$, de l'équation proposée qui occupent la région positive ou négative, relativement à la courbe $\Phi=0$.

Soit pour premier exemple, $\varphi(z)=(z-\xi-i\eta)^2$: les coefficients de i dans les racines de l'équation en u, nous conduisent alors au nombre des racines de l'équation proposée $Fz=0$, qui sont renfermées dans l'intérieur d'un rectangle, ayant ses côtés paralleles aux axes coordonnés. Désignons par $\pi(\xi,\eta)$, le nombre des termes positifs, contenus dans les coefficients des carrés après l'évanouissement des rectangles, lorsqu'on opère sur la forme quadratique relative à l'équation en u, l'expression

$$\tfrac{1}{2}\{\pi(\xi,\eta)-\pi(\xi_0,\eta)-\pi(\xi,\eta_0)+\pi(\xi_0,\eta_0)\}$$

représentera précisément le nombre de ces racines qui sont contenues dans le rectangle, ayant pour coordonnées de ses sommets les points: $x=\xi$, $y=\eta$, $x=\xi_0$, $y=\eta$, $x=\xi$, $y=\eta_0$, $x=\xi_0$, $y=\eta_0$. En effet, si l'on représente l'une quelconque des quantités $a, b, \dots k$ par $x+iy$, le coefficient de i dans les racines u, sera: $(x-\xi)(y-\eta)$, donc $\pi(\xi,\eta)$, sera le nombre des quantités x, y, contenues dans les deux angles opposés par le sommet,

ayant les côtés parallèles aux axes coordonnés, et pour l'origine le point $x=\xi$, $y=\eta$, l'un de ces angles ayant ses côtés parallèles aux directions positives des axes. La différence $\pi(\xi,\eta)-\pi(\xi_0,\eta)$ représentera dans l'intérieur des deux parallèles $x=\xi$, $x=\xi_0$, l'excès du nombre des racines, dans lesquelles y est $>\eta$, sur le nombre des racines dans lesquelles y est $<\eta$, si l'on a toutefois $\xi_0<\xi$, et on en conclut de suite la formule ci-dessus, en considérant une nouvelle ordonnée $\eta_0<\eta$, et retranchant les deux différences: $\pi(\xi,\eta)-\pi(\xi_0,\eta)$, $\pi(\xi,\eta_0)-\pi(\xi_0,\eta_0)$.

Si nous prenons en second lieu, $\varphi(z)=Pz^2+Qz+R$, la forme quadratique relative à l'équation en u, donnera le nombre des racines qui sont dans l'intérieur, et le nombre des racines qui sont à l'extérieur d'une hyperbole équilatère, plaçée dans le plan d'une manière quelconque. Enfin nous remarquerons les propositions suivantes:

1°. Soit $\pi(\zeta)$ le nombre des termes positifs contenus dans les coefficients des carrés, pour la forme quadratique relative à l'équation $F(z+i\zeta)=0$, la différence $\pi(\zeta)-\pi(\zeta_0)$ sera le nombre des racines $a, b, \ldots k$, dans lesquelles le coefficient de i est entre les limites ζ, ζ_0.

2°. L'expression semblable $\pi(\zeta)-\pi(\zeta_0)$, relativement à l'équation

$$F(\zeta-iz)=0,$$

donnera le nombre des racines dont les parties réelles sont entre les limites ζ, ζ_0.

3°. Relativement à l'équation $F\left(\zeta\frac{z+i}{z-i}\right)=0$, $\pi(\zeta)$ sera le nombre des racines dont le module est moindre que ζ.

En général on trouvera ce nombre des racines contenues dans l'intérieur de courbes fermées, si la fonction φ est le quotient de deux polynomes du même degré.

5.

La forme quadratique $\Sigma\frac{i\theta^2(a)}{F_0(a)F'(a)}$, composée avec les racines $a, b, \ldots k$ de l'équation $F(z)=0$, où $\theta(a)=x+ay+\cdots+a^{\nu-1}u$, et qui m'a conduit sans aucune considération de continuité aux cas précédents du théorème de Mr. *Caucky*, est susceptible d'une transformation remarquable, par laquelle nous allons retrouver les énoncés mêmes de l'illustre géomètre. Soit:

$$F(z)=pf(z)+p_1f_1(z),\quad F_0(z)=qf(z)+q_1f_1(z),$$

p, p_1, q, q_1, étant des constantes quelconques, telles cependant que les degrés de F et f, soient égaux. Nommons: α, β, ... $\varkappa$, les racines de l'équation $f(z)=0$, et représentons par ω le déterminant $\begin{vmatrix} p_1 & p \\ q_1 & q \end{vmatrix}$: je dis qu'on aura cette équation:

$$\frac{\theta^2(a)}{F_0(a)F'(a)}+\frac{\theta^2(b)}{F_0(b)F'(b)}+\cdots+\frac{\theta^2(k)}{F_0(k)F'(k)}$$
$$=\frac{1}{\omega}\left\{\frac{\theta^2(\alpha)}{f_1(\alpha)f'(\alpha)}+\frac{\theta^2(\beta)}{f_1(\beta)f'(\beta)}+\cdots+\frac{\theta^2(\varkappa)}{f_1(\varkappa)f'(\varkappa)}\right\}.$$

Désignons respectivement par φ et φ' les deux formes

$$\Sigma\frac{\theta^2(a)}{F_0(a)F'(a)},\quad \Sigma\frac{\theta^2(\alpha)}{f_1(\alpha)f'(\alpha)},$$

par $\varDelta$ et $\varDelta'$, leurs Invariants, par χ et χ' leurs formes adjointes. Comme je l'ai remarqué dans une de mes lettres à Mr. *Jacobi* sur la théorie des nombres, les Invariants de χ et χ', seront $\varDelta^{n-1}$, $\varDelta'^{n-1}$, et leurs formes adjointes: $\varDelta^{n-2}\varphi$, et $\varDelta'^{n-2}\varphi'$. Cela posé, et d'après la définition même que j'ai donnée des formes adjointes, les formes, $\frac{\chi}{\varDelta}$, $\frac{\chi'}{\varDelta'}$ sont représentées en vertu du théorème (4.) par les expressions symboliques

$$\frac{F(z')F_0(z)-F(z)F_0(z')}{z'-z_{\mathfrak{s}}}\quad\text{et}\quad\frac{f(z')f_1(z)-f(z)f_1(z')}{z'-z}.$$

Or les relations $F(z)=pf(z)+p_1f_1(z)$, $F_0(z)=qf(z)+q_1f_1(z)$, font voir que la première est le produit de la seconde, multipliée par le déterminant ω. Ainsi, nous avons déjà: $\frac{\chi}{\varDelta}=\omega\frac{\chi'}{\varDelta'}$. De cette équation identique, on conclut d'abord, en égalant les Invariants des deux formes $\frac{\chi}{\varDelta}$, et $\omega\frac{\chi'}{\varDelta'}$:

$$\frac{\varDelta^{n-1}}{\varDelta^n}=\omega^n\frac{\varDelta'^{n-1}}{\varDelta'^n},\quad\text{ou:}\ \varDelta'=\omega^n\varDelta.$$

En égalant ensuite les formes adjointes, il vient:

$$\frac{\varDelta^{n-2}\varphi}{\varDelta^{n-1}}=\omega^{n-1}\frac{\varDelta'^{n-2}\varphi'}{\varDelta'^{n-1}},\quad\text{ou:}\ \frac{\varphi}{\varDelta}=\omega^{n-1}\frac{\varphi'}{\varDelta'},\quad\text{et par suite:}\ \varphi=\frac{1}{\omega}\varphi'.^{*})$$

---

*) Remarquez que $\frac{1}{\varDelta}=A_0^n F_0(a)F_0(b)\dots F_0(k)$; c'est dont la fonction qui provient de l'éliminatien de z entre $Fz=0$, $F_0z=0$. On peut l'obtenir sous forme de déterminant, puisque $\frac{1}{\varDelta}$ est l'Invariant de la forme représentée symmétriquement par $\frac{F(z')F_0z-FzF_0z'}{z'-z}$

Je vais faire usage de ce résultat, en supposant: $F(z) = f(z) + if_1(z)$, $F_0(z) = f(z) - if_1(z)$, f et f_1 étant des fonctions réelles dont la première soit de degré n, condition qu'on peut toujours remplir, en multipliant, si cela est nécessaire, F, par une constante imaginaire. Dans ce cas l'idemité:

$$\varphi = \frac{i\theta^2(a)}{F_0(a)F'(a)} + \frac{i\theta^2(b)}{F_0(b)F'(b)} + \cdots + \frac{i\theta^2(k)}{F_0(k)F'(k)}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\theta^2(\alpha)}{f_1(\alpha)f'(\alpha)} + \frac{\theta^2(\beta)}{f_1(\beta)f'(\beta)} + \cdots + \frac{\theta^2(\varkappa)}{f_1(\varkappa)f'(\varkappa)}\right\},$$

où $\alpha, \beta, \ldots \varkappa$, sont les racines de l'équation réelle $f(z) = 0$, conduit à ces théorèmes:

Nommons pour abréger: π et ν, les nombres de termes positifs et négatifs que présentent les coefficients des carrés de la forme φ, après l'évanouissement des rectangles. D'après mon théorème fondamental, π sera le nombre des racines de l'équation $F(z) = 0$ dont le coefficient de i est positif, et ν, le nombre des ces racines dans lesquelles le coefficient de i est négatif. Or ces deux nombres vont recevoir une acception nouvelle. La variable z, croissant de $-\infty$ à $+\infty$, π sera le nombre de fois où le rapport $\frac{f(z)}{f_1(z)}$ passe en s'évanouissant du positiv au négatif, plus le nombre des couples de racines imaginaires de l'équation $f(z) = 0$, et ν, le nombre de fois où le même rapport, passe en s'évanouissant du négatif au positif, augmenté encore du nombre des couples de racines imaginaires de la même équation.

Supposons en premier lieu les racines, $\alpha, \beta, \ldots \varkappa$, toutes réelles; on pourra faire évanouir les rectangles de φ, par la substitution

$$\frac{\theta(\alpha)}{f'(\alpha)} = X, \quad \frac{\theta(\beta)}{f'(\beta)} = Y, \ldots \quad \frac{\theta(\varkappa)}{f'(\varkappa)} = U,$$

ce qui donnera la transformée:

$$\frac{f'(\alpha)}{f_1(\alpha)}X^2 + \frac{f'(\beta)}{f_1(\beta)}Y^2 + \cdots + \frac{f'(\varkappa)}{f_1(\varkappa)}U^2.$$

Or en s'évanouissant par ex. pour $z = \alpha$, le rapport $\frac{f(z)}{f_1(z)}$, passera pour des valeurs croissantes de la variable, du positif au négatif, ou du négatif au positif, suivant que la quantité $\frac{f'(\alpha)}{f_1(\alpha)}$, sera positive ou négative; ainsi dans ce cas les nombres π et ν, ont bien la signification indiquée.

En second lieu, supposons la présence des racines imaginaires, et soient par exemple, α et β, deux racines conjuguées. Relativement à ces

deux racines on fera:

$$\frac{\theta(\alpha)}{(f_1(\alpha)f'(\alpha))^{\frac{1}{2}}} = X+iY, \quad \frac{\theta(\beta)}{(f_1(\beta)f'(\beta))^{\frac{1}{2}}} = X-iY,$$

ce qui donnera:

$$\frac{\theta^2(\alpha)}{f_1(\alpha)f'(\alpha)}+\frac{\theta^2(\beta)}{f_1(\beta)f'(\beta)} = 2X^2-2Y^2.$$

Ainsi en général (toutes choses égales d'ailleurs) deux racines imaginaires conjuguées, donnent lieu à la différence de deux carrés, lorsqu'on fait évanouir les rectangles par une substitution réelle; ce qui donne bien la signification attribuée aux nombres π et ν. On en conclut que la différence $\pi-\nu$, sera l'excès du nombre de fois où le rapport $\frac{f(z)}{f_1(z)}$ passe en s'évanouissant du positif au négatif, sur le nombre de fois où ce rapport passe en s'évanouissant du négatif au positif. Ce sera donc l'indice intégral $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(z)}{f_1(z)}$, qui représente par suite la différence entre le nombre des racines de l'équation $F(z)=0$, dans lesquelles le coefficient de i est positif, et le nombre de ces racines, pour lesquelles ce coefficient est négatif. Cette remarque, faite déjà par Mr. *Sturm* dans son mémoire sur le théorème de Mr. *Cauchy*, a les conséquences que nous allons indiquer.

6.

Considérons une courbe fermée C, rapportée à des axes rectangulaires, et dont les coordonnées s'expriment par les formules $x=\frac{\varphi(t)}{\chi(t)}$, $y=\frac{\varphi_1(t)}{\chi(t)}$, les fonctions χ, φ, φ_1, étant entières. Je supposerai qu'en faisant croître t depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, on obtienne, en revenant au point de départ, tous les points de cette courbe. Cela étant, j'observe que le théorème de Mr. *Cauchy*, pour un contour quelconque, est évident lorsqu'on l'applique à l'équation $z=0$. Il suffit en effet d'un peu d'attention pour reconnaître qu'en suivant la courbe C, toujours dans le même sens, jusqu'à ce qu'on revienne au point de départ, le rapport $\frac{x}{y}$, passera, en s'évanouissant, autant de fois du positif au négatif que du négatif au positif, si l'origine des coordonnées est dans son *intérieur*. Au contraire, si l'origine se trouve en *dehors*, ce rapport passera en s'évanouissant, deux fois de plus du positif au négatif que du négatif au positif. Cela posé, un simple changement d'origine, en

rapportant la courbe à de nouveaux axes, passant par le point $x=\alpha$, $y=\beta$, permettra d'étendre le théorème de Mr. *Cauchy* à l'équation $z-\alpha-i\beta=0$. De là résulte que nous pouvons immédiatemant déterminer l'indice intégral relatif à toutes les équations imaginaires de la forme

$$\varphi(t)+i\varphi_1(t)-(\alpha+i\beta)\chi(t) = 0;$$

et par suite, l'excès du nombre de leurs racines dans lesquelles le coefficient de i est positif, sur le nombre de leurs racines dans lesquelles ce coefficient est négatif, cet excès étant zéro ou deux, suivant que le point $x=\alpha$, $y=\beta$, est extérieur ou intérieur à la courbe C. Cela posé, faisons dans l'équation proposée $F(z)=0$, $z=\frac{\varphi(t)+i\varphi_1(t)}{\chi(t)}$, en appliquant ce qui précède au résultat de cette substitution dans chacun des facteurs simples, $z-a$, $z-b$, ... $z-k$, de $F(z)$, on arrive à cette proposition:

L'excès du nombre des racines de l'équation $F\left(\frac{\varphi(t)+i\varphi_1(t)}{\chi(t)}\right)=0$, dans lesquelles le coefficient de i est positif, sur le nombre de ces racines dans lesquelles ce coefficient est négatif, est égal à deux fois le nombre des racines a, b, ... k, de l'équation $F(z)=0$, qui sont renfermées dans l'intérieur de la courbe C. Ainsi en désignant par μ ce nombre, et en nommant P et N, le nombre des termes positifs et négatifs qui se présentent dans la forme quadratique relative à l'équation en t, lorsqu'on a fait évanouir les rectangles, on aura la relation: $\mu=\frac{1}{4}(P-N)$.

Voilà où je me suis arrêté dans l'étude de cette découverte si belle et si grande de Mr. *Cauchy*. J'ai été amené à cette étude en grande partie par des recherches sur des questions arithmétiques, qui depuis l'année 1847, ont appelé mon attention sur les formes quadratiques, composées d'une somme de carrés de fonctions semblables des racines d'une même équation. Aussi ais-je éprouvé une véritable satisfaction à rattacher à la considération de ces formes, ces magnifiques théorèmes de Mr. *Sturm* et Mr. *Cauchy*, qui ouvrent l'ère nouvelle de l'algèbre moderne. Sous ce nouveau point de vue d'ailleurs, le fait de l'existence d'une infinité de systèmes de fonctions jouissant des mêmes propriétés pour la détermination des nombre des racines réelles ou imaginaires, qui sont comprises entre des limites données, se présente dès les premiers pas et d'une manière qui en fait mieux saisir le caractère et l'importance.

Parmi les formes variées dont le théorème de Mr. *Sturm* est ainsi susceptible, la suivante me semble la plus simple. Soit l'équation proposée: $f(z) = 0$; nommons f_1 la dérivée de f, et désignons, comme précédemment, par $\pi(\zeta)$ le nombre des termes positifs de la forme quadratique qui a pour expression symbolique $\frac{(z-\zeta)f(z')f_1(z)-(z'-\zeta)f(z)f_1(z')}{z'-z)}$, lorsqu'on a fait évanouir les rectangles, le nombre des racines réelles comprises entre deux limites ζ et ζ_0, sera: $\pi(\zeta) - \pi(\zeta_0)$.

Une analyse particulière m'a donné pour la détermination du nombre total des racines réelles et imaginaires, cet autre théorème. Soit, sous forme homogène, $u = f(x, y)$ le premier membre de l'équation proposée, du degré n. Posons: $u_0 = f(x_0, y_0)$ et considérons l'expression

$$\frac{1}{xy_0 - x_0 y}\left(\frac{du}{dx}\cdot\frac{du_0}{dy_0} - \frac{du}{dy}\cdot\frac{du_0}{dx_0}\right).$$

En remplaçant, la division faite, x_0^{n-2}, $x_0^{n-3}y_0$, ... $x_0 y_0^{n-3}$, y_0^{n-2} d'une part, et de l'autre x^{n-2}, $x^{n-3}y$, ... xy^{n-3}, y^{n-2}, respectivement par X, Y, ... V, on obtiendra une forme quadratique (u); et relativement à cette forme, la quantité désignée précédemment par $\pi - \nu$, sera le nombre total des racines réelles de l'équation $u = 0$, moins une unité.

Soit u' ce que devient u par la substitution

$$x = \lambda x' + \mu y', \quad y = \lambda_0 x' + \mu_0 y':$$

les deux formes quadratiques (u) et (u') seront équivalentes, et si l'on nomme X', Y', ... V', les indéterminées de (u'), la substitution pour passer de l'une à l'autre, s'obtiendra par l'identité suivante:

$$(X, Y, \dots V)(x, y)^{n-2} = (X', Y', \dots V)(\lambda x + \lambda_0 y, \mu x + \mu_0 y)^{n-2},$$

où, d'après l'excellente notation de Mr. *Cayley*,

$$(X, Y, \dots V)(x, y)^{n-2} = Xx^{n-2} + \frac{n-2}{1} Yx^{n-3}y + \dots + Vy^{n-2}.$$

Hyères, 28 Janvier 1854.

4.

Zur Theorie des *Foucault*'schen Pendelversuchs.

(Aus dem Programm der Realschule zu Lippstadt von 1855.)

(Von Herrn Dr. *Lottner*, Lehrer der Math. und Physik an der höhern Bürgerschule zu Lippstadt.)

In den meisten populären Handbüchern der Physik, z. B. im Lehrbuche von *Joh. Müller*, findet sich das angenommene Gesetz der Drehung der Schwingungs-Ebene eines einfachen Pendels auf eine Weise ausgesprochen, als sei dasselbe *stets* vollkommen richtig. Auch die populären geometrischen Erklärungen und sinnreichen mechanischen Vorrichtungen, um Nicht-Mathematikern durch dieses merkwürdige Experiment eine Bestätigung der Umdrehung der Erde vor die Augen zu führen, beruhen alle auf der Annahme, *dafs die scheinbare Drehung der Schwingungs-Ebene gleich der Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde, multiplicirt mit dem Sinus der geographischen Breite sei.* Es scheint nicht uninteressant, den Gegenstand genauer zu prüfen, um zu zeigen, innerhalb welcher *Gränzen* das ausgesprochene Gesetz gilt, und welche Gröfsen dabei vernachlässigt werden.

Es sei Fig. 1. (Taf. I.) der Mittelpunct der Erde; AB der Meridian, in welchem das Pendel seine erste Schwingung vollendet; AC die Lage von AB nach t Secunden, D der Ort des schweren Puncts des Pendels zur Zeit t; r der Erdradius, BMC die Ebene des Aequators: $DF=z$, $MG=x$, $FG=y$; x_0, y_0, z_0 seien die entsprechenden Coordinaten des Anhängepuncts P; ω die Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde; b die geographische Breite $=PMB$.

Auf den Punct D wirken zwei Kräfte: die Schwerkraft g in der Richtung DM, und die Spannung des Fadens $PD=\lambda$; beide werden durch die Centrifugalkraft modificirt. Man zerlege diese Kräfte nach den Coordinaten-Axen. Wenn $DM=\varrho$ gesetzt wird, so sind die Cosinus der Winkel, welche g oder DM mit den Axen macht:

$$\frac{x}{\varrho},\quad \frac{y}{\varrho},\quad \frac{z}{\varrho};$$

ferner die Cosinus derjenigen, die $DP=1$ mit denselben einschliefst:

$$\frac{x_0-x}{1},\quad \frac{y_0-y}{1},\quad \frac{z_0-z}{1}.$$

Es haben also die Differentialgleichungen, welche alle Umstände der Bewegung ausdrücken, folgende Gestalt:

$$(1.)\quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{gx}{\varrho} - \frac{\lambda(x-x_0)}{1}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{gy}{\varrho} - \frac{\lambda(y-y_0)}{1}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{gz}{\varrho} - \frac{\lambda(z-z_0)}{1}. \end{cases}$$

Die Coordinaten x_0, y_0, z_0 lassen sich wie folgt, ausdrücken:

$$(2.)\quad \begin{cases} x_0 = (r+1)\cos b\cos\omega t, \\ y_0 = (r+1)\cos b\sin\omega t, \\ z_0 = (r+1)\sin b. \end{cases}$$

Multiplicirt man die Gleichungen (1.) der Reihe nach mit $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, und addirt, so erhält man:

$$(3.)\quad \frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}$$

$$= -\frac{g}{\varrho}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\right) - \frac{\lambda}{1}\left[(x-x_0)\frac{dx}{dt} + (y-y_0)\frac{dy}{dt} + (z-z_0)\frac{dz}{dt}\right].$$

Aufserdem ist

$$\omega\left(y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -\omega\frac{\lambda}{1}(yx_0 - xy_0).$$

Da aber, in Folge der Gleichung (2.),

$$\frac{dx_0}{dt} = -\omega y_0, \quad \frac{dy_0}{dt} = \omega x_0$$

ist, so kann man dafür

$$\omega\left(y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -\frac{\lambda}{1}\left(y\frac{dy_0}{dt} + x\frac{dx_0}{dt}\right) = \frac{\lambda}{1}\left((x-x_0)\frac{dx_0}{dt} + (y-y_0)\frac{dy_0}{dt}\right)$$

schreiben. Addirt man diese Gleichung zu (3.), so ergiebt sich:

$$(4.)\quad \frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} + \omega\left(y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

$$= -\frac{g}{\varrho}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\right)$$

$$-\frac{\lambda}{1}\left[(x-x_0)\frac{d(x-x_0)}{dt} + (y-y_0)\frac{d(y-y_0)}{dt} + (z-z_0)\frac{d(z-z_0)}{dt}\right].$$

Die Gröfse ϱ läfst sich ohne erheblichen Fehler als constant betrachten; der Ausdruck in der eckigen Klammer ist das vollständige Differential von

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = 1^2;$$

mithin der Null gleich. Man erhält also folgendes Integral der Gleichung (4.)

$$(5.)\quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2+2\omega\left(y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}\right) = C-\frac{g}{\varrho}(x^2+y^2+z^2).$$

Um nun eine genauere Einsicht in die Bewegung des Pendels zu erlangen, verlege man den Anfangspunct der Coordinaten in den Aufhängepunct. Die neuen Coordinaten mögen ξ, η, ζ sein; die Ebene ξ, η sei die des Horizonts, die η mögen in der Ebene des Meridians des Beobachtungs-Ortes, die ξ senkrecht darauf, die ζ in der Richtung der Schwere gezählt werden. Das neue System findet sich aus dem alten, wenn man die x-Axe um den Winkel ωt, die y-Axe um den Winkel b dreht und den Anfangspunct um die Gröfse $r+1$ verschiebt. Dann erhält man, nach bekannten Formeln der analytischen Geometrie:

$$(6.)\quad \begin{cases} \xi = x\sin\omega t - y\cos\omega t, \\ \eta = x\cos\omega t\sin b + y\sin\omega t\sin b - z\cos b, \\ \zeta = -x\cos\omega t\cos b - y\sin\omega t\cos b - z\sin b + r + 1, \\ x = (r+1)\cos b\cos\omega t + \xi\sin\omega t + \eta\cos\omega t\sin b - \zeta\cos\omega t\cos b, \\ y = (r+1)\cos b\sin\omega t - \xi\cos\omega t + \eta\sin\omega t\sin b - \zeta\sin\omega t\cos b, \\ z = (r+1)\sin b \qquad -\eta\cos b \qquad -\zeta\sin b, \end{cases}$$

Die Differentiation dieser Gleichungen nach t giebt, wenn die Differentialquotienten mit Accenten bezeichnet werden:

$$(7.)\quad \begin{cases} \xi' = x'\sin\omega t - y'\cos\omega t + \omega(x\cos\omega t + y\sin\omega t), \\ \eta' = (x'\cos\omega + y'\sin\omega t)\sin b - z'\cos b - \omega\sin b\xi, \\ \zeta' = (x'\cos\omega t + y'\sin\omega t)\cos b - z'\sin b + \omega\cos b\xi, \\ \xi'' = x''\sin\omega t + y''\cos\omega t + 2\omega(x'\cos\omega t + y'\sin\omega t) - \omega^2\xi, \\ \eta'' = (x''\cos\omega t + y''\sin\omega t)\sin b - z''\cos b \\ \qquad\qquad - \omega\sin b(x'\sin\omega t - y'\cos\omega t) - \omega\sin b\xi', \\ \varphi'' = (x''\cos\omega t + y''\sin\omega t)\cos b - z''\sin b \\ \qquad\qquad + \omega\cos b(x'\sin\omega t - y'\cos\omega t) + \omega\cos b\xi'. \end{cases}$$

Die Summen in den Klammern lassen sich ebenfalls durch die neuen Coordinaten wie folgt ausdrücken:

$$x'\cos\omega t + y'\sin\omega t = \eta'\sin b - \zeta'\cos b + \omega\xi,$$
$$x'\sin\omega t - y'\cos\omega t = \xi' - \omega[(r+1)\cos b + \eta\sin b - \zeta\cos b].$$

Durch Substitution in (7.) findet sich:

$$(8.)\quad \begin{cases} \xi'' = x''\sin\omega t - y''\cos\omega t + 2\omega(\eta'\sin b - \zeta'\cos b) + \omega^2\xi, \\ \eta'' = (x''\cos\omega t + y''\sin\omega t)\sin b - z''\cos b - 2\omega\sin b\,\xi' \\ \qquad\qquad + \omega^2\sin b[(r+1)\cos b + \eta\sin b - \zeta\cos b], \\ \zeta'' = -(x''\cos\omega t + y''\sin\omega t)\cos b - z''\sin b + 2\omega\cos b\,\xi' \\ \qquad\qquad - \omega^2\cos b[(r+1)\cos b + \eta\sin b - \zeta\cos b]. \end{cases}$$

Es sind nun in die vorstehenden Gleichungen die durch (1.) gegebenen Werthe von x'', y'', z'' zu setzen. Zur Abkürzung schreibe man bei dieser Rechnung statt $\frac{g}{\varrho} + \frac{\lambda}{1}$ den Buchstaben μ. Es wird sich auch, ohne erheblichen Fehler der Bruch $\frac{r+1}{\varrho}$ der Einheit gleich setzen lassen, da der Erdradius die Pendellänge bei Weitem übertrifft. Die Gröfse

$$(r+1)\cos b + \eta\sin b - \zeta\cos b$$

drückt die Coordinate x zur Zeit $t = 0$ aus und werde deshalb kurz durch $x^{(0)}$ bezeichnet. So ergeben sich, nach einigen leichten Reductionen, folgende Differentialgleichungen des Problems in den Coordinaten des Beobachtungs-Ortes:

$$(9.)\quad \begin{cases} \xi'' = -\mu\xi + 2\omega(\eta'\sin b - \zeta'\cos b) + \omega^2\xi, \\ \eta'' = -\mu\eta - 2\omega\sin b\,\xi' + \omega^2\sin b\,x^{(0)}, \\ \zeta'' = -\mu\zeta + g + 2\omega\cos b\,\xi' - \omega^2\cos b\,x^{(0)}, \end{cases}$$

welche, wenn $\omega = 0$ gesetzt wird, vollkommen mit denen des ***Kegelpendels*** übereinstimmen.

Es findet sich leicht ein Integral, welches der Gleichung (5.) entspricht, nämlich:

$$(10.)\quad \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = C + 2g\zeta + \omega^2(\xi^2 + x^{(0)2}).$$

In der Gröfse $x^{(0)} = r\cos b + (1-\zeta)\cos b + \eta\sin b$ überwiegt das erste Glied. Vernachlässigt man auch ξ dagegen, so zeigt sich, dafs das Quadrat der Geschwindigkeit des schwingenden Punctes gleich ist dem Quadrate derjenigen Geschwindigkeit, die derselbe haben würde, wenn die Erde sich nicht drehte, vermehrt um das Quadrat der an dem Beobachtungs-Orte Statt findenden Umdrehungsgeschwindigkeit, d. h.

$$(11.)\quad v^2 = C + 2g\zeta + \omega^2 r^2\cos^2 b.$$

Um nun das Gesetz der Drehung der Schwingungs-Ebene zu erfahren, multiplicire man die erste der Gleichungen (9.) mit η, die zweite mit ξ, und subtrahire. Dies giebt:

$$(12.)\quad \eta\xi''-\xi\eta''=d\frac{(\eta\xi'-\xi\eta')}{dt}=2\omega\sin b(\eta\eta'+\xi\xi')-2\omega\eta\zeta'\cos b-\omega^2\cos b\xi z.$$

Man führe jetzt Polarcoordinaten ein. Es sei (Fig. II.) P der Aufhängepunct, $AB=1-\zeta$, $OC=\eta$, $BC=\xi$. $OB=a$, der Drehungswinkel $COB=\varphi$, $OPA=\vartheta$. Dann ist $\eta=a\cos\varphi$, $\xi=a\sin\varphi$, $\zeta=1\cos\vartheta$, $a=1\sin\vartheta$.

Nach diesen Substitutionen verwandelt sich (12.) in

$$(13.)\quad \frac{da^2\varphi'}{dt}=\omega\sin b\frac{da^2}{dt}-2\omega\eta\zeta'\cos b-\omega^2\cos b\xi z.$$

Die Gröfse ζ', welche die Componente der Geschwindigkeit des materiellen Puncts nach aufwärts ausdrückt, läfst sich unbedenklich vernachlässigen, wenn das Pendel nur eine einigermafsen beträchtliche Länge hat. Man sieht hieraus auch den Grund, warum der Versuch mit einem kurzen Pendel nicht gelingen würde.

Wir betrachten zunächst die beiden Fälle, wenn $b=90^0$ und $b=0^0$ ist.

1) Im ersten Fall erhält man:

$$a^2\varphi'=\omega a^2+C.$$

Die Constante verschwindet, weil φ' beim Anfange der Bewegung schon gleich ω ist; es folgt daraus $\varphi=\omega t$. *Das Gesetz ist also für den Pol*, da auch das vernachlässigte Glied $2\omega\eta\zeta'\cos b$ von selbst verschwindet, *strenge richtig.*

2) Im zweiten Fall ergiebt sich:

$$\frac{da^2\varphi'}{dt}=\omega^2\xi\eta.$$

φ' ist im Anfange der Bewegung hier der Null gleich. Wird also $\omega^2\xi\eta$ weggelassen, so ist φ' für ein beliebiges t immer Null, d. h. das Pendel verändert seine Schwingungs-Ebene durchaus nicht. *Am Aequator ist also das Gesetz nur dann gültig, wenn die verticale Geschwindigkeit und das Quadrat der Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde in der Entfernung 1, multiplicirt mit dem Producte der beiden Coordinaten in der horizontalen Ebene vernachlässigt wird.*

3) Um für die übrigen Fälle die Gröfse des Fehlers zu schätzen, nehme man an, dafs $x = r\sin b - \eta\cos b + (1-\zeta)\sin b$ sehr wenig von $r\sin b$ verschieden sei. Dann erhält man:

$$(14.)\qquad \varphi' = \omega\sin b - \frac{\omega^2 r\cos b\sin b}{a^2}\int \xi dt.$$

φ' drückt die Geschwindigkeit in der Drehung der Schwingungs-Ebene aus; die Gleichförmigkeit derselben wird durch das Glied $-\frac{\omega^2 r\cos b\sin b}{a^2}\int \xi dt$ gestört. Man berechne die Änderung dieser Geschwindigkeit nach einem vollen Pendelschlage. Zu dem Ende sei T die Zeit, in welcher derselbe vollführt wird; nach Verlauf derselben sei $\varphi' + \varDelta\varphi'$ aus φ' geworden, die Gröfse $a = 1\sin\vartheta$ wird denselben Werth wie zu Anfang der Schwingung wieder erlangt haben. Es ist also

$$(15.)\qquad \varDelta\varphi' = -\frac{\omega^2 r\cos b\sin b}{1^2\sin^2\vartheta_0}\int_t^{t+T} \xi dt.$$

Das Integral $\int_t^{t_0+T}\xi dt$ drückt den Flächen-Inhalt der Curve aus, deren Abscissen t und deren Ordinaten ξ sind. ξ wird, wenn t zwischen t_0 und $t_0 + \frac{1}{2}T$ sich bewegt, bis *Null* abnehmen, alsdann zwischen $t_0 + \frac{1}{2}T$ und $t_0 + T$ *negativ* werden und beinahe seine frühere Gröfse wieder erreichen; wie es (Fig. III.) zeigt. Das Integral wird sich also wenig von der Differenz der beiden Dreiecke ABC und CED unterscheiden. Dieselbe ist $-\frac{1}{4}T\varDelta\xi 0$ oder gleich $-\frac{1}{4}T\varDelta.1\sin\vartheta_0\sin\varphi = -\frac{1}{4}T 1\sin\vartheta_0\cos\varphi\varDelta\varphi_0$. Durch Substitution dieses Werths in (15.) erhält man:

$$(16.)\qquad \frac{\varDelta\varphi'}{\varDelta\varphi} = \pm\frac{\frac{1}{4}\omega^2 r\cos b\sin b T\cos\varphi}{l\sin\vartheta_0}.$$

Die Gröfse $\omega^2 r\cos b\sin b$ ist, wie leicht zu sehen, die Centrifugalkraft am Beobachtungs-Orte, projicirt auf den Horizont. Es läfst sich also zum Schlusse, das Resultat der Untersuchung in folgender Form ausdrücken:

Die Änderung in der Geschwindigkeit der Drehung der Schwingungs-Ebene während einer vollen Pendelschwingung (die nach dem gewöhnlichen Ausdrucke des Gesetzes Null wäre), *verhält sich zur Änderung des Drehungswinkels während dieser Zeit, wie sich der vierte Theil der an dem Beobachtungs-Orte Statt habenden, auf den Horizont projicirten Centifugalkraft, multiplicirt mit dem Producte der Dauer der Schwingung in den Cosinus des Drehungswinkels, zur halben Länge des Pendel-Ausschlages verhält.*

Übrigens ist, für eine nicht allzu genaue Beobachtung, diese Correction von geringer Bedeutung; theils wegen ihrer Kleinheit, theils weil sie in Folge des Factors $\cos\varphi$ ihre Zeichen ändert und sich deshalb die Fehler während eines Tages compensiren. Am gröfsten ist sie unter der Breite von 45°, zu Anfang der Bewegung.

Zum Beleg der Rechnung will ich ein numerisches Beispiel hinzufügen. Bei einem 30 Fufs langen Pendel, das unter einem Ausschlagswinkel von 4 Graden in 45° geogr. Breite schwingt, ist

$$T = 3{,}07812 \text{ Secunden,}$$
$$\tfrac{1}{4}\omega^2 r \cos 45^0 \sin 45^0 = 0{,}01364 \text{ Fufs,}$$
$$30 \sin 4^0 = 2{,}09269 \text{ Fufs,}$$

also

$$\Delta\varphi' = \pm 0{,}020069 \cos\varphi\Delta\varphi.$$

Daraus folgt, dafs für $\varphi = 0^0$:

$$\varphi' = 5''.\sin 45^0 + 0{,}020069.3{,}07812.15'' \quad \text{ist.}$$

Während also die Geschwindigkeit der scheinbaren Drehung, *ohne* die angeführte Correction, 10,6066 Bogensecunden in einer Zeitsecunde betragen würde, würde sie, *mit* Berücksichtigung derselben, die Gröfse von 11,5333 Bogensecunden haben.

Lippstadt, im März 1855.

5.

Die Arithmetik der Chinesen. *)

(Von Herrn Dr. *K. L. Biernatzki,* zu Berlin.)

Es ist unbestritten, dafs der Compafs und die Buchdruckerkunst, zwei Erfindungen, welche einen unberechenbaren Einflufs auf die modernere Civilisation des Abendlandes ausübten, den Chinesen eher bekannt waren, als den Völkern in Europa. Aber nicht so leicht wird man einräumen wollen, dafs die Söhne *Han's* auch in Bezug auf abstracte Wissenschaften in mancher Hinsicht vor den Culturvölkern der Gegenwart einen Vorgang hatten, und dafs ihre Weisen, früher als unsere Gelehrten, Probleme löseten, die man allein unter uns zur Sprache gekommen und erledigt glaubt. Dennoch verhält es sich so. Das in mehr als einer Hinsicht merkwürdige Volk der Chinesen, welches, sammt seinem Nachbar, dem Japanesischen, das älteste Culturvolk auf Erden ist, hat zu einer Zeit, wo über das Abendland noch die Schatten geistiger Finsternifs ausgebreitet lagen, bereits in den Wissenschaften, die es allein mit dem Gedanken und Gedachten zu thun haben, Resultate zu Tage gefördert, und Fortschritte gemacht, die ihm das Recht auf Ebenbürtigkeit in dieser Beziehung mit jedem andern civilisirten Volke sichern. Erst den neuesten Forschungen über China verdanken wir diese Kunde und Einsicht; und wenn wir hier nachzuweisen versuchen, wie die Chinesen schon eine fertige Wissenschaft der *Arithmetik* besafsen, als im Abendlande dafür noch kaum die ersten Grundregeln gefunden waren, so sprechen wir damit die Erwartung aus, dafs eine nähere Bekanntschaft mit der mehr als tausendjährigen Weisheit jenes Volks auch für andere Wissenschaften wahrscheinlich dieselben Ergebnisse gewähren wird.

Bekanntlich gewannen zu Anfang des siebzehnten Jahrhunderts römische Missionare Eingang und Einflufs am kaiserlichen Hofe zu *Peking;* und bei Gelegenheit des nach der Mitte desselben Jahrhunderts erfolgten Thronwechsels

---

*) Als Hauptquelle hat dem Verfasser ein Aufsatz im „Shanghae Almanac for 1853 and Miscellany, printed Shanghae," welcher überschrieben ist: Jottings on the science of chinese arithmetic, gedient.

ward dieser Einflufs zu einem fast alle Verhältnisse beherrschenden, und ward für lange Zeit dauernd befestigt. Während der Regierung des ersten Tartarenkaisers wirkte der unermüdliche und unerschrockene Missionar *Schaal* unter den Chinesen. Unter dem nachfolgenden Kaiser *Kanghi,* der sich während einer 61jährigen langen Regierung als warmer Freund der römischen Missionare bewies, kam *Ferdinand Verbiest* nach China, den der Kaiser alsbald zum Präsidenten des Collegiums für Astronomie ernannte. Der Vorgänger dieser beiden berühmten Jesuiten war *Ricci,* welcher 1611 starb, und zuerst dem Einflusse abendländischer Wissenschaft am kaiserlichen Hofe Bahn gebrochen hatte. Unsere Aufgabe ist es nicht, auf die Arbeiten dieser Männer näher einzugehen; wir gedenken ihrer nur, um darauf hinzuweisen, dafs durch sie die vorhandenen wissenschaftlichen Kenntnisse der Chinesen wesentlich bereichert und berichtigt wurden. Allein so viel Gewicht man auch auf diesen Umstand legen mag, wäre es doch unrichtig, anzunehmen, die Wissenschaften der Chinesen hätten überhaupt keinen selbstständigen, von fremden Einflüssen unabhängigen Entwicklungsgang genommen, und was Wahres an ihnen, verdankten sie allein den Europäern. So ist es nicht; und Dies, an der einen Wissenschaft wenigstens, der *Arithmetik,* durch Thatsachen nachzuweisen, dazu werden die nachstehenden, wahrscheinlich noch ziemlich unbekannten Mittheilungen, auf Grundlage ursprünglich chinesischer Quellen, dienen.

Der hochbegabte und in vielen Wissenschaften persönlich gründlich erfahrene Kaiser *Kanghi* zog nicht allein *fremde* Gelehrte, wie die oben genannten, sondern auch Männer von Geist unter den *Chinesen,* aus den entferntesten Theilen seines Reichs an seinen Hof, und machte es ihnen durch die Freigebigkeit, mit der er für ihren Unterhalt sorgte, möglich, sich ganz ihren Studien hinzugeben. Unter diesen befand sich Einer, Namens *Mei-Wuh-gan* aus *Hwuy-tschau:* ein Mann, der nicht nach Ansehen und Ehre geizte, der sogar nicht einmal ein Anhänger der neuen *Mandschu*-Dynastie, im Gegentheil, der alten *Ming*-Dynastie war, ein Patriot im eigentlichen Sinne; weshalb er während seines langen Lebens die Annahme eines öffentlichen Amtes standhaft verweigerte; jedoch ohne dadurch in der Gunst des Kaisers zu verlieren. Dieser zog ihn vielmehr häufig zu Rathe, unterhielt sich oft mit ihm über wissenschaftliche Gegenstände, und beförderte aus allen Kräften seine der Weisheit der Altvordern gewidmeten Studien.

Mit grofsem Eifer hatte *Mei* bereits die Werke der älteren chinesischen Gelehrten durchforscht und sich mit ihrem Inhalt gründlich bekannt gemacht;

als er nun auch den Schriften der Fremden, welche die Jesuiten den Chinesen zugänglich gemacht hatten, seine Aufmerksamkeit widmete. Im Gegensatz mit der damals bei Hofe herrschenden und besonders von dem Kaiser selbst vertretenen Ansicht, gelangte er dadurch zu der Überzeugung, dafs man die wissenschaftlichen Verdienste der Europäer überschätze, dagegen die alte chinesische Weisheit und deren Ergebnisse vernachlässigt habe. Er behauptete, dafs von den durch die Fremden neu eingeführten Theorien, die bei weitem gröfste Mehrzahl bereits den Chinesen Jahrhunderte früher bekannt gewesen seien, und Dies nur aus Unkunde mit der heimischen Literatur übersehen worden sei. Diese anfangs das Erstaunen seiner gelehrten Zeitgenossen erregende Behauptung suchte er durch eine reiche Sammlung von Citaten aus altchinesischen Werken, welche er zusammenstellte, thatsächlich zu belegen; und diese Enthüllung, nachdem sie mehr und mehr als richtig anerkannt worden, wurde wahrscheinlich mit die Ursach, dafs die fremden Gelehrten nachmals in der Gunst des Kaisers nicht mehr die erste Stelle einnahmen; wie früher. Dies erhellet zur Genüge aus einem vom Kaiser und seinen vornehmsten Rathgebern verfafsten mathematischen Werke, unter dem Titel: *Leuh leih yuen yuen* (Näheres über dieses Werk weiter unten)., bei dessen Herausgabe namentlich *Mei* sich emsig betheiligte.

In einem der ersten einleitenden Abschnitte dieses Buchs wird, nachdem die Verdienste von *Ricci, Schaal, Verbiest* und andrer Europäer gebührend anerkannt worden, die Frage aufgeworfen: woher stammten aber diese Kenntnisse der Fremden? und die Antwort war: sie hatten ihren Ursprung im *Lande der Mitte* und wurden nachmals über dessen Grenzen hinaus verbreitet. Die geringen Kenntnisse über die Himmels-Erscheinungen, wie man sie zur Zeit der früheren Kaiser besafs, sind dafür Zeugnifs; und dafs Weniges von Dem, was damals niedergeschrieben wurde, auf die Nachwelt gekommen ist, hat darin seinen Grund, dafs die meisten solcher Schriften (zweihundert Jahre vor der christlichen Zeitrechnung) durch den *zweiten* Kaiser der *Tsin*-Dynastie, Namens *Tschin Vang* oder *Tsin tschi Hoangti* verbrannt wurden. (Der *erste* Kaiser der *Tsin*-Dynastie war *Tschuang siang Vang,* der 90ste Kaiser von China. Da er aber nur drei Monate regierte und sein Nachfolger, der oben genannte *Hoangti,* die Herrschaft der *Tsin*-Dynastie erst befestigte, so wird dieser häufig als der *erste* dieser Dynastie angeführt. *Philipp von Macedonien, Hannibal* und *Antiochus* der Gr., König von *Syrien,* waren seine Zeitgenossen.) Jener zweite Kaiser nämlich liefs sämmtliche

alten chinesischen Schriftwerke deshalb dem Feuer überantworten, damit, wie sein Premierminister sich ausdrückte, „der Geschmack der Alten nicht über die neuern Einrichtungen ein Verdammungs-Urtheil sprechen oder gar die Politik des Kaisers tadeln solle." Glücklicherweise aber übte damals bereits die chinesische Cultur einen nachhaltigen Einflufs über die gesammte bewohnte Erde, so dafs die Schriften chinesischer Gelehrten schon in fremde Sprachen übersetzt worden waren, ehe sie verbrannt wurden. So ist es gekommen, dafs die Fremden allein im Besitz dieser Kenntnisse zu sein scheinen, die doch ursprünglich Eigenthum der Chinesen sind. Und auf *solche* Weise wird in jenem Buche des Kaisers *Kanghi* nachgewiesen, wie alle Wissenschaft im Reich der Mitte ihre Geburtsstätte habe.

In der That möchte man lächeln über derartige Deductionen, und sie für einen neuen Beweis chinesischen Eigendünkels ansehen, welcher allerdings eine hervorragende Eigenschaft des Volkscharacters ist. Allein eine genauere Erforschung der wirklich vorhandenen Schätze chinesischer Weisheit läfst keinen Zweifel, dafs, abgesehen von der Richtigkeit oder Unrichtigkeit der obigen Beweisführung, die Chinesen doch schon in einer sehr frühen Zeit eine nicht gewöhnliche Kenntnifs, insbesondere *mathematischer* Wissenschaften, besafsen. Käme es blofs darauf an, den Inhalt der gegenwärtigen Kunde der Arithmetik unter den Chinesen nachzuweisen, so würde es genügen, einige ihrer Werke der Neuzeit anzuführen. Aber da es ausgemacht ist, dafs sie Manches sowohl den *Jesuiten*, als auch den *Arabern* verdanken, mit welchen letzteren sie zur Zeit der *Yuen*-Dynastie in lebhaftem Verkehr standen, so mufs man eine Einsicht in ihre hierhergehörenden Kenntnisse während einer noch früheren Zeit zu gewinnen suchen; und dazu stehen genügende Mittel zu Gebote.

Einer gründlichen Bekanntschaft mit den *Zahlen*, deren Werth, Zusammenhang und Bedeutung, begegnen wir zuerst in dem Buche *Tung-kin-kang-muh*, d. h. Allgemeine Geschichte von China, in welchem gesagt wird, dafs unter der Regierung von *Hwang-ti*, dieser Kaiser seinem Minister *Lischau* aufgetragen habe, das *Kiu tschang*, d. h. die neun arithmetischen Sectionen, abzufassen. Es werden diesem Kaiser auch viele Verbesserungen im Gebiete der Naturwissenschaften zugeschrieben; unter andern die Erfindung des *Cyclus von 60 Jahren;* und obgleich nicht Alles, was von ihm gesagt wird, verbürgt werden kann, da wohl kaum das Gedächtnifs der Geschichte bis in eine so frühe Zeit hinaufreicht, so ist es doch bemerkenswerth, dafs die

gegenwärtig gebräuchliche chronologische Aera der Cyclen vom 61ten Jahre jenes Kaisers datirt, d. h. vom Jahre 2637 *vor* Chr. Geb.

Die gedachten neun arithmetischen Sectionen aber bilden den eigentlichen Kern und das Fundament der Wissenschaft der Arithmetik, man darf vielleicht sagen der gesammten mathematischen Wissenschaft der Chinesen. Es läfst sich zwar nicht mit Sicherheit nachweisen, dafs ihr Verfasser den ganzen Inhalt dieser Sectionen vollständig begriffen habe (was vielmehr zu bezweifeln ist); auch bleibt es unentschieden, ob das Werk wirklich aus einer *so frühen* Zeit stamme: sicher aber ist, dafs es aus einer der Gegenwart *sehr* fern liegenden Periode datirt; denn in fast allen nachfolgenden arithmethischen Werken der Chinesen wird seiner, als der ersten Grundlage der *Wissenschaft des Rechnens* gedacht.

Dreihundert Jahre später, 2300 v. Chr. Geb., erfreuten sich die mathematischen Wissenschaften sorgsamer Pflege durch den Kaiser *Yaou* und haben unverkennbar bis zu dieser Zeit einen bedeutenden Fortschritt gemacht. Man erfährt aus dem *Schu-king,* dafs dieser Fürst ein Collegium von Astronomen einsetzte, um die nöthigen *Zeitrechnungen* zu machen und einen *Kalender* abzufassen. Diese Gelehrten gaben zugleich eine Übersicht der Bewegungen der Himmelskörper; sie berechneten die Solstitien und Aequinoctien und die Länge des Sonnenjahres (unseres bürgerlichen Jahres), mit dem nur sehr geringen Fehler von einer einzigen Stunde: ein Beweis, wieviel Fleifs und Mühe man schon damals auf die Wissenschaft der *Zahlen* verwandte.

Nach diesen, durch unzweifelhafte chinesische Autoritäten wohlverbürgten Mittheilungen, bei welchen wir angeblich die bis zu *Fohi,* 3000 Jahre vor Ch. Geb. hinaufreichenden astronomischen Beobachtungen absichtlich unerwähnt liefsen, weil Das, was man darüber gesagt hat, bis jetzt wenigstens nicht mit historisch unzweifelhaften Zeugnissen belegt werden kann, darf man die Chinesen als dasjenige Volk bezeichnen, welches auf den Ruhm die Astronomie erfunden zu haben, ein *Anrecht* hat. Denn die freilich von Alters her wiederholte Behauptung, als hätten bereits im Jahre 3300 vor Christo die *Egypter* richtige Himmelsbeobachtungen gemacht und darauf eine Reihe von astronomischen Berechnungen ausgeführt, ist noch immer nur als Vermuthung anzusehen und, nachdem die Untersuchungen über die bekannten Thierkreisbilder zu *Dendérah* für diese eher ein jüngeres, als ein hohes Zeitalter festgestellt haben, ist jene Vermuthung eher zweifelhaft, als glaubhaft. Eine Kunde von Astronomie, sei diese auch noch so gering, läfst sich ohne Be-

kanntschaft mit dem Zusammenhange der *Zahlen* unter einander nicht denken; diese mufs nothwendig der ersteren vorausgehen. Und dafs die Chinesen in sehr früher Zeit zu *rechnen* verstanden, überhaupt den Grundbegriff der Zahlen, der Gröfse, in bestimmter mathematischer Gestalt, kannten und denselben auf die vorhandenen Dinge anzuwenden wufsten, wird sich weiter unten darthun.

Der berühmte Kaiser *Tschau kong,* um 1100 v. Chr., berechnete, nach einer vom Pater *Gaubil* überlieferten Nachricht, in *Loyang* oder *Honan-fu,* der Hauptstadt der Provinz *Honan*, an einem acht Fufs hohen Gnomon die Länge des Schattens zu 1,54 Fufs im Sommer und 13,12 Fufs im Winter; auch bestimmte er die Sonnenlänge zur Zeit des Wintersolstitiums. Beide Berechnungen erweisen sich als richtig (Vergl. *Mädler,* Populäre Astronomie. 2. Ausg. Berlin 1846. S. 531); worüber man sich weniger wundern wird, wenn man vernimmt, dafs ein von *Tschau kong* selbst, oder doch unter seiner Mitwirkung verfafstes Werk existirt, in welchem die vornehmsten Grundwahrheiten der Mathematik niedergelegt sind. Es ist dies ein kurzer Dialog zwischen *Tschau kong* und einem angesehenen Manne, Namens *Schang Kaou;* die Schrift hat den Titel *Tschau-pi,* d. h. Schenkelbein des *Tschau*. (Dieser auf den ersten Blick auffallende Titel erklärt sich daraus, dafs die beiden Charactere *Keu ku,* womit Basis und Höhe eines Dreiecks, von welchem in dem Buche häufig die Rede ist, benannt werden, ursprünglich *Bein* und *Schenkel* bedeuten. Auch wir reden ja gleichfalls von „Schenkeln" eines Winkels.) Die Schrift hat mehrere Abschnitte, deren erster einen Auszug gleichsam, oder eine Übersicht des gesammten Inhalts des Werks enthält. Wir geben ihn hier zum näheren Verständnifs und zur Beurtheilung des Ganzen.

(1.) *Tschaukong,* so lieset man im Cap. 1., sagte einmal zu *Schangkaou*: Ich habe vernommen, Herr, Du seist in den Zahlen sehr bewandert; daher möchte ich dich fragen, wie der alte *Fohi* die Grade an der Himmelskugel festgestellt hat: Es sind ja doch keine Stufen vorhanden, auf welchen man den Himmel ersteigen kann; und Richtschnur und Maafs von der Gröfse der Erde lassen sich auf den Himmel nicht anwenden. Deshalb wünschte ich zu erfahren, wie er diese Zahlen feststellte.

(2.) *Schangkaou* erwiederte: Die Kunst zu *zählen* ist auf den Kreis und auf das Viereck zurückzuführen.

(3.) Der Kreis mufs von dem Vierecke abgeleitet werden.

(4.) Das Viereck entsteht aus dem rechten Winkel. (Der Ausdruck rechter Winkel = ***keu-ku*** bedeutet hier, wie oben erwähnt, die beiden kurzen Seiten des rechtwinkligen Dreiecks.)

(5.) Der rechte Winkel beruht auf der Vervielfältigung von ***neun Einern***.

(6.) Zerlegt man daher einen rechten Winkel in seine Bestandtheile, so ist eine, die Endpuncte seiner Schenkel verbindende Linie, wenn die Basis gleich 3 und die Höhe gleich 4 ist, gleich 5.

(7.) Macht man mit den äufsern Seiten ein Viereck, so ist dessen Hälfte dem Dreieck an Flächen-Inhalt gleich.

(8.) Legt man alle Seiten zusammen, so ist das Facit gleich der Summe von 3, 4 und 5.

(9.) Das Quadrat der Hypotenuse, gleich 25, ist gleich den Quadraten der beiden kurzen Seiten des Dreiecks.

(10.) *Yu* stellte dadurch in seinem Reiche die Ordnung wieder her, dafs er die Grundgedanken dieser Zahlen zur Ausführung brachte.

(11.) *Tschaukong* rief aus: Wahrlich, grofsartig ist das Zahlensystem! Ich möchte dich nun noch nach den Grundsätzen fragen, welche bei dem Gebrauch des rechten Winkels zur Anwendung kommen.

(12.) *Schangkaou* antwortete: Der rechte Winkel wird aus ungekrümmten geraden Linien gebildet.

(13.) Aufgerichtet bedient man sich des rechten Winkels zu Höhenmessungen.

(14.) Umgekehrt braucht man ihn, um Tiefen zu ergründen.

(15.) Mittels des horizontal liegenden rechten Winkels bestimmt man Entfernungen.

(16.) Durch Umdrehung des rechten Winkels wird die Kreislinie gebildet.

(17.) Aus der Verbindung von rechten Winkeln entsteht das Quadrat.

(18.) Das Quadrat gehört der Erde, der Kreis dem Himmel an; denn der Himmel ist rund und die Erde viereckig.

(19.) Die Zahlenverhältnisse des Quadrats sind das Grundmaafs, die Ausdehnungen des Kreises werden von dem Quadrat abgeleitet.

(20.) Die Kreisfläche stellt den Himmel dar; die himmlischen Farben sind blau und schwarz, die irdischen gelb und roth. Die Kreisfläche wird nach den himmlischen Zahlenverhältnissen gebildet; sie ist auswendig blau und schwarz, inwendig roth und gelb, um die Stationen am Himmel und auf der Erde darzustellen.

(21.) Wer daher die Erde kennt, ist ein gelehrter Mann, wer aber den Himmel kennt, ist ein Weiser. Diese Kenntnifs beginnt mit der geraden Linie; die gerade Linie ist ein Theil des rechten Winkels, und die Zahlenverhältnisse des rechten Winkels sind auf die Gestalt aller Dinge anwendbar.

(22.) *Tschaukong* rief aus: In der That das ist vortrefflich!

Diese hier nach Ziffern aufgezählten einzelnen Sätze des gedachten Werks bedürfen einiger Erläuterungen, wiewohl man in ihnen, auch ohne solche, schon erkennt, dafs wichtige mathematische Grundwahrheiten darin niedergelegt sind.

Durch (2.) ist ein Axiom gleichsam für alle räumlichen Verhältnisse, die sich nach Zahlen bestimmen lassen, ausgesprochen. Der Satz (3.) enthält eine Andeutung von der Quadratur des Zirkels; was demnach schon in frühester Zeit als mathematisches Problem den Chinesen bekannt gewesen zu sein scheint. Die Aussprüche (4. und 5.) beziehen sich auf die Flächenmessung in der Ebene. Der an und für sich dunkle Satz (5.) läfst sich erklären, wenn man auf seinen Zusammenhang mit (4.) hinweiset und annimmt, der Verfasser habe sich ein Viereck durch eine Diagonale halbirt vorgestellt und die Werthe der Hypotenuse und der einen Kathete des entstandenen rechtwinkligen Dreiecks zu resp. (5. und 4.) angenommen, welches zusammen 9 ausmacht; woraus er dann, wie Satz (9.) zeigt, den Werth der andern, den rechten Winkel formirenden Kathete zu berechnen wufste. In solchem Sinne konnte er wenigstens keinen andern Ausspruch, als den sechsten, dem Satze (5.) verständlicher anreihen, indem er mit (6.) die Grundverhältnisse der drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks unter einander angiebt. Die siebente Sentenz besagt, dafs ein die drei Winkel eines Dreiecks einschliefsendes Viereck noch einmal so grofs ist, als dieses Dreieck: ein bekannter, bald so, bald anders ausgedrückter geometrischer Lehrsatz. Satz (8.) ist das Axiom: die Summe der Theile ist dem Ganzen gleich; und Satz (9.) die berühmte 47. Position im ersten Buche des *Euklid*, der Lehrsatz des *Pythagoras*. Die Aussprüche in (13., 14. und 15.) deuten an, dafs der Verfasser *trigonometrische* Messungen kannte; insbesondere wufste, wie sich die Gröfse unzugänglicher Gegenstände mit Hülfe der Trigonometrie finden lasse. Aus Satz (16.) darf man schliefsen, dafs dem Verfasser die Methode, mittels des Radius den Inhalt der Kreisfläche zu berechnen, nicht fremd gewesen sei. Satz (17. und 19.) sind an sich klar; dagegen enthält Satz (18.) einen Ausspruch, der fast wie ein philosophischer Lehrsatz des *Pythagoras* klingt, und

jedenfalls beweiset, dafs der Verfasser einen innerlichen, doch begreifbaren Zusammenhang zwischen dem Wesen der Dinge und ihrer äufsern Erscheinung ahnte. Ähnliches scheint auch dem ersten Ausspruch im (21.) Satze zu Grunde zu liegen; während der (20.) sich wahrscheinlich auf ein damals schon vorhandenes Instrument bezieht, durch welches Himmel und Erde abgebildet waren; wenn man sich davon auch keine genaue Vorstellung zu machen im Stande ist. Auch scheint dieser Satz die eigentliche Antwort auf die Frage des Kaisers zu enthalten, und die letzte Hälfte des Satzes (21.) deutet auf die Anwendung der Arithmetik auf die Geometrie.

Der gelehrte Kaiser *Tschaukong* wünschte, dafs seine Söhne und die des Adels in der ihm werthen Wissenschaft der Arithmetik nicht zurückbleiben möchten; weshalb er in dem von ihm selbst verfafsten *„Ritual"*, welches genaue Vorschriften über die Erziehung der Prinzen und Söhne der Vornehmen enthielt, den Hofmeistern derselben empfahl: „Die ältesten Fürstensöhne und des hohen Adels in den *sechs* Künsten zu unterweisen, nämlich in den fünf Classen religiöser Ceremonien, in den sechs verschiedenen Arten der Musik, den 5 Regeln für Bogenschützen, den 5 Vorschriften für Wagenlenker, den 6 Anweisungen zum Schreiben und den 9 Methoden, mit *Zahlen zu rechnen.*" Die Commentatoren des vorhin erwähnten *Kiutschang* sagen, dafs unter diesen 9 Methoden zu rechnen der Inhalt des *Kiutschang*, die neun arithmetischen Sectionen, verstanden sei.

Seit jener Zeit, bis dahin wo der Kaiser *Hoangti* sämmtliche chinesische Bücher verbrennen liefs, von 1100 vor Chr. bis 240 nach Chr., besitzen wir nur gelegentliche Anspielungen auf die Wissenschaft der Arithmetik in den alten Classikern. Nach dieser Begebenheit aber scheint die Arithmetik einen neuen Aufschwung genommen und viele Freunde und Kenner gefunden zu haben. Denn es ist eine so grofse Anzahl arithmetischer und allgemein-mathematischer Werke vorhanden, dafs schon allein die Aufzählung ihrer Titel zu weitläufig sein würde und wir uns auf eine übersichtliche Darstellung der hervorragendsten Schriften beschränken müssen.

Etwa ein Jahrhundert vor der christlichen Zeitrechnung veröffentlichte ein gewisser *Tschang Tsang* ein Werk: *Kiu tschang swan suh*, d. h. Arithmetische Regeln zu den neun Sectionen, welches die von den kaiserlichen Hofmeistern unter der Dynastie *Tschau* befolgten arithmetischen Grundsätze zu enthalten behauptet. Jedoch giebt es sich nicht für ein neues Originalwerk aus, sondern nur für eine revidirte und verbesserte Auflage eines viel ältern

Buches, dessen Verfasser unbekannt ist. Dies Werk hat bis heute mehrere neue Auflagen erlebt, ist jedoch jetzt sehr selten geworden: es hat aber viele Commentatoren unter namhaften chinesischen Gelehrten gefunden; was den Werth zeigt, den man ihm beilegte.

Aus dem dritten Jahrhundert nach Chr. Geb. erwähnen wir zwei hervorragende Schriften. Die eine schrieb *Suntsze,* ein Gelehrter von Ruf, unter dem Titel *Swan king,* d. h. Arithmetischer Classiker; sie ist gleichfalls, wiederholt und mit Erläuterungen begleitet, veröffentlicht worden und wird fast in jedem spätern Werke über Arithmetik citirt. Die andere Schrift erschien unter dem Titel: *Schuh so ke e,* d. h. Archiv für Rechenkunst; ihr Verfasser hiefs *Seu Kiu.* Auch diese ist häufig durch spätere Schriftsteller commentirt worden.

Vor Ablauf des sechsten Jahrhunderts gab *Heu Hau yang* seinen *Swan king* (Arithmetischen Classiker) heraus, in welchem er mehrere Verbesserungen der alten Rechnenmethode niederlegte und sich nicht enge an die Sectionen des *Kiu tschang* anschlofs; wie es bisher von allen seinen Vorgängern geschehen war. Kaum hundert Jahre später erschien von *Liu Hwuy* ein Werk: *Tschung tscha keă tsih wang tsche schuh* betitelt, d. h. Vollständiges System der Mefskunst, auf Grund von Beobachtungen mehrerer Baken. Es erhielt im achten Jahrhundert eine neue Auflage unter dem abgeänderten Titel: *Hä taou swan king,* d. h. Insel arithmetischer Classiker: so benannt, weil die erste Aufgabe des Buchs von der Ausmessung einer Insel von einem entfernten Standpuncte aus handelt. Auch *Wu Tsaou,* ein Zeitgenosse des letztgenannten Gelehrten, schrieb einen oft citirten *Swan king.*

Mit dem Beginn des siebenten Jahrhunderts erfuhr die Trigonometrie, zu der, wie man oben sahe, schon in frühester Zeit Grundlagen gelegt waren, eine fortschreitende Ausbildung. *Tschaou Tschwang* verfafste ein trigonometrisches Handbuch: *Tschau pe swan king,* d. h. Arithmetischer Classiker der *Tschau-Trigonometrie.* Es war indessen kein Originalwerk, sondern nur eine revidirte Ausgabe eines um vieles älteren (wie auch der Titel andeutet), von welchem man annehmen darf, dafs es das erste chinesische Werk über *Trigonometrie* gewesen sei.

Etwas später erschien von *Tschin Lwan* ein nachmals von *Le Tschun fung* commentirtes Werk: *Wu king swan schuh,* d. h. Arithmetische Regeln der fünf Classiker. Fast gleichzeitig erfolgte die Herausgabe eines neuen *Swan king,* durch *Tschang Kiu kihn,* welches wegen der prägnanten Kürze

seines Styls schwer zu verstehen sein soll; deshalb haben wiederholt mehrere Autoren Erklärungen dazu verfafst.

Während der *Tang*-Dynastie gab, gegen Ende des achten Jahrhunderts, der kaiserliche Bibliothekar *Wang Heaou tung* einen von einem selbstgeschriebenen Commentar begleiteten „Arithmetischen Classiker der alten Formeln" oder, wie es auf chinesisch heifst, *Tseih ku swan king*, heraus. Dies Buch enthält zwanzig Aufgaben aus der *Stereometrie*, welche zur Erläuterung der fünften von den mehrfach erwähnten neun Sectionen dienen sollen. Die Chinesen sagen, es sei schwer verständlich geschrieben; wiewohl nicht ohne Werth. Dafür spricht eine neue, 1803 zu *Sutschau* von *Tschang Tun jin* besorgte Ausgabe, in welcher die einzelnen Aufgaben sämmtlich ausführlich dargestellt und erläutert sind.

Zur Zeit derselben Dynastie gelangte ein buddhistischer Priester *Yihking* zu hohem Ansehen wegen seiner mathematischen Kenntnisse. Seine Schriften über Astronomie, Arithmetik, Abweichung der Magnetnadel u. dgl. m. haben ihm einen dauernden Ruhm unter seinen Landsleuten erworben. Er scheint eine seltene Universalkenntnifs in den Naturwissenschaften gehabt zu haben. Wahrscheinlich war es damals, dafs man in China mit den Ergebnissen des mathematischen Studiums in *Indien* bekannt wurde; denn mehrere Zahlenreihen von ungewöhnlicher Gröfse, deren fortan Erwähnung geschieht, deuten auf einen *indischen* Ursprung; z. B. die Reihe *Hang ho schaou*, welches „Sand des Ganges" heifst, und die durch die Zahl 10 mit 53 angehängten Nullen ausgedrückt wird.

Um das Jahr 950 kam die *Sung*-Dynastie zur Herrschaft, und behauptete den Thron bis 1280. Die Kaiser aus derselben waren zum Theil Beförderer der Wissenschaften; daher unter ihnen sich manche Gelehrte hervorthaten. Es ist unter andern *Tsin Kiu tschaou* zu nennen, der um 1240 die „neun Sectionen der Zahlenkunst" oder *Su schu kiu tschang* verfafste. Zehn Jahre später erschien von *Yang Hwuy* ein Werk: *Tseang keä kiu tschang swan fa*, d. h. Erklärung der Arithmetik der neun Sectionen, und aufserdem noch von demselben Verfasser ein zweites und drittes, welche populärer gehalten sind, nemlich: *Tseang keä jih yung swan fa*, d. h. Erläuterungen der Arithmetik für den täglichen Gebrauch, und *Sching tschu tung pien pun muh*, d. h. Vollständiges Handbuch der Multiplication und Division. Unlängst sind zu *Schanghai* diese Schriften der beiden letztgenannten Autoren wieder aufgelegt worden.

Während der *Yuen*-Dynastie verbesserte, etwa um 1300, *Ko Schau king* die bis dahin üblichen Rechnenmethoden, in einer Weise, welche Epoche machte. Auch wird ihm die Einführung der sphärischen Trigonometrie zugeschrieben; und obwohl sein hierauf bezügliches Werk verloren gegangen ist, besitzt man doch ein anderes aus den Zeiten der *Ming*-Dynastie, unter dem Titel *Hu schi swan schuh,* d. h. Arithmetische Regeln für Segmente und Sinus versus, welches die Lehrsätze des *Ko Schau king,* nebst dazu gehörigen Illustrationen enthält.

Ein anderer Gelehrter, *Le Yay,* verfafste ein Buch, auf das wir noch zurückkommen, betitelt *Tsih yuen hä king,* d. h. Spiegel für die Ausmessung des Kreises, in welchem eine Art *Algebra* zur Lösung trigonometrischer Aufgaben mitgetheilt wird. Es ist möglich, dafs um diese Zeit die Chinesen einige mathematische Kenntnisse zur Vervollkommnung der ihrigen von den *Arabern* aufnahmen; denn sie unterhielten mit Diesen damals einen lebhaften Verkehr. Uebrigens wurden viele der hierher gehörenden Schriften der Araber, welche nach China gelangten, nicht ins Chinesische übersetzt, daher auch ihr Inhalt gröfstentheils, selbst chinesischen Gelehrten, wegen deren Unkunde fremder Sprachen, unbekannt blieb. Man fand einige in fremder Zunge abgefafste Werke in der kaiserlichen Bibliothek, als *Hungwu,* der Begründer der *Ming*-Dynastie, den Thron bestieg. Dieser Monarch beauftragte zwei seiner hervorragendsten Gelehrten, mit Hülfe mahomedanischer Beamten, die arabischen Bücher zu *übersetzen;* allein der Inhalt war allen so fremd, und die Ausdrücke lagen ihrem Verständnifs so fern, dafs die von ihnen ausgearbeitete Übertragung ins Chinesische: *Kihn yuen sin sching tsche schu,* d. h. Buch der alten Weisen über den himmlischen Ursprung, wie man es auch schon dem Titel ansieht, sehr unbrauchbar wurde. Gegenwärtig ist es nicht mehr zu haben; nach Angaben bei andern Schriftstellern ist aber zu vermuthen, dafs es hauptsächlich von der Algebra gehandelt habe. Jedenfalls scheint erwiesen, dafs der Einflufs der Wissenschaften der Araber in China nur gering gewesen sei.

In den ersten Zeiten der *Ming*-Dynastie mag die Arithmetik bei den Chinesen wenig fortgebildet worden sein, da kaum eine einzige Schrift von nur einiger Bedeutung aus dieser Periode vorhanden ist. Als daher damals die *Jesuiten* nach China kamen, mufsten sie eine sehr geringe Vorstellung von der Bekanntschaft der Chinesen mit dieser Wissenschaft bekommen; und um so mehr fanden ihre Theorien bei den Gelehrten Eingang und er-

regten deren Bewunderung. Aus diesem Grunde gelang es diesen Missionaren, wie oben bemerkt, sich Zutritt am Hofe des Kaisers ***Kanghi*** zu verschaffen. Zugleich ist aber auch hier wieder an die oben gedachten Forschungen des Gelehrten ***Mei Wuh gau*** zu erinnern, denen zufolge die Weisheit der Ahnen, die man fast ganz aufser Acht gelassen hatte, in einem viel vortheilhafteren Lichte sich zeigte, als man bis dahin sie anzusehen gewohnt war. Die vorstehende Übersicht über die arithmetische Literatur der Chinesen bis zur Ankunft der berühmten Jesuiten *Ricci, Schaal, Verbiest* u. a. m., dürfte dies günstige Urtheil darüber bestätigen.

Wir wollen nun versuchen, den Lesern eine Einsicht in die Elemente des arithmetischen Verfahrens der Chinesen zu geben, und hoffen auch dadurch die Überzeugung anzubahnen, dafs die Chinesen in dieser Beziehung selbständig eine Wissenschaft gegründet und weiter entwickelt haben, die zwar auf allgemeinen, daher überall gleichen Prinzipien beruht, deren Anwendung aber eine grofse Mannigfaltigkeit zuläfst. Der berühmte Verfasser des bekannten Werks über China, Sir *John Davis,* war freilich in einem der Asiatischen Societät im Jahre 1823 vorgelegten Vortrage anderer Meinung. „Die Chinesen," sagte er, „besitzen keine eigentliche Wissenschaft, deren Urheber sie selber wären; und dafs sie deren keine von den ***Hindus*** überkommen, beweiset, wie ich glaube, die Bereitwilligkeit, mit welcher sie die Wissenschaften der ***Europäer*** sich aneigneten." Diese, seine, auf mehrere Gründe gestützte Behauptung ist auf seine Autorität hin oft wiederholt worden. Derselbe Forscher schreibt, in besonderer Bezugnahme auf das ***Zahlensystem*** der Chinesen, in seinem gedachten Werke über China: „Die Chinesen schreiben ihre Zahlen in ***Worten,*** und zwar ganz verschieden von der arabischen Weise zu zählen, bei welcher sich der Werth der Zahlen um zehnmal vergröfsert oder verkleinert, je nach der Stellung, welche sie zu einander einnehmen." In wie weit diese Behauptungen haltbar sind, bleibt dem Urtheil Derer überlassen, welche noch unsere fernere Mittheilungen beachten wollen.

Zuvörderst dürfen sich die Chinesen das Verdienst zuschreiben, wenn es anders überhaupt ein Verdienst ist, die selbständigen Erfinder ihrer ***Zahlzeichen*** oder ***Ziffern*** zu sein. Der ***Swan pan*** oder das ***Rechenbrett,*** welches gegenwärtig bei ihnen in Gebrauch ist, stammt aus einer beziehungsweise späten Zeit; vor Alters behalf man sich mit Kerbhölzern aus Bambus. Diese Methode, die Anzahl der Einer durch eingeschnittene Kerbe auf einem Bambusstabe zu bezeichnen, liegt unzweifelhaft den Figuren der chinesischen

Ziffern zu Grunde. Denn die ersten 5 Ziffern werden durch eine dem Werth der Ziffern entsprechende Anzahl von parallelen Strichen dargestellt; wobei es, wie es scheint, dem Belieben überlassen bleibt, die Striche senkrecht oder horizontal neben einander, oder kreuzweis einander gegenüber zu stellen. Die Ziffern von 6 bis 9 werden in ähnlicher Weise so bezeichnet, dafs die in ihnen allen enthaltene 5 durch einen horizontalen Strich ausgedrückt wird, an welchen dann die noch zu 5 hinzuzurechnenden Einer in senkrechter Stellung angefügt werden; die Null wird durch die Kreislinie dargestellt. Hiernach ergeben sich folgende Figuren für die Zahlen von *1* bis *9:*
1 = 𝍠, *2* = 𝍡, *3* = 𝍢, *4* = 𝍣, *5* = 𝍤, *6* = ⊥, *7* = 𝍦, *8* = 𝍧, *9* = 𝍨.

Nachdem man sich auf diese Weise eine einfache, deutliche und sinnentsprechende Bezeichnung der Zahlen geschaffen hatte, drückte man den Werth der Ziffern durch ihre Stellung ***neben einander*** aus; und zwar nach dem ***Decimalsystem;*** ganz eben wie wir es thun. Dies geschah bereits mehrere Jahrhunderte vorher, ehe man noch von einer ähnlichen Theorie in Europa eine Ahnung hatte, und ehe das Ziffersystem der Araber erdacht war. Wir entnehmen dem Werke des erwähnten ***Tsin Kiu Tschaou*** (zur Zeit der ***Sung***-Dynastie) ein ***Beispiel,*** um damit eine Probe zugleich des Werthes der Zahlen zu geben; wobei die Übereinstimmung mit dem von den civilisirten Nationen des Abendlandes angenommenen Zahlensystems augenfällig ist.

𝍠 𝍬 𝍦 ○ ○ ○ ○	=	*1,470,000*
T × 𝍣 ⊥ ×	=	*64,464*
𝍠 𝍬 ○ 𝍭 𝍤 𝍫 T	=	*1,405,536*

Wirft man nun noch einen Blick auf die Rechnenmethode der Chinesen, so vermifst man zunächst in ihren älteren arithmetischen Handbüchern die Elementarregeln über ***Addition*** und ***Subtraction.*** Dies kommt daher, dafs die Bekanntschaft damit bei allen Denen vorausgesetzt wird, die sich mit dem Inhalt eines solchen Handbuchs vertraut machen wollen. Man kennt zwar die Worte ***Addition*** und ***Subtraction, Kea fa*** und ***Kihn fa*** im Chinesischen, verbindet aber damit einen andern als den uns geläufigen Begriff. ***Kea fa*** nämlich vertritt unsere ***Multiplication*** nur insofern als es die successive Addition der ursprünglichen Zahl bedeutet; eben so ist ***Kihn fa*** ein Surrogat für die ***Division.*** Was wir ***Addition*** nennen, heifst bei den Chinesen ***Ho*** oder ***Ping,*** d. h. verbinden, und was wir unter ***Multiplication*** verstehen, nennen sie ***Sching fa;*** wobei zu beachten, dafs sie ihre Multipli-

cation mit der *links* stehenden Ziffer anfangen. *Multiplication* mit einer einfachen Ziffer heifst *Yin; Division* durch eine einzelne Zahl, *Kwei,* durch mehrere, *Tschu.* Die Division wird übrigens durch *wiederholte Subtraction* ausgeführt.

Nach diesen Vorbemerkungen wenden wir uns zu dem Hauptwerke, dem *Kiu tschang* oder „Neun Sectionen der Arithmetik", um anzuzeigen, von welchem Umfange die selbständigen arithmetischen Kenntnisse der Chinesen waren. In diesem Buche sind im Ganzen 246 Aufgaben, in neun Haupt-Abschnitte vertheilt, von denen jeder einen selbständigen, in sich abgeschlossenen Theil der Arithmetik behandelt.

Der *erste* Abschnitt hat die Überschrift *Fang tien,* d. h. *Flächenmessung.* Diese und die folgenden Überschriften der neun Sectionen haben wir nicht wörtlich übersetzt, sondern der neben der chinesischen Benennung gesetzte Ausdruck bezeichnet den Inhalt jedes Abschnitts, nach der bei uns gebräuchlichen Terminologie. Eine wörtliche Übersetzung der chinesischen Überschriften würde lauten: Für Abschnitt 1, viereckige Felder; für 2, Reis und Geld; für 3, verschiedene Theilungen; u. s. w. Der *erste* Abschnitt beginnt mit einer Erklärung von Multiplication und Division. Darnach folgt eine Reihe von Aufgaben, nebst den zu ihrer Lösung nöthigen Anweisungen über Ausmessung von Feldern verschiedenster Gestalt: viereckige, dreieckige, kreis- und halbkreisförmige u. s. w. Für die Berechnung des Flächen-Inhalts eines Dreiecks wird die Regel aufgestellt, die Basis mit der ihr gegenüberliegenden halben Senkrechten zu multipliciren; und um den Flächen-Inhalt eines Kreises zu finden, giebt der Verfasser folgende sechs Methoden an: Man multiplicire den halben Durchmesser mit dem Radius, oder nehme ein Drittheil vom Quadrat des halben Umkreises, oder ein Zwölftel vom Quadrat des Umkreises, oder ein Viertel vom dreifachen Quadrat des Durchmessers, oder ein Viertel vom Product aus Durchmesser und Umkreis, oder endlich, das dreifache Quadrat des Radius. Das Verhältnifs des Durchmessers zum Umkreise ist wie 1 zu 3 angenommen. Die Commentatoren des *Kiutschang* berichten jedoch, der Verfasser habe sehr wohl das genauere, der Wahrheit näher kommende Verhältnifs gekannt, aber die vorliegenden Aufgaben erforderten keine genauere Angabe desselben. Dafs Dies begründet sei, erhellet unter andern auch daraus, dafs im *Meih suh,* einer von *Tsu Tschung tsche* zu Ende des 6. Jahrhunderts verfafsten Schrift, das in Rede stehende Verhältnifs durch die Zahlen 7:22, und in noch früherer Zeit, von einem gewis-

sen *Liu Hwuy* durch 50:157 ausgedrückt ist. Für die Berechnung von Segmenten werden zwei Anweisungen gegeben: Man addire das Product des Sinus und Sinus-versus zu dem Quadrat des Sinus-versus und halbire diese Summe; oder man nehme ein Zwölftel des Unterschiedes zwischen den Quadraten des äufsern und innern Umkreises.

Der *zweite* Abschnitt heifst *Schuh pu*, d. h. *Proportion*. Er beschäftigt sich hauptsächlich mit Aufstellung von Regeln, welche den Werth von Reis je nach Verschiedenheit der Art und Qualität betreffen. Bei Angabe der Gewichte und Maafse ist der *Hwang tsung* zu Grunde gelegt: ein musikalisches Blase-Instrument, welches die Gestalt einer Röhre hat. Der *Hwang tsung* ist nämlich der Länge nach in 90 Theile getheilt, von denen jeder eine *Fun*, d. h. Linie ausmacht; 10 *Fun* sind gleich 1 *Tsun* oder Zoll, und 10 *Tsun* gleich 1 *Schih* oder Fufs. Er fafst 1200 Reiskörner, und 10 gefüllte *Hwang tsung* machen 1 *Ho*, 10 *Ho* aber 1 *Sching;* etwa unserer Kanne entsprechend. Bei dem Längenmaafs und demjenigen, welches unserem Maafse für Flüssigkeiten, mancherlei Früchte u. s. w. entspricht, ist also die *Decimaltheilung* zu Grunde gelegt. Dagegen findet bei dem *Gewicht* die Theilung nach 12 Einheiten, gleich einem Ganzen, Statt. Die 1200 Reiskörner nämlich, welche der *Hwang tsung* fafst, wiegen 12 *Tschu;* 24 *Tschu* sind 1 *Leang,* gleich unserer Unze, und 16 *Leang* sind 1 *Kin;* so viel wie unser Pfund u. s. w.

Der *dritte* Abschnitt, *Schwä fun,* d. h. *Gesellschaftsregel,* handelt von der Vertheilung von Vermögen unter mehrere Personen, von denen jede einen verschiedenen Antheil an das Gesammtvermögen besitzt. Die bezüglichen Verhältnisse sind auf Grund arithmetischer Progressionen entwickelt; z. B. 4:6; 2:8; 3:7; u. s. f.

Der *vierte* Abschnitt ist *Schaou kwang*, d. h. *Evolution,* überschrieben und behandelt das Ausziehen der Quadrat- und Cubikwurzel, in 24 Aufgaben. Die hier in Betracht kommenden Grundsätze werden nicht blofs auf gleichseitige Quadrate und Cuben, sondern auch auf Parallelogramme und Parallelopipeden von verschiedenartigster Ausdehnung angewendet. Dafs die aufgestellten Regeln den unsrigen entsprechen, versteht sich; denn die Sache ist überall dieselbe. Nur Das ist dem chinesischen Verfahren eigenthümlich, dafs die Benennung der Zahlen mit den Namen geometrischer Figuren und Körper in Übereinstimmung gebracht ist. Höhere Potenzen als der Cubus kommen nicht zur Sprache.

Im Anschlufs an den vorigen Abschnitt beschäftigt sich der *fünfte,* welcher *Schang kung,* d. h. *Körpermessung* heifst, vorzugsweise mit den bei öffentlichen Bauten erforderlichen Berechnungen. Es werden hier *stereometrische* Aufgaben behandelt, wie sie z. B. bei Aufführung von Mauern und Befestigungen, bei Erbauung von Thürmen und Wällen, bei Anlage von Grotten und Gräben u. s. w. vorkommen. Man findet eine Anleitung, den cubischen Inhalt aller geradlinigen Körper zu berechnen, deren Oberflächen nicht in rechten Winkeln an einander grenzen, wie z. B. der Prismen, Pyramiden, Kegel u. s. w. Aufserdem sind die mitgetheilten Regeln auch noch zur Lösung anderer hieher gehörender Aufgaben, z. B. von der Geschwindigkeit der verschiedenen Reisemethoden, zu Fufs, zu Pferde und zu Boot angewendet; überhaupt auf Alles, was in solcher Weise mit dem hier Behandelten zusammenhangt und nach denselben Grundsätzen wie das zuerst Angeführte gefunden werden kann.

Der *sechste* Abschnitt enthält *Keun schu*, d. h. *Vermischungsregeln.* Hier finden sich Aufgaben, durch welche die durchschnittliche *Steuer* gefunden wird, je nachdem man den Grundbesitz, oder die Bevölkerung, oder Dgl. zu Grunde legt; ferner solche, die den Werth verschiedener im Preise differirender Waaren, oder die Anzahl verschiedener Arten, die zu einem Ganzen zusammengefafst sind, ermitteln helfen. Eine Aufgabe der letzteren Art lautet z. B.: Angenommen man hätte in einem Käficht eine Anzahl Kaninchen und Fasane beisammen, im Ganzen 35 Köpfe und 94 Füfse: wie viel von jeder Art wären vorhanden? Auflösung: 23 Fasane und 12 Kaninchen.

Im *siebenten* Abschnitt *Yin nuh,* d. h. *Ueberschufs und Mangel,* finden sich Aufgaben erläutert und gelöset, bei denen das Facit durch das Verhältnifs zwischen dem Zuviel und Zuwenig ermittelt wird. Sie sind wie folgt ausgedrückt: Eine Anzahl Leute kaufte eine Anzahl Waaren: hätte Jeder von ihnen 8 *Kasch* bezahlt, so wären es 3 *Kasch* zuviel gewesen; dagegen: hätte Jeder 7 *Kasch* entrichtet, so würden es 4 *Kasch* zu wenig gewesen sein. Wie viel Leute und wie viel Waaren waren da? Auflösung: 7 Leute und 53 Stück Waaren.

Der *achte* Abschnitt handelt von den *Gleichungen,* auf chinesisch *Fang tsching.* Hier findet sich eine Auseinandersetzung über den Gebrauch von *plus* und *minus* (*tsching* und *fu*), und in einer Reihe von 18 Aufgaben wird gezeigt, wie sich mittels *bekannter* Gröfsen *unbekannte* durch *Gleichungen* berechnen lassen. Eine Aufgabe lautet: Wenn 5 Ochsen und

2 Schafe 10 ***Taels*** in Gold kosten und 2 Ochsen und 8 Schafe 8 Taels, wie theuer ist dann jeder Ochse und jedes Schaf? Auflösung: Jeder Ochse kostet $1\frac{13}{21}$ ***Tael*** und jedes Schaf $\frac{20}{21}$ ***Tael,***

Endlich, der ***neunte*** Abschnitt beschäftigt sich mit der ***Trigonometrie,*** auf chinesisch ***Keu ku.*** Zur Veranschaulichung Dessen, was in den hier verzeichneten 24 Aufgaben, mit Hülfe der dem rechtwinkligen Dreiecke entlehnten Gröfsenverhältnisse geleistet worden, mögen einige dieser Aufgaben, nebst deren zu Grunde liegenden Bestimmungen hier folgen. Es ist der ***Unterschied*** zwischen Höhe und Hypotenuse, nebst der ***Basis*** gegeben; man soll die Hypotenuse finden. ***Aufg. 1.*** Im Mittelpunct eines Teiches, welcher 10 Fufs im Quadrat mifst, wächst ein Schilf, das sich einen Fufs hoch über das Wasser erhebt; als man es ans Ufer zog, reichte es nur bis an den Rand des Teiches; welche Tiefe hat das Wasser? Antwort: 12 Fufs Tiefe. ***Aufg. 2.*** Wenn beim Öffnen einer Flügelthür der innere Rand der Flügel einen Fufs vom Thür-Rahmen entfernt ist, so beträgt der offene Raum zwischen den Flügeln 2 Zoll: wie breit ist die Thür? Antwort: Jeder Flügel $50\frac{1}{2}$ Zoll. Es ist die Summe von Höhe und Hypotenuse, so wie die Basis bekannt: man soll die Höhe finden. ***Aufg.*** Ein 10 Fufs hoher Bambus ist nach oben hin gebrochen; berührt nun das oberste Ende den Boden, so ist es 3 Fufs von dem entgegengesetzten Ende entfernt: wie hoch ist der Bambus bis zu dem Bruche? Antwort: $4\frac{11}{20}$ Fufs. Es sind Basis und Höhe gegeben: man soll die Summe und den Unterschied dieser beiden und der Hypotenuse finden. ***Aufg.*** Wie grofs ist der Durchmesser des gröfsten Kreises, welcher innerhalb eines rechtwinkligen Dreiecks beschrieben werden kann, dessen beide Katheten respective 8 und 15 grofs sind. Antwort: 6.

Dies der Inhalt des ***Kiu tschang;*** freilich nur in einem sehr oberflächlichen Abrifs, der aber doch schon eine Einsicht gewähren wird in die Mannigfaltigkeit der in diesem merkwürdigen Denkmal der Weisheit längst vergangener Tage niedergelegten mathematischen Wahrheiten, und in die Gründlichkeit, mit welcher dieselben theoretisch und practisch durchforscht und erläutert worden sind. Es ist noch hinzuzufügen, dafs jeder dieser neun Abschnitte, sowie in denselben jede Unter-Abtheilung, mit einer Stanze eingeleitet ist, welche im Allgemeinen den Inhalt der in jedem Capitel dargelegten Sätze andeutet. Auf den ersten Blick sind diese Stanzen schwer verständlich, bei genauerer Erforschung aber der Bedeutung der Wort-Charactere findet sich, dafs sie in gedrängtester Kürze auf sinnreiche Weise und

in einer für das Gedächtnifs leicht behältlichen Form ein passendes Motto abgeben.

Auf den vorstehend mitgetheilten Grundlagen ist nun die Arithmetik der Chinesen fortschreitend weiter entwickelt worden; wie Dies jetzt darzuthun sein wird. Es ist dabei freilich sehr schwierig, chronologisch genau den Zeitpunct festzustellen, in welchem jedesmal ein Fortschritt gemacht wurde; denn fast immer beziehen sich die chinesischen Gelehrten in ihren wissenschaftlichen Werken, auch da, wo sie, wie man glauben sollte, die Forschung und Begründung allgemeiner Wahrheiten wirklich neu gestalten und weiter führen, auf die Arbeit eines ihrer Vorgänger, zu welcher sie, ihrer Angabe nach, nur erläuternde Zusätze zu machen haben. Ihre aufserordentliche Verehrung für die Leistungen ihrer *Vorfahren* ist die Ursache dieser grofsen Bescheidenheit, welche es ihnen versagt, den Ruhm, neue Gedanken ausgesprochen zu haben, für sich zu beanspruchen. Sie pflegen ihre Forschungen nie anders als in Erklärungen und Erweiterungen der oft kurzen, schwer verständlichen Sätze ihrer alten Classiker einzukleiden. Dies ist auch der Grund, warum ihre arithmetischen Regeln und Formeln, die in ihrer ursprünglichen Gestalt sehr unvollkommen ausgedrückt sind, erst nach und nach durch eine lange Reihe fortlaufender Entwicklungen und Ausführungen zu jener deutlicheren Darstellung gelangt sind, in welcher sie gegenwärtig uns vorliegen. Es sei verstattet, Dieses näher zu beleuchten.

Eine der merkwürdigsten, inhaltreichsten und zu umfassender Entfaltung fortgeführten arithmetischen Regeln ist die, welche *Ta yen,* d. i. *grofse Erweiterung* heifst, die Regel zur „Auffindung *unbekannter* Gröfsen". In ihrer ursprünglichen, noch völlig embryonischen Gestalt kommt sie in dem „arithmetischen Classiker des *Sun Tsze*" vor, unter der Überschrift: Unbekannte Zahlengröfsen.

Unter den chinesischen Historikern herrschen zweierlei Ansichten über das Zeitalter des *Sun Tsze.* Einige halten ihn für einen Officier, der um das Jahr 220 vor Chr. lebte und gewöhnlich unter dem Namen *Sun Wu tsze* vorkommt. Wahrscheinlicher dürfte die Annahme Anderer sein, dafs er im dritten Jahrhundert der christlichen Zeitrechnung, gegen das Ende der *Han*- oder zu Anfang der *Weih*-Dynastie lebte.

Die Regel des *Sun Tsze* wird mit vier, durch Reime harmonisch verbundene Zeilen, welche ihren Inhalt ganz allgemein ausdrücken, eingeleitet und dann sofort in folgende Aufgaben eingekleidet: Eine Zahl, durch

3 dividirt, giebt den Rest 2; durch 5 dividirt, den Rest 3, und durch 7 dividirt, den Rest 2: welches ist die Zahl? Antwort: 23. Das Verfahren, wie diese Aufgabe zu lösen sei, wird durch folgende mystische Worte angedeutet: „Dividirt durch 3, giebt Rest 2: schreibe 140; dividirt durch 5, giebt Rest 3: schreibe 63; dividirt durch 7, giebt Rest 2: schreibe 30; diese Zahlen addirt, giebt 233; davon subtrahirt 210, giebt den Rest 23, die gesuchte Zahl." Dieser abrupten Bemerkung folgt die eben so aphoristische Notiz: „Für 1, durch 3 gewonnen, setze 70; für 1, durch 5 gewonnen, setze 21; für 1, durch 7 gewonnen, schreibe 15; ist die Summe 106 oder mehr, so subtrahire davon 105 und der Rest ist die gesuchte Zahl."

Untersucht man nun, wie spätere Gelehrte dieses von *Sun Tsze* nur in seinen rohesten Umrissen angedeutete arithmetische Verfahren verstanden, erklärt und weiter entwickelt haben, so wird man darüber zunächst durch die Schriften des bereits erwähnten *Tsin Kiu tschaou* belehrt, der gegen Ende der Dynastie *Sung* lebte. Die grofse Erweiterungs-Rechnung oder *Ta yen* wird für die vorstehende Aufgabe, und in Anschlufs an die zuletzt im *Sun Tsze* erwähnte Notiz, von ihm wie folgt beschrieben: „Man multiplicire die drei Divisoren 3, 5 und 7, wodurch man die Zahl 105 erhält, welche *Yen mu* oder „Stamm-Erweiterung" heifst. Diese dividire man durch die „bestimmte Stammzahl" oder *Ting mu,* hier die Zahl 7, so ist der Quotient 15 die „Erweiterungszahl" oder *Yen su.* Diese Erweiterungszahl 15, dividirt durch 7, läfst 1 als Überschufs, welches der „Multiplicator" oder *Tsching suh* ist; mit dem Multiplicator 1 aber vermehrt, giebt sie als Product die „Hülfszahl", oder *Yeng su,* 15. Dadurch ist erklärt, dafs es oben heifst: Für 1, durch 7 gewonnen, schreibe 15. Auf dieselbe Weise werden die andern Hülfszahlen gesucht, nämlich:

$\frac{105}{5} = 21$, d. i. die Erweiterungszahl;

$\frac{21}{5}$ läfst den Rest 1, d. i. der Multiplicator;

$21 \times 1 = 21$, d. i. die Hülfszahl.

Daraus erklärt sich das obige: Für 1, durch 5 gewonnen, schreibe 21. Endlich

$\frac{105}{3} = 35$, d. i. die Erweiterungszahl;

$\frac{35}{3}$ läfst den Rest oder *Ki* 2, d. i. der Multiplicator;

$35 \times 2 = 70$, d. i. die Hülfszahl,

oder wie es vorhin hiefs: für 1, durch 3 gewonnen, schreibe 70. Mit den drei Hülfszahlen wird nun die Rechnung fortgesetzt, indem jene mit den in der ursprünglichen Aufgabe genannten Resten multiplicirt werden, nämlich:

$$70\times2=140;\quad 21\times3=63;\quad 15\times2=30.$$

Hierin finden die oben als mystisch bezeichneten Worte des ***Sun Tsze,*** welche zur Lösung der Aufgabe Anleitung geben sollten, ihr Verständnifs, und es bleibt nun noch übrig, was eben dort verlangt wird, zum Vollzug zu bringen, nämlich:

$$140+63+30=233;\quad 233-105=128;\quad 128-105=23;$$

welches die gesuchte Zahl ist.

Diese Erweiterungs-Regel oder ***Tayen,*** in ihrer einfachsten Anwendung vorstehend beschrieben, diente spätern Gelehrten zur Berechnung ***astronomischer*** Verhältnisse; namentlich der Cyklen und Epicyklen. Ein Priester, Namens ***Yih King*** hat das Verdienst, sie hierzu zuerst angewendet zu haben; er starb bald nach Abfassung seines berühmten Werks „***Ta yen lei schu***" im Jahre 717 nach Chr. Auch dieses Werk hat der mehrfach erwähnte ***Tsin Kiu tschaou*** ausführlich commentirt; in einer Schrift mit zwei Theilen, jeder von 9 Capiteln. Sie führt, im Anklang an das alte Werk des ***Kiu tschang,*** von welchem oben die Rede war, den Titel: „Neun Abschnitte der Rechnenkunst", und zeigt, wie nachstehende gedrängte Übersicht ihres Inhalts ergeben wird, in Vergleich mit früheren arithmetischen Werken, einen bedeutenden Fortschritt.

In dem ersten Abschnitt des ersten Theils wird zur Berechnung der Erweiterungszahl 50 und der Hülfszahl 49 von den vier Hauptzahlen 1, 2, 3, 4 ausgegangen. Mit diesen wird zunächst folgende Multiplication gemacht:

$$1\times2\times3\times4 = 24;$$
$$1\times3\times4 = 12;$$
$$1\times2\times4 = 8;$$
$$1\times2\times3 = 6.$$

Diese Producte werden dann, als Erweiterungszahlen, mit den vier Hauptzahlen in zwei Reihen zusammengestellt:

Hauptzahlen	1	2	3	4,
Erweiterungszahlen	24	12	8	6.

Die Summe der letztern $24+12+8+6$ giebt die grofse Eeweiterungszahl 50; das Product von je 2 unter einander stehenden, einer Haupt- und einer Erweiterungszahl, beträgt jedesmal 24. Die gefundene Zahl 50 eignet sich,

als ***gerade,*** nicht zu einer Hülfszahl zur Fortsetzung der Rechnung; deshalb werden die einzelnen Producte aus je einer Haupt- und einer Erweiterungszahl durch den gemeinschaftlichen Divisor 2 in der Weise dividirt, dafs in den beiden folgenden Reihen das Product von je einer Hauptzahl mit der unter ihr stehenden Erweiterungszahl gleich 12 ist, nämlich:

Stammzahlen	1	1	3	4,
Erweiterungszahlen	12	12	4	3.

Nun wird von den Erweiterungszahlen, soweit es angeht, die über jeder stehende Stammzahl so oft subtrahirt, bis ein Rest bleibt; was, da bei dem letzten Gliede diese Subtraction nicht möglich ist und also unterbleibt, folgende Reihen giebt:

Stammzahlen	1	1	3	4,
Reste	1	1	1	3.

Diese Reste werden im Fortschritte der Rechnung als Multiplicatoren für die zuletzt aufgeführten Erweiterungszahlen 12, 12, 4, 3 gebraucht; woraus, unter Wiederholung der Stammzahlen, die Reihen:

Stammzahlen	1	1	3	4,
Erweiterungs-Hülfszahlen	12	12	4	9

entstehen. Da nun die zweite Grundzahl 2 oben schon auf 1 reducirt und dabei die zweite Erweiterungszahl 12 unverändert beibehalten wurde, so wird zu letzterer die zweite Erweiterungs-Hülfszahl 12 addirt, die übrigen dagegen werden unverändert gelassen; woraus sich, mit Zusammenstellung der Grundzahlen, von denen die Berechnung ausging, folgende zwei Reihen ergeben:

Grundzahlen	1	2	3	4,
Bestimmte Hülfszahlen	12	24	4	9.

Die Summe der letzteren Reihe $12+24+4+9$ beträgt 49, welche, wie oben erwähnt, im ***Yih King*** die ***Hülfszahl*** heifst.

Diese Rechnung im ***ersten*** Abschnitt des ***Yih King,*** welche dort noch fortgesetzt wird, diente dazu, durch Zahlensymbole die ***Zukunft*** zu deuten; sie bildete eine arithmetische Grundlage für die bei den Chinesen, wie überhaupt bei heidnischen Völkern, sehr beliebte ***Wahrsagerkunst.*** Die Zahlen hatten daher hier, wo sie gleichsam als Schlüssel dienten, die Geheimnisse der Zukunft aufzuschliefsen, ihre besondern Schriftzeichen. So hatte die ***Eins*** das Zeichen von zwei ganzen Strichen, die ***Zwei*** das Zeichen eines gebrochenen Striches, die ***Drei*** das Zeichen eines ganzen Strichs, und die

Vier das Zeichen eines ganzen und eines gebrochenen Striches. Auf solche Weise entstanden die sogenannten *Diagramme,* welche als die Überreste eines sehr alten Systems der Wahrsagerei, dessen Ursprung sich nicht nachweisen läfst, anzusehen sind.

Die im *zweiten* Abschnitte des *Yih King* aufgestellte arithmetische Regel wird auf *astronomische Berechnungen* angewandt, und durch folgende Aufgaben erläutert. Das Sonnenjahr sei gleich $365\frac{1}{4}$ Tagen, die Revolution des Mondes $29\frac{499}{940}$ Tage, und das *Kea tsze* 60 Tage. Im Jahre 1246 war der 53te Tag des *Kea tsze,* oder des Cyclus von 60 Tagen, der erste im eilften Monat, der 57te Tag des *Kea tsze* das Wintersolstitium oder der erste Tag des Sonnenjahrs, und der erste Tag des *Kea tsze* der neunte Tag des Monats. Man berechne die Zeit zwischen den beiden Conjunctionen des Anfangs dieser drei Cyklen, so wie die Zeit, welche bereits verstrichen ist, und die, welche noch bevorsteht. Auflösung: Die Zeit zwischen den beiden Conjunctionen beträgt 18 240 Jahre oder 225 600 Monate oder 6 662 160 Tage; es sind verstrichen 9 163 Jahre und stehen noch bevor 9 077 Jahre.

Der *dritte* Abschnitt handelt von der Berechnung der *Arbeit.* Vier Gesellschaften, deren Mitgliederzahl verschieden ist, übernehmen die Aufführung eines Dammes. Jeder Gesellschaft wird ein gleicher Theil der Arbeit überwiesen; wie grofs derselbe aber sei, ist unbekannt; man kennt nur die Kräfte, welche jede Gesellschaft verwenden kann und wie viel von jeder Gesellschaft, nach Angabe des letzten ganzen Tagewerkes, unausgeführt geblieben ist. Daraus soll gefunden werden, ein wie grofser Theil des Dammes überhaupt vollendet wurde.

Im *vierten* Abschnitt wird die *Geldrechnung* vorgetragen. Sieben, ursprünglich gleich grofse Capitalien werden nach und nach durch Wechsel von verschiedenem Betrage, welche täglich darauf gezogen werden, vermindert. Wie grofs die Capitalien ursprünglich gewesen, und wie viele Tage Wechsel auf sie gezogen sind, ist beides unbekannt; dagegen kennt man den Betrag der täglich gezogenen Wechsel und den Rest der Capitalien; daraus ist die ursprüngliche Summe der letzteren zu berechnen.

Der *fünfte* Abschnitt enthält folgende Aufgaben: Drei Landwirthe besitzen Jeder eine gleiche Menge Getreide, welches auf verschiedenen Märkten und nach verschiedenen Maafsen gekauft worden ist. Der Überschufs über das volle Normalmaafs ist bekannt: daraus soll gefunden werden, wieviel die ganze Menge betrug.

Im *sechsten* Abschnitt wird eine Aufgabe behandelt, der zufolge drei Regimenter nach der Hauptstadt marschiren. Man weiſs, wie viele Meilen jedes täglich zurücklegt, und zugleich die Stunde, wann alle drei die Hauptstadt erreichen, und soll darnach die Entfernung der Hauptstadt von dem Puncte des Ausmarsches der Soldaten berechnen.

Der *siebente* Abschnitt bezieht sich auf Lösung einer Aufgabe, wonach zwei Couriere mit verschiedener Eile eine Reise zurücklegen: es wird gefragt, welches der erste Ort sei, in welchem sie auf ihrer Route übernachten.

Im *achten* Abschnitt ist von der Erbauung des Fundaments eines Gebäudes die Rede, wozu 4 verschiedene Sorten von Backsteinen, die der Baumeister beliebig auswählen kann, verwendet werden. Die Gröſse der Backsteine ist angegeben, und daraus sollen die Dimensionen des Fundaments berechnet werden.

Die Aufgabe endlich, im *neunten* Abschnitte lautet: Es wird angezeigt, daſs 3 Reisfässer, deren jedes gleich viel Reis enthielt, von Dieben zum Theil geleert worden sind. Man wuſste nicht, wie viel Reis im Ganzen sich darin befand, aber es ergab sich, daſs in dem einen Faſs noch 1 *Ho* übrig gelassen war, in dem zweiten noch 1 *Sching* und 1 *Ho* und in dem dritten 1 *Ho*. Als man der Diebe habhaft wurde, gestand *A.*, daſs er mit einer Pferdestall-Schaufel mehrere Male aus dem ersten Faſs den Reis in einen Sack gefüllt habe; *B.* daſs er in der Eile einen hölzernen Schuh ergriffen und diesen mehrere Male aus dem zweiten Fasse voll geschüttet, und *C.*, daſs er eine Schüssel mehrere Male aus dem dritten Faſs gefüllt habe. Diese drei Gefäſse, deren sich die Diebe bedient, sind zur Stelle, und es ergiebt sich, daſs die Schaufel 1 *Sching* und 1 *Ho* enthält, der Holzschuh 1 *Sching* und 7 *Ho* und die Schüssel 1 *Sching* und 2 *Ho*. Wieviel Reis war im Ganzen gestohlen worden, und wieviel hatte jeder Dieb genommen? Antwort: Es waren 9 *Schih* 5 *Tau* 6 *Sching* und 3 *Ho* gestohlen; *A.* hatte 3 *Schih* 1 *Tau* 9 *Sching* und 2 *Ho* genommen; *B.* 3 *Schih* 1 *Tau* 7 *Sching* 9 *Ho*; *C.* 3 *Schih* 1 *Tau* 9 *Sching* und 2 *Ho*.

Der *zweite Theil* des Werks von *Tsin Kiu tschaou* behandelt ausschlieſslich Berechnungen aus der *Astronomie* und *Naturlehre;* wobei ebenfalls, wie im ersten, die Regel *Ta yen* zu Grunde gelegt ist. Zu einer Zeit, wie damals, wo man nur sehr unvollkommene astronomische Instrumente besaſs, war es sehr wichtig, eine Methode zu haben, durch welche sich die Dauer des Sonnenjahrs und einzelner astronomischer Zeitperioden, die Un-

regelmäfsigkeiten in der scheinbaren Bewegung der Planeten u. dergl. m. berechnen liefsen. Auch zeugt es von sorgfältiger Beobachtung der Natur-Erscheinungen, dafs, wie hier in den 4 letzten Abschnitten geschehen, Berechnungen über den Fall des Regens und des Schnees angeführt werden. Ebenso bemerkenswerth ist die im fünften Abschnitt versuchte Berechnung der Länge des Schattens am Sonnenzeiger. Etwas der chinesischen Regel *Ta yen* Ähnliches scheint bei den *Hindu's* unter dem Namen *Cuttaca* bekannt gewesen zu sein; worüber seiner Zeit z. B. im Novemberheft des Edinburgh Review vom J. 1817. Mittheilungen gemacht wurden. Daraus folgt aber nicht, dafs die Chinesen ihre arithmetischen Forschungen von den Hindu's fertig überkommen, oder von ihnen Elemente der Arithmetik, insbesondere die grofse Erweiterungsregel, entlehnt haben; ebensowenig wie Dies von einem ihrer Religionssysteme erwiesen ist. Im Gegentheil giebt die auf geistigem Gebiete in vielen Fällen unbestritten schöpferische Thätigkeit der schwarzhaarigen Söhne *Han's* zu der wohlbegründeten Annahme Veranlassung, dafs ihre arithmetischen Forschungen von Anfang an ihr selbständiges Eigenthum, welches sie ihrer eigenen Geistes-Arbeit verdanken, gewesen sind.

Bei dem hohen Alter, welches demnach diesen Forschungen unter den Chinesen mit Grund zuzuschreiben ist, fällt es nicht auf, dafs ihre Arithmetik schon eine ungewöhnlich hohe Stufe der Ausbildung erlangt hatte; nur bleibt es merkwürdig, dafs die Chinesischen Gelehrten in ihren Schriften fast immer wieder auf den *Kiutschang* zurückgehen und ihre Gedanken nur für Entwicklungen der in diesem Werke aufgestellten Grundsätze ausgeben; offenbar in der Absicht, dadurch den Ruhm jenes uralten Autors zu vermehren. Dennoch haben seine bescheidenen Nachfolger in Wirklichkeit weit mehr geleistet, als er; sie haben zum Theil wenigstens die Arithmetik auf neuen Grundlagen zu neuen Ergebnissen weiter geführt. Namentlich geschah Dies am Schlufs des 13ten Jahrhunderts durch eine Schrift: *Leih tien yuen yih*, d. h. Aufstellung der himmlischen *Monade,* und welche, wie man sagen könnte, die chinesische *Algebra* enthält. Dies haben einige Jahrhunderte später die Europäischen, römisch-katholischen Missionare nachgewiesen, welche sich bekanntlich sehr gründlich mit dem Studium chinesischer mathematischer Werke beschäftigten. Dabei ist bemerkenswerth, dafs fast gleichzeitig drei verschiedene und ohne Verkehr unter einander arbeitende Gelehrte, die sogar einander nicht einmal kannten, in der Arithmetik denselben Fortschritt machten. Sie beziehen sich in ihren Schriften nicht Einer auf den Andern; Jeder hat

seinen Gegenstand auf besondere Weise behandelt und scheint bei seinen Forschungen von einem andern Puncte ausgegangen zu sein. Das eben genannte Werk hat wieder den mehrgedachten *Tsin Kiu tschaou* zum Verfasser; ihm dient die *Monade* als symbolische Bezeichnung einer *unbekannten Gröfse.* Die Methode, nach welcher der Verfasser seine Rechnungen vollzieht, schliefst sich der Regel *Tayen* an, und man könnte also versucht sein, nichts wirklich Neues in der Schrift zu finden. Allein die Anwendung der Regel *Tayen* ist so umfassend, dafs Gleichungen vom 6ten, 7ten, 8ten und von noch höheren Graden hier mit einer Einfachheit und Gewandtheit berechnet werden, die von dem entschieden schöpferischen Talent des Autors zeugen. Die Theorie dieses Werks findet in einem nachfolgenden, welches der gleichfalls oben erwähnte Gelehrte *Le yay Jin king* geschrieben hat, eine vollständige Erläuterung; daher wir den Inhalt dieses zum Verständnifs des ersteren hinzuziehen. *Le yay Jin king's* Schrift heifst: Spiegel für die Ausmessung oder Berechnung von Kreisen.

In dem *Tien yuen yih* des *Tsin Kiu tschaou* wird die *Eins*, die *Monade*, als Repräsentant einer unbekannten Zahl zu Grunde gelegt; als x; bei der Aufstellung der Gleichungen aber nach chinesischer Schreibmethode jede folgende Gröfse unter die vorhergehende gesetzt und der Ausdruck von Coefficienten zur Anwendung gebracht. Die erste Potenz der unbekannten Gröfse, oder x, hat ihr besonderes Schriftzeichen, welches in der Aussprache *Yuen* heifst und rechts neben die Zahl geschrieben wird; eben so wird eine Zahl, welche keinen Buchstabenwerth hat, wie wir sagen würden, mit einem besondern Schriftzeichen *Tāe* bezeichnet. Doch gilt für die Praxis der Kürze wegen der Gebrauch, das Zeichen *Yuen* wegzulassen, wenn man *Tāe* schreibt, und dieses nicht zu schreiben, wenn man *Yuen* hinsetzt. Die Gleichung $x^3 + 15x^2 + 66x - 360 = 0$ wird daher so geschrieben:

(*a.*) | d. h. Cubus von x,
(*b.*) | ▇ d. h. 15 Quadrat von x,
(*c.*) ⊤ ⊥ *Yuen*, d. h. $66x$,
(*d.*) ||| ⊤ O *Tāe*, d. h. soviel als 360.

Daraus ist zu sehen, wie die *Stellung* der Ziffern, welche den Coefficienten von x bezeichnen, von der Reihe (*d.*), oder von *Tāe* ab, die verschiedenen Potenzen von x ausdrückt: die Reihe (*d.*) bezeichnet die Zahl, *ohne* Buchstabenwerth, die darüber stehende (*c.*) die erste Potenz von x, die oberhalb

(*c.*) stehende (*b.*) die zweite Potenz, und die oberhalb (*b.*) stehende (*a.*) die dritte Potenz von x; und in dieser Folge, von unten nach oben, geht es unbegrenzt fort. Zugleich widerlegt sich auch damit aufs Neue die bisher noch vielfach aufgestellte, oben erwähnte Meinung, als sei den Chinesen der Gebrauch, durch *Stellung* den Werth der Zahlengröfsen auszudrücken, unbekannt; sowie gleichfalls aus diesem Beispiel erhellet, dafs die Chinesen, viel früher als die europäischen Gelehrten, sich einer Schreibart der Gleichungen bedienten, wonach alle, mit einem Buchstabenwerth (nach unserer Redeweise) bezeichneten Coëfficienten auf eine Seite (bei uns die linke) der ihnen insgesammt gleichen Zahl gestellt werden; die Methode nämlich, die angeführte Gleichung so zu schreiben: $x^3+15x^2+66x=360$, war in China früher üblich, als im Abendlande.

Positive und *negative* Zahlen unterscheiden die chinesischen Mathematiker dadurch, dafs sie erstere mit *rother*, letztere mit *schwarzer* Tinte schreiben. So geschieht es in dem Werk des *Tsin*; doch nicht zum ersten Mal; denn in Schriften, die aus dem 6ten Jahrhundert stammen, kommt schon Dasselbe vor. Dagegen scheint *Le yay Jin king* der erste gewesen zu sein, welcher die in den Gleichungen, wie wir sie schreiben, zur rechten Hand stehende Zahl mit einem diagonalen Strich bezeichnete. So findet sich in dem oben mitgetheilten Beispiel einer Gleichung nach chinesischer Schreib-Art, die Ziffer 0 von einem Querstrich durchschnitten.

Die, wie Wir sagen würden, zur Linken stehenden Glieder einer Gleichung heifsen bei den Chinesen *Ke tso*, die zur Rechten stehende Zahl, der die ersteren gleich sind, wird *Tung suh* oder *Yiu suh* genannt. Eine Multiplication mit der unbekannten Gröfse wird dadurch ausgedrückt, dafs die Multiplicanden eine Zeile höher gestellt werden, als die unbekannte Gröfse; soll mit dem Quadrat der letzteren multiplicirt werden, so stellt man die Multiplicanden um zwei Zeilen höher; soll es mit dem Cubus geschehen, um drei Zeilen höher u. s. f. Die dadurch entstehenden leeren Zwischenräume werden mit Nullen ausgefüllt. Die Division wird in umgekehrter Weise ausgedrückt. Man stellt die Dividenden, je nach der verschiedenen Potenz des Divisors, eine oder zwei oder drei u. s. f. Zeilen unter den Divisor. Die Gröfse welche zunächst unter der Reihe *Täe* steht, ist die Quadratwurzel; in der darauf folgenden Zeile steht die Cubikwurzel; darunter das doppelte Quadrat u. s. f. Ist die Rechnung vollzogen, so wird die Reihenfolge der einzelnen Zahlenwerthe umgekehrt, indem die zuletzt gewonnene und bei der Operation zu

unterst gestellte Zahl, nun oben an geschrieben wird, woran die übrigen in gleichfalls umgekehrter Ordnung sich anreihen. Das darnach nun oben die gesammte Zahlenreihe eröffnende Glied heifst *Schih,* die *Summe;* ist noch ein zweites Glied vorhanden, so heifst es *Fa, Divisor;* sind noch zwei mehr vorhanden, so heifst das zweite von diesen *Fang* oder *Tsung* und das unterste *Yu.* Bei jeder, aus noch mehr Gliedern bestehenden Gröfse verbleibt die Benennung *Yu* dem letzten, und die übrigen kommen zwischen dem *Fang* und dem *Yu* zu stehen und werden mit dem Ausdruck *Lihn,* und zwar, je nach ihrer Reihenfolge von *Fang* ab, mit: erstes *Lihn,* zweites *Lihn* u. s. f. bezeichnet.

Sind auf diese Weise die einzelnen zur Vollziehung der Rechnung gegebenen Gröfsen benannt und aufgeführt, so geschieht die Rechen-Operation selbst durch die, *Ling lung ka fang,* d. h. harmonisch abwechselnde Reihenfolge genannte Methode, welche nachstehendes, dem Werk des *Tsin* entnommene Beispiel näher veranschaulicht.

Aufgabe: Es soll, um den Werth von x zu finden, die Wurzel ausgezogen werden aus:

$$x^4 + 1534464\,x^2 = 526727677600.$$

Auflösung.

720 *Schang.* Werth von x.

526727577600 *Schih.*

14940217600

14940217600

0 .. *Fang.*

731124800

776249600

747010880

1534464 .... *Schang lihn.*

1044464

64464

1405536

1461936

0 ...... *Hea lihn.*

700

1400

2100

2800

2820

1 .... *Yu.*

7

Zur Vergleichung setzen wir die Lösung nach europäischer Methode daneben:

				720
1	0	1534464	731124800	526727577600
	700	490000	45124800	511787360000
	700	1044464	776249600;	14940217600
	1400	980000	29238720	14940217600
	700	64464	747010880	
	2100	1470000		
	700	1405536;		
	2800;	56400		
	20	1461936		
	2820			

Die übrigen Ziffern der Wurzel werden auf ähnliche Weise berechnet.

Der andere Autor *Yang hwuy*, ein Zeitgenosse des *Tsin* und gleichfalls Erfinder dieser Methode, schrieb eine Analyse des *Kiu tschang*, in welcher er ähnliche Regeln, aber ohne sie durch Beispiele zu erläutern, aufstellte.

Der dritte endlich, *Tschu Schi kih*, beginnt sein Werk mit folgendem „Verhältnifs der *Lihn* bei Berechnung von Zahlen bis zur achten Potenz," welches er aber nicht für etwas Neues ausgiebt, sondern eine „alte Methode" nennt, ohne dafs sich sagen liefse, wann sie zuerst erfunden sei.

```
                1   Ursprüngliche Summe.
              1   1   Factoren.
            1   2   1   Quadrat.
          1   3   3   1   Cubus.
        1   4   6   4   1   Doppeltes Quadrat.
      1   5  10  10   5   1   Fünfte Potenz.
    1   6  15  20  15   6   1   Sechste Potenz.
  1   7  21  35  35  21   7   1   Siebente Potenz.
1   8  28  56  70  56  28   8   1   Achte Potenz.
```

Die mechanische Sructur dieser Tafel, welche, wie leicht ersichtlich, beliebig weit fortgesetzt werden kann, ist an sich klar; sie enthüllt die Grundzüge für jene Operationen im *Tsin*, von denen oben ein Beispiel vorgelegt ist.

Tschu Schi kih veröffentlichte seinen „Kostbaren Spiegel der vier Elemente" (auf chinesisch: *Sze yuen yuh kihn*), wie er sein Werk überschrieb, im Jahre 1303 nach Chr. Geb. und führte seine arithmetischen Entwicklungen noch weiter, als seine beiden Zeitgenossen, indem er die Eins sowohl als bekannte, wie als unbekannte Gröfse gebrauchte. Er nahm nämlich

4 Einheiten (Elemente) an, welche er als *Himmel, Erde, Mensch* und *Ding* bezeichnete; womit er zugleich den Gedanken der Versinnlichung der Zahlenverhältnisse in allem Geschaffenen andeutete. Die drei erstgenannten Einheiten brauchte er meistentheils zur Bezeichnung bekannter Gröfsen, die letztgenannte *Wuh,* d. h. *Ding,* zur Bezeichnung unbekannter Gröfsen. Ähnlichen Darstellungen begegnet man bei europäischen Gelehrten erst im 16. Jahrhundert.

Die zu arithmetischen Rechnungen erforderliche Zusammenstellung jener 4 Einheiten oder Elemente lehrte *Tschu Schi kih* so, dafs er sie um das Wortzeichen für *Täe* herumstellte. Die Eins, welche Himmel, *Tien yuen,* bedeutet, steht unter *Täe;* die zweite Eins = Erde zur Linken, die dritte, Mensch zur Rechten von *Täe* und die vierte Eins, Ding, oberhalb *Täe.* Daraus bildet sich folgende Tafel:

1
1 *Täe* 1
1

Stellt man sich diese 4 Einheiten nach unserer Weise durch $a+b+c+x$ ausgedrückt vor, so ergeben sie, ins Quadrat erhoben, die Summe

$$a^2+2ab+2ac+2ax+b^2+2bc+2bx+c^2+2cx+x^2$$

oder, wie *Tschu Schi kih* es ausdrückt, folgende arithmetische Composition:

1
2 0 2
2
1 0 *Täe* 0 1
2
2 0 2
1

welcher, nach unserer Ausdrucksweise, folgende Aufstellung entspricht

x^2
$2bx$ 0 $2cx$
$2ax$
b^2 *Täe* c^2
$2bc$
$2ab$ 0 $2ac$
a^2

Ungeachtet der Vorzüge, welche diese Aufstellung der 4 Elemente für die Berechnung gewährt, scheint es, als sei dieselbe lange Zeit unbeachtet geblieben. Erst während der Dynastien *Yuen* und *Ming* ward sie wieder berücksichtigt. So bediente sich ihrer *Ko Schau king* zur Darlegung seines neuen Systems der Astronomie, welches den Titel *Schau schi leih* hat und während der *Yuen*-Dynastie veröffentlicht wurde. In der Mitte des 16. Jahrhunderts nahm dann *Tang Schun tschi* eine Revision des „Spiegels zur Berechnung von Kreisen", des mehrerwähnten Werks von *Le Yay,* vor, und schrieb dazu einen Commentar. Doch ist derselbe von keinem grofsen Werthe, und steht weit hinter einem Werke des *Ku Ying tseang* zurück, eines durchaus selbständigen Denkers, der aus jenem Commentar von *Tang* die Regeln des *Le Yay* zuerst kennen lernte und letztere für so wichtig hielt, dafs er sie nach dem Originaltext aufs Neue publicirte; ohne *Tang's* unerhebliche Zusätze. Vielmehr fügte er selbst dieser Auflage des ursprünglichen Textes seine eigenen Forschungen hinzu, welche aber die von *Le Yay* aufgestellten Regeln an Umfang und Tiefe weit übertreffen. Auch gab derselbe Gelehrte das astronomische Werk des *Ko Schau king,* welches „Bogen und Sinus versus" betitelt ist, aufs Neue heraus, um dadurch ebenfalls die Forschungen des *Le Yay* zur Anerkennung zu bringen. Seitdem trat wieder eine Pause in der fernern Entwicklung der Arithmetik ein; bis sie gegen Ende des 17. Jahrhunderts, unter der Regierung der Kaisers *Kanghi,* einen neuen Aufschwung gewann.

Damals ward dem gelehrten Kaiser eine Abhandlung über die *Algebra,* wie sie die europäischen Missionare nach China gebracht hatten, unter dem Titel: *Tseay kan fang* vorgelegt, deren Verfasser mehrere dieser, bei dem astronomischen Collegium angestellten Missionare waren, und die mit der vorhin ausführlich besprochenen *Tien yuen-Regel* des *Le Yay* unbekannt gewesen sein müssen. Denn sie bedienen sich in ihrer Abhandlung, zur Bezeichnung derselben Gedanken, ganz anderer Ausdrücke; was sie offenbar sonst nicht gethan haben würden; schon um ihrer Schrift, bei der bekannten Pietät der Chinesen gegen die Arbeiten ihrer Vorfahren, möglichst leicht Eingang zu verschaffen. Sie sagen z. B. statt *Tien yuen yih,* wie es bei *Le Yay* heifst, *Yih kan;* statt *Tsching* und *Fau* brauchen sie die Ausdrücke *To* und *Schaou,* statt *Tung suh* sagen sie *Teng suh* u. s. f. Besondere Auszeichnung verdient diese Abhandlung nicht, da sie, in Vergleich mit

Le Yay's Forschungen, nichts Neues enthält. Der Kaiser ***Kanghi*** aber liefs sie in der Encyklopädie der Wissenschaften, welche auf seinen Wunsch veranstaltet wurde, aufnehmen; und dadurch ist sie uns aufbewahrt worden. Wir haben dieses Werks bereits oben erwähnt. Es führt den Titel: ***Leuh leih yuen yuen,*** und wir werden noch auf einen Theil desselben ausführlicher zurückkommen. Daher mag hier nur Folgendes bemerkt werden. Der gedachte Titel heifst: „Die verborgenen Quellen der Harmonie und der Zahlen", und das Werk zerfällt in drei Haupttheile: *Astronomie, Reine-Mathematik* und *Musik*. Die von den römischen Missionaren nach China gebrachten allgemeinen mathematischen Kenntnisse, so wie insbesondere ihre astronomischen, sind in die einzelnen Abhandlungen des Werks aufgenommen, welches sich durch Gründlichkeit und Fafslichkeit, so wie durch sehr correcten Druck auszeichnet. Es ist später sehr oft im Einzelnen commentirt worden, ohne dafs die Commentare besondere Erwähnung verdienten. Noch jetzt gilt es als kaiserlich-autorisirte Norm für das kaiserliche Collegium von Astronomen in *Peking*.

Zu Anfang des 18ten Jahrhunderts ward das Studium der ***Tien Yuen***-Regel von einem Gelehrten, Namens *Mei Wuhyan,* wieder aufgenommen. Derselbe gab ein Werk unter dem Titel ***Tschih schwuy e tschin*** heraus, d. h. Perlen, die in den rothen Fufs träufeln. (Dieser auffallende Titel ist eine Anspielung auf eine Anekdote von dem alten Weisen *Hwang ti,* der bei einer Lustfahrt auf dem rothen Flufs, unweit der *Kwanlun*-Berge, mehrere werthvolle Perlen ins Wasser fallen liefs, welche erst nach sehr langer Zeit wiedergefunden wurden.) Der Verfasser stellte die Arbeit *Le Yay's* mit der genannten Abhandlung der Europäer, *Tseay kan fang* vergleichend zusammen und commentirte sie. Seitdem hat man nicht aufgehört, die ***Tien Yuen***-Regel gründlich durchzuarbeiten und von Zeit zu Zeit, mit neuen Zusätzen bereichert, wieder herauszugeben. Namentlich haben Dies mit besonderem Fleifs und Talent zwei gegen Ende des verflossenen Jahrhunderts lebende Chinesen gethan, beide Eingeborne aus ***Sutschau,*** mit Namen ***Le Juy*** und *Tschang Tun jin*. Das berühmte Werk des Ersteren ist betitelt: ***E schuh,*** d. h. nachgelassene Schriften; der Letztere hat eine Reihe von ältern Werken über die ***Tien Yuen***-Regel, mit Erläuterungen, wieder aufgelegt. Ein späterer Autor *Tschang Tso nan* schrieb ein mathematisches Compendium: ***Tsuy wei schan*** *fang swan heo,* welches, ohne jedoch Neues zu enthalten, die An-

wendung der ***Tien yuen*** Regel auf die ebene Geometrie und die Stereometrie nachweiset. Im vierten Theile dieser Schrift wird auch die Abhandlung der Europäer, ***Tseay kan fang,*** berücksichtigt; allein Dies scheint wenig Anklang bei den chinesischen Mathematikern gefunden zu haben.

Vor nicht langer Zeit ist in *Yangtschau* der „Kostbare Spiegel der vier Elemente" des *Tschu Schi kih* von dem Gelehrten *Lo Ming heang,* mit Illustrationen des ursprünglichen Textes und einer 3 Bände starken Sammlung von Regeln, neu herausgegeben worden. Diese Arbeit ist sehr gründlich und eingehend. Derselbe Autor hat auch eine Anzahl kleiner Abhandlungen über die ***Tien yuen***-Regel in ihrer Anwendung auf Trigonometrie, Astronomie u. dgl. m. veröffentlicht, und ist dazu durch Geldmittel von ***Yuen Yuen,*** welcher, als vormaliger Gouverneur von ***Canton*** den Fremden, und eben so den Eingebornen, durch seine freigebige Unterstützung der Wissenschaften und Künste sehr wohl bekannt ist, in den Stand gesetzt worden.

Seit der Thronbesteigung der *Ming*-Dynastie, bis zur Ankunft der römischen Missionare, erfreuten sich die mathematischen Wissensehaften in China keiner besondern Fürsorge. Sie geriethen dadurch in Verfall; wie sich Dies namentlich bei den Arbeiten des astronomischen Collegiums in ***Peking*** zeigte, welche zu nichts mehr taugten. Bekanntlich machte sich ***Matthäus Ricci*** um die Regeneration dieses Collegiums verdient. Er arbeitete einen Leitfaden für Arithmetik aus, welcher nachmals von einem zum Christenthum bekehrten Mandarin ***Le Tsche tsaou*** revidirt und unter dem Titel: ***Tung wan swan tschi,*** d. h. Leitfaden (Führer) für die gemeine Arithmetik, edirt wurde. Sein Nachfolger, der Jesuit *Schaal,* schrieb mehrere ausgezeichnete mathematische Werke in chinesischer Sprache, welche *mit* Veranlassung wurden, dafs der Kaiser ***Kanghi*** jene oben erwähnte Encyklopädie ausarbeiten liefs, die er selbst durchsah und mit dem gröfsten Fleifs Bogen um Bogen corrigirte. Der dritte Theil dieses vortrefflichen Werks, welcher „*Suh li tsing wan,* d. h. Repositorium der Feinheiten arithmetischer Grundregeln" überschrieben ist, behandelt die abstracten Wissenschaften, und dient noch jetzt zur Grundlage der Berechnungen des astronomischen Collegiums in ***Peking.*** Wir betrachten daher diesen Theil etwas näher.

Er zerfällt in zwei Haupt-Abschnitte, deren erster 5 Theile hat, in welchen die „Theorie der Gröfsen" abgehandelt wird. Der erste Theil beginnt mit einer Untersuchung über den Ursprung der ***Zahlen;*** es wird uns,

getreu nach Angabe chinesischer Weisen, erzählt, wie der bekannte *Fohi* das Drachenpferd aus den Fluthen des gelben Stromes herauftauchen sah, das auf seinem Rücken das *Decimalsystem* abgebildet trug. Diese Abbildung wird dann mitgetheilt; zugleich eine andere, welche der grofse Weise *Yu* auf dem Rückenschild einer Schildkröte verzeichnet fand, die aus den Wellen des Flusses *Lo* hervortauchte. Den Beschlufs des ersten Theils macht das zu Anfang dieser Abhandlung erwähnte Werk *Tschau pi.* Die drei folgenden Theile enthalten in 12 Büchern eine Anleitung zur Geometrie, welche aber der des *Euklid* an Klarheit und Gründlichkeit nachsteht. Es wird hier von Ebenen und Körpern in jeglicher Gestalt das Nöthige vorgetragen; im letzten Buche kommen die Proportionen zur Sprache; wobei Pläne und Entwürfe zur Anfertigung von Rissen und andern Zeichnungen gegeben werden. Der fünfte Theil umfafst, was man etwa „Arithmetik in Bildern" nennen könnte; es werden die Theorien für Berechnungen gründlich durchgegangen und durch Beispiele und Figuren erläutert. Der zweite Haupt-Abschnitt handelt in 40 Capiteln von der Anwendung der Arithmetik und zerfällt in 5 Abtheilungen. Die erste, einleitende Abtheilung, welche aus zwei Capiteln besteht, bringt Tabellen über Gewichte und Maafse, Darstellungen der Addition, Subtraction, Multiplication, Division und der Brüche. Die zweite, 8 Capitel zählende Abtheilung, handelt von den Linien, von Proportionen und Progressionen, von der Vermischungsregel, der Gesellschaftsrechnung, der Rechnung von Gewinn und Verlust, und von den Gleichungen. Die zwölf Capitel, aus denen die dritte Abtheilung besteht, beschäftigen sich mit der Berechnung der Oberfläche von Körpern; mit dem Ausziehen der Quadratwurzel; der ältern und neuern Trigonometrie; dem Gebrauch der acht trigonometrischen Linien; der Methode, die Seiten eines Dreiecks durch einander zu bestimmen; der Flächenmessung; der Ausmessung von gerade- und krummlinigen Figuren, der Kreis-Abschnitte und regulären Polygone. Die vierte Abtheilung bespricht in 8 Capiteln die Körper; die Ausziehung der Cubikwurzeln; die Ausmessung von Körpern mit gerade- und krummlinigen Oberflächen, von Kugeln und Kugel-Abschnitten, von Polyëdern; das Gewicht von thierischen, vegetabilischen und mineralischen Stoffen; endlich die Haufen. Die fünfte Abtheilung umfafst 10 Capitel, mit Abhandlungen über Algebra; über verschiedene damit zusammenhangende Aufgaben; über Logarithmen und den Gebrauch der Sectoren. Dann folgen 8 Supplementbände; mit Tafeln. Die zwei ersten Bände geben die Berech-

nungen der Sinus und Cosinus, der Tangenten und Cotangenten, der Secanten und Cosecanten, bis zu 90 Grad. Der dritte und vierte Band enthält die Divisoren der Zahlen von 1 bis 100000, zur Erleichterung der Rechnung mit *Logarithmen;* am Schlufs jeder Reihe von 10000 folgt ein Verzeichnifs der *Primzahlen.* Der fünfte und sechste Band besteht aus Tabellen für Logarithmen von 1 bis 100000, mit 10 Stellen, welche augenscheinlich ein Abdruck der 1628 in Holland von *Hadrian Vlacq* herausgegebenen sind. Am Schlufs stehen die Regeln, wonach sich die Logarithmen von noch gröfseren Zahlen berechnen lassen, und eine Übersicht des spezifischen Gewichts verschiedener Substanzen. Der siebente und achte Band enthält Tabellen für die Logarithmen der Sinus und Cosinus, der Tangenten und Cotangenten, der Secanten und Cosecanten, von 0 bis zu 90 Grad. Alles Dies ist in einem eleganten, aber populären Stil vorgetragen, und offenbar darauf berechnet, von allen Gebildeten in China gelesen und verstanden zu werden. Es ist daran nichts weiter zu tadeln, als etwa die Weitschichtigkeit des Ganzen, die sich aber durch die encyklopädische Darstellung rechtfertigt.

Die Erfindung der *Logarithmen* schreiben sich übrigens die Chinesen als ihr Eigenthum zu; wenigstens sagt ein gegenwärtig zu *Schanghai* lebender Mathematiker *Le Schen lan* in seiner Schrift: *Tuy suh tan yuen,* d. h. Entdeckung des Ursprungs der Logarithmen, worin er eine neue, auf geometrische Formeln basirte Berechnung der Logarithmen aufstellt, dafs diese neue Methode „zehntausendmal leichter sei, als die bisher bei den Europäern gebräuchliche" und dafs sie seine neu entdeckte Methode nicht kennten. Man mufs dies einem Manne zu Gute halten, der sich nur auf den Inhalt des encyklopädischen Werks vom Kaiser *Kanghi* beziehen kann, und dessen selbständige Erfindung daher die gröfste Anerkennung verdient; auch wenn sie für Uns nichts Neues enthält. Ein Mandarin in *Hangtschau,* Namens *Tä heu,* ist auch damit beschäftigt, eine neue Berechnungs-Art der Logarithmen zu veröffentlichen.

Wie man vernimmt, beginnt gegenwärtig überall im grofsen chinesischen Reiche ein neuer Aufschwung der Wissenschaften. Freilich tritt seit fünf Jahren der gewaltige Bürgerkrieg, der die bestehende Verfassung in ihren Grundvesten erschüttert, sie zum Theil schon zertrümmert und das herrschende System der Ordnung ganz aus den Fugen gedrängt hat, hemmend dazwischen. Allein der neue Gegenkaiser, der in *Nanking* residirt, hat dort

die jährlichen Prüfungen der jungen Studirenden, die in den letzten Jahren eingestellt waren, jetzt wieder eingerichtet; er ist selbst ein Gelehrter, und man kann daher von ihm nur Förderung der Wissenschaften erwarten. Und dafs die chinesischen Wissenschaften solcher Förderung werth sind und die chinesische Nation überhaupt auf der Stufe wissenschaftlicher Cultur eine nicht unbedeutende Stellung einnimmt, dürfte, wenigstens für *eine* Wissenschaft, und für eine der edelsten, viel Talent, Fleifs und Ausdauer erfordernde, aus den vorstehenden Zeilen erhellen.

Berlin, im April 1855.

6.

Bemerkung über die Auflösung der biquadratischen Gleichungen.

(Von Herrn Dr. *S. Aronhold* zu Berlin.)

Bezeichnet man die gegebene Gleichung durch

$$ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e = 0$$

und berechnet die Determinanten

$$\Delta = \begin{vmatrix} a, & b & c+2\lambda \\ b, & c-\lambda, & d \\ c+2\lambda, & d, & e \end{vmatrix}; \quad \frac{\partial\Delta}{\partial e} = \begin{vmatrix} a, & b \\ b, & c-\lambda \end{vmatrix},$$

so ist

$$\Delta = 0$$

eine *cubische* Gleichung von der Form

$$\Delta = -4\lambda^3 + R + Q = 0,$$

welche, wegen des fehlenden zweiten Gliedes, direct durch die Cardanische Regel aufgelöset werden kann. Sind nun $\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)_1$, $\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)_2$, $\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)_3$ die Werthe der andern Determinante, welche den 3 Wurzeln dieser Gleichung entsprechen, so ist

$$x = \frac{1}{a}\left\{-b \pm \sqrt{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)_1} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)_2} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)_3}\right\};$$

wo die zusammengehörigen Zeichen so zu nehmen sind, dafs ihr Product *positiv* ist.

Noch allgemeiner hat man, für beliebige Werthe von ξ und η:

$$\frac{(ax+b)\xi^3+3(bx+c)\xi^2\eta+3(cx+d)\xi\eta^2+(dx+e)\eta^3}{\xi - x\eta}$$

$$= \begin{cases} \pm\sqrt{\left[\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)_1\xi^4 - \left(\frac{\partial\Delta}{\partial d}\right)_1\xi^3\eta + \left(\frac{\partial\Delta}{\partial c}\right)_1\xi^2\eta^2 - \left(\frac{\partial\Delta}{\partial b}\right)_1\xi\eta^3 + \left(\frac{\partial\Delta}{\partial a}\right)_1\eta^4\right]} \\ \pm\sqrt{\left[\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)_2\xi^4 - \left(\frac{\partial\Delta}{\partial d}\right)_2\xi^3\eta + \left(\frac{\partial\Delta}{\partial c}\right)_2\xi^2\eta^2 - \left(\frac{\partial\Delta}{\partial b}\right)_2\xi\eta^3 + \left(\frac{\partial\Delta}{\partial a}\right)_2\eta^4\right]} \\ \pm\sqrt{\left[\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)_3\xi^4 - \left(\frac{\partial\Delta}{\partial d}\right)_3\xi^3\eta + \left(\frac{\partial\Delta}{\partial c}\right)_3\xi^2\eta^2 - \left(\frac{\partial\Delta}{\partial b}\right)_3\xi\eta^3 + \left(\frac{\partial\Delta}{\partial a}\right)_3\eta^4\right]}; \end{cases}$$

woraus der obige Werth von x folgt, wenn man $\xi = 1$, $\eta = 0$ setzt. Für $\xi = 0$, $\eta = 1$ erhält man den Werth von $\frac{1}{x}$.

Die Determinanten sind hier übrigens immer so zu bilden, dafs das aus der ersten Diagonale entstehende Glied *negativ* genommen wird.

Berlin, im Juni 1855.

7.

Transformation der Gleichung der Curven 14ten Grades, welche eine gegebene Curve 4ten Grades in den Berührungspuncten ihrer Doppeltangenten schneiden.

(Von Herrn Dr. *O. Hesse*, Prof. der Math. an der Universität zu Königsberg i. Pr.)

In Bd. 40. S. 260 dieses Journals findet man die Gleichung der Curven 14ten Grades aufgestellt, welche eine gegebene Curve 4ten Grades in den 56 Berührungspuncten ihrer Doppeltangenten schneidet, und in Bd. 41. S. 292 habe ich diese Gleichung hergeleitet.

Durch ein etwas abgekürztes Verfahren hat Herr *Salmon*, auf demselben Wege, ganz dieselbe Gleichung erlangt, und zugleich eine geometrische Interpretation des einen Theils der Gleichung gegeben (A treatise on the higher plane curves pag. 89). Auch dem zweiten Theile der Gleichung läfst sich mit Hülfe des in diesem Journ. Bd. 45. S. 87 angegebenen Satzes eine geometrische Deutung unterlegen.

Mit Hülfe der Gleichung der gegebenen Curve läfst sich aber die erwähnte Gleichung vom 14ten Grade auf unendlich viele Arten *transformiren*, und ich werde ihr in Folgendem eine entsprechendere Form geben, in welcher auf *jeden* ihrer beiden Theile die *Salmon*sche Interpretation Anwendung findet.

Es seien irgend *neun* Gröfsen $v_\varkappa^\lambda$ gegeben, wo die Indices $\varkappa$ und λ die Zahlen 1, 2, 3 bedeuten. Irgend *neun* andere gegebene Gröfsen sollen durch $w_\varkappa^\lambda$ bezeichnet werden. In dieser Voraussetzung lassen sich immer 9 Gröfsen $b_\varkappa^\lambda$ so angeben, dafs der Gleichung

$$(1.)\qquad v_1^\lambda b_1^\varkappa + v_2^\lambda b_2^\varkappa + v_3^\lambda b_3^\varkappa = w_\varkappa^\lambda$$

Genüge geschieht.

In der That drückt diese Gleichung, da $\varkappa$ und λ die Zahlen 1, 2, 3 sind, *neun*, in Rücksicht auf die Gröfsen b lineäre Gleichungen aus, welche grade diese Gröfsen unzweideutig bestimmen. Da aber nur drei von den Gröfsen, nämlich $b_1^\varkappa$, $b_2^\varkappa$, $b_3^\varkappa$, in die Gleichungen eingehen, indem man $\lambda = 1, 2, 3$

setzt, so erhält man durch Auflösung dieser drei Gleichungen:

$$(2.)\quad V_\lambda^1 w_\varkappa^1 + V_\lambda^2 w_\varkappa^2 + V_\lambda^3 w_\varkappa^3 = V b_\lambda^\varkappa;$$

wo durch V die Determinante aus den 9 Gröfsen v, und durch $V_\lambda^\varkappa$ ihre nach $v_\lambda^\varkappa$ genommenen partiellen Differentialquotienten bezeichnet werden.

Wir wollen ferner folgende Bezeichnungen annehmen:

$$(3.)\quad \begin{cases} v_1^\varkappa x_1 + v_2^\varkappa x_2 + v_3^\varkappa x_3 = v^\varkappa, \\ w_1^\varkappa x_1 + w_2^\varkappa x_2 + w_3^\varkappa x_3 = w^\varkappa. \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf diese Bezeichnungen ergiebt sich aus der Gleichung (2.), wenn man sie mit $x_\varkappa$ multiplicirt, und dann 1, 2, 3 für $\varkappa$ setzt und addirt:

$$V_\lambda^1 w^1 + V_\lambda^2 w^2 + V_\lambda^3 w^3 = V\{b_\lambda^1 x_1 + b_\lambda^2 x_2 + b_\lambda^3 x_3\}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit w^λ und setzt hierauf für λ die Zahlen 1, 2, 3, so findet sich für die *Summe* aller der Gleichungen:

$$(4.)\quad \Sigma V_\lambda^\varkappa w^\varkappa w^\lambda$$
$$= V\{(b_1^1 w^1 + b_2^1 w^2 + b_3^1 w^3)x_1 + (b_1^2 w^1 + b_2^2 w^2 + b_3^2 w^3)x_2 + (b_1^3 w^1 + b_2^3 w^2 + b_3^3 w^3)x_3\}.$$

Wenn man dagegen in (2.) $\varkappa = \lambda$ und hierauf für λ die Zahlen 1, 2, 3 setzt, so giebt die Addition

$$\Sigma V_\lambda^\varkappa w_\lambda^\varkappa = V\{b_1^1 + b_2^2 + b_3^3\}$$

oder

$$(5.)\quad \Sigma V_\lambda^\varkappa w_\lambda^\varkappa = V\beta,$$

wenn der Kürze wegen

$$(6.)\quad \beta = b_1^1 + b_2^2 + b_3^3$$

gesetzt wird. Multiplicirt man endlich die Gleichung (5.) mit $w^1 x_1 + w^2 x_2 + w^3 x_3$ und zieht sie von (4.) ab, so erhält man:

$$(7.)\quad \Sigma V_\lambda^\varkappa w^\varkappa w^\lambda - (w^1 x_1 + w^2 x_2 + w^3 x_3)\Sigma V_\lambda^\varkappa w_\lambda^\varkappa$$
$$= V\{[(b_1^1 - \beta)w^1 + b_2^1 w^2 + b_3^1 w^3]x_1 + [b_1^2 w^1 + (b_2^2 - \beta)w^2 + b_3^2 w^3]$$
$$+ [b_1^3 w^1 + b_2^3 w^2 + (b_3^3 - \beta)]x_3\}.$$

Um einen diesem ähnlichen Ausdruck aufzustellen, der aus ihm durch Vertauschung der Elemente v und w hervorgeht, löse man die Gleichung (1.) nach den 9 Gröfsen v auf. Dies giebt:

$$(8.)\quad w_1^\lambda c_1^\varkappa + w_2^\lambda c_2^\varkappa + w_3^\lambda c_3^\varkappa = c v_\varkappa^\lambda,$$

wo c die aus den 9 Gröfsen b gebildete Determinante, und $c_\varkappa^\lambda$ ihren nach $b_\lambda^\varkappa$ genommenen partiellen Differentialquotienten bedeutet.

Man sieht leicht, dafs die Bezeichnungen in (1. und 8.) in den beiden Gleichungen (3.) so angenommen sind, dafs diese Gleichungen *in einander übergehen*, wenn man überall die Buchstaben v und w mit einander vertauscht, und zugleich $b_\varkappa^\lambda$ mit $\frac{c_\varkappa^\lambda}{c}$. Der Vortheil der Bezeichnungs-Art ist klar; denn da die Gleichung (7.) aus den genannten hervorgegangen ist, so ist es erlaubt, auch in dieser Gleichung die angegebene Vertauschung zu machen; wodurch sich dann, wenn man berücksichtiget, dafs die aus den 9 Gröfsen w gebildete Determinante $W = V.c$ ist,

$$(9.)\quad \Sigma W_\lambda^\varkappa v^\varkappa v^\lambda - (v^1 x_1 + v^2 x_2 + v^3 x_3)\Sigma W_\lambda^\varkappa v_\lambda^\varkappa$$
$$= V\{[(c_1^1-\gamma)v^1 + c_2^1 v^2 + c_3^1 v^3]x_1 + [c_1^2 v^1 + (c_2^2-\gamma)v^2 + c_3^2 v^3]x_2$$
$$+ [c_1^3 v^1 + c_2^3 v^2 + (c_3^3-\gamma)v^3]x_3\}$$

ergiebt, in welcher Gleichung der Kürze wegen

$$(10.)\quad \gamma = c_1^1 + c_2^2 + c_3^3$$

gesetzt ist.

Wir kehren wieder zu den Gleichungen (1.) und deren Auflösungen (8.) zurück. Multiplicirt man dieselben mit $x_\varkappa$, setzt dann $\lambda = 1, 2, 3$, und addirt, so erhält man:

$$(11.)\quad \begin{cases} v_1 b_1^\varkappa + v_2 b_2^\varkappa + v_3 b_3^\varkappa = w_\varkappa, \\ w_1 c_1^\varkappa + w_2 c_2^\varkappa + w_3 c_3^\varkappa = c v_\varkappa; \end{cases}$$

unter der Voraussetzung, dafs $v_\varkappa$, $w_\varkappa$ folgende Bedeutung haben:

$$(12.)\quad \begin{cases} v_\varkappa^1 x_1 + v_\varkappa^2 x_2 + v_\varkappa^3 x_3 = v_\varkappa, \\ w_\varkappa^1 x_1 + w_\varkappa^2 x_2 + w_\varkappa^3 x_3 = w_\varkappa. \end{cases}$$

Die erste der Gleichungen (11.) stellt ein System von drei, in Rücksicht auf die Variabeln v_1, v_2, v_3 linearen Gleichungen, und die letzte die nach diesen Variabeln aufgelöseten Gleichungen dar. Mit diesen Gleichungen findet aber zugleich folgendes merkwürdige System von Gleichungen Statt:

$$(13.)\quad \begin{cases} (b_1^1-\beta)w_1 - b_2^1 w_2 + b_3^1 w_3 = (c_1^1-\gamma)v_1 + c_2^1 v_2 + c_3^1 v_3, \\ b_1^2 w_1 + (b_2^2-\beta)w_2 + b_3^2 w_3 = c_1^2 v_1 + (c_2^2-\gamma)v_2 + c_3^2 v_3, \\ b_1^3 w_1 + b_3^3 w_2 + (b_2^3-\beta)w_3 = c_1^3 v_1 + c_2^3 v_2 + (c_3^3-\gamma)v_3. \end{cases}$$

Aus den drei Gleichungen, welche die erste Gleichung (11.) darstellt, ergiebt sich nämlich:

$$-b_2^2 w_1 + b_2^1 w_2 = -c_3^3 v_1 + c_3^1 v_3,$$
$$-b_3^2 w_1 + b_2^1 w_3 = -c_2^2 v_1 + c_2^1 v_2,$$

und wenn man diese beiden Gleichungen addirt, so erhält man die erste Gleichung (13.).

Die Gleichungen (13.) zeigen, das die Ausdrücke (7. und 9.) einander gleich sind, wenn $v^\varkappa = v_\varkappa$ und $w^\varkappa = w_\varkappa$ ist. Das Letztere ist der Fall, wenn $v_\varkappa^\lambda = v_\lambda^\varkappa$ und $w_\varkappa^\lambda = w_\lambda^\varkappa$ ist. Es findet also unter dieser Voraussetzung folgende identische Gleichung Statt:

$$(14.)\quad \Sigma V_\lambda^\varkappa w_\varkappa w_\lambda - (w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3)\Sigma V_\lambda^\varkappa w_\lambda^\varkappa$$
$$= \Sigma W_\lambda^\varkappa v_\varkappa v_\lambda - (v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3)\Sigma W_\lambda^\varkappa v_\lambda^\varkappa.$$

Von dieser identischen Gleichung lassen sich interessante Anwendungen in der *Geometrie* machen, wenn man durch $v_\varkappa^\lambda$ die zweiten partiellen Differentialquotienten einer gegebenen homogenen Function v, $p$ten Grades, von den Variabeln x_1, x_2, x_3 bezeichnet, und durch $w_\varkappa^\lambda$ die zweiten partiellen Differentialquotienten einer andern gegebenen homogenen Function $q$ten Grades, von denselben Variabeln. Aus den Gleichungen (12.) folgt alsdann, mit Berücksichtigung der bekannten Eigenschaft der homogenen Functionen:

$$v_\varkappa = (p-1)\frac{\partial v}{\partial x_\varkappa}, \qquad w_\varkappa = (q-1)\frac{\partial w}{\partial x_\varkappa};$$

und da

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = p(p-1)v,$$
$$w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 = q(q-1)w$$

ist, so ergiebt sich aus (14.), wenn man für $v_\varkappa$ und $w_\varkappa$ respective $(p-1)v_\varkappa$ und $(q-1)w_\varkappa$ setzt:

$$(15.)\quad (q-1)^2\Sigma V_\lambda^\varkappa w_\varkappa w_\lambda - q(q-1)w\Sigma V_\lambda^\varkappa w_\lambda^\varkappa$$
$$= (p-1)^2\Sigma W_\lambda^\varkappa v_\varkappa v_\lambda - p(p-1)v\Sigma W_\lambda^\varkappa v_\lambda^\varkappa;$$

in welcher Gleichung $v_\varkappa$ und $w_\varkappa$ die ersten partiellen Differentialquotienten der Functionen v und w bedeuten.

Wir wollen nun diese identische Gleichung (15.), in der Voraussetzung dafs $p=q=2$ ist, in welcher die Gleichungen $v=0$ und $w=0$ *zwei Kegelschnitte* darstellen, *geometrisch* deuten. Die Gleichung $\Sigma V_\lambda^\varkappa w_\varkappa w_\lambda = 0$, welche ebenfalls die Gleichung eines *Kegelschnitts* ist, stellt den *geometrischen Ort der Pole aller Tangenten des Kegelschnitts* v in Rücksicht auf den Kegelschnitt w dar. Dieser Kegelschnitt geht mithin durch die 4 Puncte, in welchen die, den beiden Kegelschnitten v und w gemeinschaftlichen Tangenten den Kegelschnitt w *berühren*. Diese Eigenschaft hat aber auch der durch folgende Gleichung dargestellte Kegelschnitt:

$$(q-1)^2 \Sigma V_\lambda^x w_x w_\lambda - q(q-1) w \Sigma V_\lambda^x w_\lambda^x = 0.$$

Da nun auf gleiche Weise der Kegelschnitt

$$(p-1)^2 \Sigma W_\lambda^x v_x v_\lambda - p(p-1) v \Sigma W_\lambda^x v_\lambda^x = 0$$

durch die 4 Puncte geht, in welchen die den beiden Kegelschnitten v und w gemeinschaftlichen Tangenten den Kegelschnitt v berühren, und beide Kegelschnitte, deren Gleichungen zuletzt aufgestellt wurden, nach (15.), in *einen* zusammenfallen, so wird dadurch der bekannte Satz bewiesen: *Dafs sich durch die 8 Berührungspuncte der, zweien Kegelschnitten u und v gemeinschaftlichen Tangenten, wieder ein Kegelschnitt legen läfst,* dessen analytischer Ausdruck irgend eine der beiden zuletzt aufgestellten Gleichungen ist.

Es wurde aber die identische Gleichung (15.) deshalb entwickelt, um sie in dem Falle $p=4$ und $q=6$ zu benutzen; in welchem Falle die Gleichung in folgende übergeht:

$$(16.) \quad 25 \Sigma V_\lambda^x w_x w_\lambda - 30 w \Sigma V_\lambda^x w_\lambda^x = 9 \Sigma W_\lambda^x v_x v_\lambda - 12 v \Sigma W_\lambda^x v_\lambda^x.$$

Man lasse aufserdem die Function w, vom 6ten Grade, die Determinante bedeuten, welche aus den zweiten partiellen Differentialquotienten der gegebenen homogenen Function v, 4ten Grades, von den Variabeln x_1, x_2, x_3, gebildet wird. Dies ist dieselbe Function, die im Vorhergehenden durch V bezeichnet wurde.

Diese identische Gleichung (16.) dient nun dazu, die in Bd. 40. S. 260 und Bd. 41. S. 292 angegebene Gleichung der Curve 14ten Grades, welche die gegebene Curve 4ter Ordnung $v=0$ in den Berührungspuncten ihrer Doppeltangenten schneidet und welche sich durch

$$(17.) \quad \Sigma V_\lambda^x w_x w_\lambda - 30. w \Sigma V_\lambda^x w_\lambda^x = 0$$

darstellen läfst, auf mehrfache Art *umzugestalten.*

Am besten wird es sein, die Summe $\Sigma V_\lambda^x w_\lambda^x$ zu eliminiren; wodurch man, mit Berücksichtigung der Gleichung $v=0$, für die Curve 14 Grades, welche die gegebene Curve $v=0$ 4ten Grades in den Berührungspuncten ihrer Doppeltangenten schneidet, die transformirte Gleichung

$$(18.) \quad 5 \Sigma V_\lambda^x w_x w_\lambda = 3 \Sigma W_\lambda^x v_x v_\lambda$$

erhält.

Wenn man für die Zeichen in dieser Gleichung ihre Werthe setzt, und zugleich für die Summen die Determinantenformen anwendet, so stellt sich

die Gleichung wie folgt dar:

$$5.\begin{vmatrix}
\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_1\,\partial x_2} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_1\,\partial x_3} & \frac{\partial w}{\partial x_1}\\
\frac{\partial^2 v}{\partial x_2\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_2\,\partial x_2} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_2\,\partial x_3} & \frac{\partial w}{\partial x_2}\\
\frac{\partial^2 v}{\partial x_3\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_3\,\partial x_2} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_3\,\partial x_3} & \frac{\partial w}{\partial x_3}\\
\frac{\partial w}{\partial x_1} & \frac{\partial w}{\partial x_2} & \frac{\partial w}{\partial x_3} & 0
\end{vmatrix} = 3.\begin{vmatrix}
\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2} & \frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_3} & \frac{\partial v}{\partial x_1}\\
\frac{\partial^2 w}{\partial x_2\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 w}{\partial x_2\,\partial x_2} & \frac{\partial^2 w}{\partial x_2\,\partial x_3} & \frac{\partial v}{\partial x_2}\\
\frac{\partial^2 w}{\partial x_3\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 w}{\partial x_3\,\partial x_2} & \frac{\partial^2 w}{\partial x_3\,\partial x_3} & \frac{\partial v}{\partial x_3}\\
\frac{\partial v}{\partial x_1} & \frac{\partial v}{\partial x_2} & \frac{\partial v}{\partial x_3} & 0
\end{vmatrix}$$

in welcher w die Determinante

$$w = \begin{vmatrix}
\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_1\,\partial x_2} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_1\,\partial x_3}\\
\frac{\partial^2 v}{\partial x_2\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_2\,\partial x_2} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_2\,\partial x_3}\\
\frac{\partial^2 v}{\partial x_3\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_3\,\partial x_2} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_3\,\partial x_3}
\end{vmatrix}$$

bedeutet und $v = 0$ die Gleichung der gegebenen Curve 4ten Grades ist.

Königsberg, im Januar 1855.

8.
Über die Bewegung eines Ellipsoïds in einer tropfbaren Flüssigkeit.

(Von dem Herrn Dr. phil. *Clebsch* zu Danzig.)

---

§. 1.
Einleitung.

Man stelle sich eine tropfbare Flüssigkeit, den Raum nach allen Seiten hin erfüllend vor. In der Flüssigkeit bewege sich ein Körper, dessen Gestalt vor der Hand nicht näher bestimmt werden mag; und alle Bewegung, welche die Flüssigkeit erhält, rühre von der Bewegung dieses Körpers her, so dafs man die unendlich entfernten Theilchen als in steter Ruhe betrachten kann.

Bei der Bestimmung des Widerstandes, welchen der Körper durch das ihn umgebende Medium erleidet, kommen mehrere Ursachen in Betracht, welche sich in zwei Classen theilen lassen. In die *erste* setze ich die *Druckkräfte,* welche mittels bekannter Hypothesen einer sichern mathematischen Schätzung unterworfen sind; in die *zweite* die *Reibung;* nebst andern ihr verwandten Ursachen, welche der mathematischen Behandlung noch weniger zugänglich sind, als die Reibung.

Ich werde mich im Folgenden nur mit dem *ersten* Theile beschäftigen, aus dessen Betrachtung sich einige, nicht uninteressante Folgerungen ziehen lassen werden. Eine derartige Aufgabe hat zuerst *Poisson* für die Bewegung eines Pendels in einer gasförmigen Flüssigkeit abgehandelt (Mém. de l'Acad. des sciences, tome XI.) Später hat *Dirichlet* für die Bewegung einer *Kugel* in einer tropfbaren Flüssigkeit die hauptsächlichsten Resultate angegeben (Monatsberichte der Berl. Akademie 1852), und zugleich auf die Möglichkeit hingewiesen, das Entsprechende für ein *Ellipsoïd* zu erreichen. Ich habe daher versucht, nachdem ich die allgemeinere Aufgabe in kurzen Umrissen angedeutet, im Speciellen die bei der Bewegung eines *Ellipsoïds* eintretenden Verhältnisse näher zu untersuchen.

Die erlangten Resultate mit der *Erfahrung* zu vergleichen, war wenig thunlich. Wo es möglich war, habe ich die Schrift von *Duchemin* (Experi-

mental-Untersuchungen über den Widerstand von Flüssigkeiten, übersetzt von *Schnuse*) benutzt; doch konnte Dies um so seltener geschehen, als leider *Duchemin* grofsentheils mit Körpern operirt hat, deren Oberfläche einer analytischen Behandlung zu grofse Schwierigkeiten entgegensetzt.

Die Gleichungen, auf welchen das Problem beruht, sind die gewöhnlichen hydrodynamischen. Die Grenzbedingungen, welche zur Bestimmung der willkürlichen Functionen nöthig sind, erhält man, wenn man die im Unendlichen liegenden Flüssigkeitstheilchen als stets *ruhend*, diejenigen aber, welche den Körper berühren, als auf ihm *gleitend* betrachtet. Die Geschwindigkeiten eines Flüssigkeitstheilchens nach den Coordinaten-Axen stellen sich dabei, wie es in der Hydrodynamik zu geschehen pflegt, als Differentialquotienten *einer* Function dar. Soviel mag in der Einleitung erwähnt sein, um späteren Weitläufigkeiten vorzubeugen.

§. 2.

Allgemeine Gleichungen, die Einführung geeigneter Coordinaten betreffend.

Um die Gleichungen des Problems in geeigneter Form aufzustellen, sind einige allgemeine Formeln voranzuschicken.

Es seien x_1, x_2, x_3 die Coordinaten eines Puncts, bezogen auf ein *im Raume festes* Coordinatensystem. In demselben System habe ein Punct des festen Körpers, ich will sagen, sein *Schwerpunct*, die Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3. Man nehme ein zweites, *im Körper festes* Coordinatensystem y, y', y'', an, dessen Anfangspunct der *Schwerpunct* ist, und dessen Axen die Haupt-Axen des Körpers sind. Die neuen Coordinaten hangen mit den alten durch Gleichungen von der Form

$$(1.)\quad \begin{cases} x-\xi = a_0^0 y + a_0' y' + a_0'' y'', & y-\eta = a_0^0 x + a_1^0 x_1 + a_2^0 x_2, \\ x_1-\xi_1 = a_1^0 y + a_1' y' + a_1'' y'', & y'-\eta' = a_0' x + a_1' x_1 + a_2' x_2, \\ x_2-\xi_2 = a_2^0 y + a_2' y' + a_2'' y'', & y''-\eta'' = a_0'' x + a_1'' x_1 + a_2'' x_2, \end{cases}$$

$$(2.)\quad \begin{cases} -\xi = a_0^0 \eta + a_0' \eta' + a_0'' \eta'', & -\eta = a_0^0 \xi + a_1^0 \xi_1 + a_2^0 \xi_2, \\ -\xi_1 = a_1^0 \eta + a_1' \eta' + a_1'' \eta'', & -\eta' = a_0' \xi + a_1' \xi_1 + a_2' \xi_2, \\ -\xi_2 = a_2^0 \eta + a_2' \eta' + a_2'' \eta'', & -\eta'' = a_0'' \xi + a_1'' \xi_1 + a_2'' \xi_2, \end{cases}$$

zusammen, wo zwischen den a die bekannten Gleichungen Statt finden, und wo die η die Coordinaten des alten Anfangspuncts im neuen System sind. Bei der Bewegung werden die a, x, y, ξ, η zu Functionen der *Zeit;* doch bleiben die y constant, für alle Puncte des Körpers.

Die Geschwindigkeiten des Puncts x, x_1, x_2 werden, wenn derselbe in die Flüssigkeit fällt, nach der obigen Annahme zu:

$$(3.)\quad \begin{cases} u = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \\ u_1 = \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \\ u_2 = \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}. \end{cases}$$

Die relativen Geschwindigkeiten, welche ein Theilchen der Flüssigkeit in dem selbst bewegten Systeme der y annimmt, sind also:

$$(4.)\quad \begin{cases} v = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + \dfrac{d\eta}{dt} + \dfrac{x\,da_0^0 + x_1\,da_1^0 + x_2\,da_2^0}{dt}, \\ v' = \dfrac{dy'}{dt} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y'} + \dfrac{d\eta'}{dt} + \dfrac{x\,da'_0 + x_1\,da'_1 + x_2\,da'_2}{dt}, \\ v'' = \dfrac{dy''}{dt} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y''} + \dfrac{d\eta''}{dt} + \dfrac{x\,da''_0 + x_1\,da''_1 + x_2\,da''_2}{dt}, \end{cases}$$

oder, wenn man Alles durch die a und die y ausdrückt:

$$(5.)\quad \begin{cases} v = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} - A - y''A^{10} + y'A^{20}, \\ v = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y'} - A' - yA^{21} + y''A^{01}, \\ v'' = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y''} - A'' - y'A^{02} + yA^{12}, \end{cases}$$

wo die Gröfsen A die Werthe

$$(6.)\quad \begin{cases} A\,dt = a_0^0\,d\xi + a_1^0\,d\xi_1 + a_2^0\,d\xi_2, \\ A'\,dt = a'_0\,d\xi + a'_1\,d\xi_1 + a'_2\,d\xi_2, \\ A''\,dt = a''_0\,d\xi + a''_1\,d\xi_1 + a''_1\,d\xi_2 \end{cases}$$

haben. Die übrigen A sind die von *Poisson* (Mécan. tome II.) bei der Rotation eines Körpers durch p, q, r bezeichneten Gröfsen

$$(7.)\quad \begin{cases} A^{10}dt = A^{01}dt = (a'_0\,da_0^0 + a'_1\,da_1^0 + a'_2\,da_2^0) = -(a_0^0\,da'_0 + a_1^0\,da'_1 + a_2^0\,da'_2), \\ A^{21}dt = A^{12}dt = (a''_0\,da'_0 + a''_1\,da'_1 + a''_2\,da'_2) = -(a'_0\,da''_0 + a'_1\,da''_1 + a'_2\,da''_2), \\ A^{02}dt = A^{20}dt = (a_0^0\,da''_0 + a_1^0\,da''_1 + a_2^0\,da''_2) = -(a''_0\,da_0^0 + a''_1\,da_1^0 + a''_2\,da_2^0). \end{cases}$$

Man führe endlich statt der y, y', y'' als Variabeln die drei Parameter eines Systems orthogonaler Oberflächen μ, μ_1, μ_2 ein, welches mit dem Körper fest verbunden angenommen wird, so dafs

$$(8.)\quad \begin{cases} \mu = F(yy'y''), & y = f(\mu\,\mu_1\,\mu_2), \\ \mu_1 = F_1(yy'y''), & y' = f'(\mu\,\mu_1\,\mu_2), \\ \mu_2 = F_2(yy'y''), & y'' = f''(\mu\,\mu_1\,\mu_2) \text{ ist.} \end{cases}$$

Die Functionen F, f sollen so bestimmt sein, dafs

$$(9.)\quad \mu = \mu_0$$

die *Oberfläche* des gegebenen Körpers giebt, und dafs man ferner, indem μ wächst, Oberflächen erhält, deren jede die vorhergehende einschliefst, so dafs endlich $\mu = \infty$ die unendlich entfernten Puncte darstellt.

Es ist bekannt, dafs die orthogonalen Oberflächen den Bedingungen

$$(10.)\quad \begin{cases} \frac{\partial\mu_i}{\partial y}\cdot\frac{\partial\mu_k}{\partial y} + \frac{\partial\mu_i}{\partial y'}\cdot\frac{\partial\mu_k}{\partial y'} + \frac{\partial\mu_i}{\partial y''}\cdot\frac{\partial\mu_k}{\partial y''} = 0, \\ \frac{\partial y}{\partial\mu_i}\cdot\frac{\partial y}{\partial\mu_k} + \frac{\partial y'}{\partial\mu_i}\cdot\frac{\partial y'}{\partial\mu_k} + \frac{\partial y''}{\partial\mu_i}\cdot\frac{\partial y''}{\partial\mu_k} = 0 \end{cases}$$

genügen, wenn i und k verschieden sind, und dafs dadurch die Gleichungen

$$(11.)\quad dy^i = \frac{\partial f^i}{\partial\mu}d\mu + \frac{\partial f^i}{\partial\mu_1}d\mu_1 + \frac{\partial f^i}{\partial\mu_2}d\mu_2$$

in folgende übergehen:

$$(12.)\quad \begin{cases} L^2 d\mu = \frac{\partial y}{\partial\mu}dy + \frac{\partial y'}{\partial\mu}dy' + \frac{\partial y''}{\partial\mu}dy'', \\ L_1^2 d\mu_1 = \frac{\partial y}{\partial\mu_1}dy + \frac{\partial y'}{\partial\mu_1}dy' + \frac{\partial y''}{\partial\mu_1}dy'', \\ L_2^2 d\mu_2 = \frac{\partial y}{\partial\mu_2}dy + \frac{\partial y'}{\partial\mu_2}dy' + \frac{\partial y''}{\partial\mu_2}dy'', \end{cases}$$

wo

$$(13.)\quad \begin{cases} L^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial\mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial\mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y''}{\partial\mu}\right)^2, & \frac{1}{L^2} = \left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial y''}\right)^2, \\ L_1^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial\mu_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial\mu_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y''}{\partial\mu_1}\right)^2, & \frac{1}{L_1^2} = \left(\frac{\partial\mu_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu_1}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu_1}{\partial y''}\right)^2, \\ L_2^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial\mu_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial\mu_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y''}{\partial\mu_2}\right)^2, & \frac{1}{L_2^2} = \left(\frac{\partial\mu_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu_2}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu_2}{\partial y''}\right)^2. \end{cases}$$

Setzt man nun

$$(14.)\quad w = \frac{d\mu}{dt}, \quad w_1 = \frac{d\mu_1}{dt}, \quad w_2 = \frac{d\mu_2}{dt},$$

so erhält man aus den Gleichungen (5.):

$$(15.)\quad \begin{cases} L^2 w = \frac{\partial\varphi}{\partial\mu} - \left(A\frac{\partial\gamma}{\partial\mu} + A'\frac{\partial\gamma'}{\partial\mu} + A''\frac{\partial\gamma''}{\partial\mu}\right)^2 + \left[A^{10}\left(\gamma'\frac{\partial\gamma'}{\partial\mu} - \gamma\frac{\partial\gamma'}{\partial\mu}\right) + \cdots\right], \\ L_1^2 w_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial\mu_1} - \left(A\frac{\partial\gamma}{\partial\mu_1} + A'\frac{\partial\gamma'}{\partial\mu_1} + A''\frac{\partial\gamma''}{\partial\mu_1}\right)^2 + \left[A^{10}\left(\gamma'\frac{\partial\gamma}{\partial\mu_1} - \gamma\frac{\partial\gamma'}{\partial\mu_1}\right) + \cdots\right], \\ L_2^2 w_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial\mu_2} - \left(A\frac{\partial\gamma}{\partial\mu_2} + A'\frac{\partial\gamma'}{\partial\mu_2} + A''\frac{\partial\gamma''}{\partial\mu_2}\right)^2 + \left[A^{10}\left(\gamma'\frac{\partial\gamma}{\partial\mu_2} - \gamma\frac{\partial\gamma'}{\partial\mu_2}\right) + \cdots\right]. \end{cases}$$

§. 3.

Gleichungen zur Bestimmung der Function φ.

Nach diesen Vorbereitungen lassen sich leicht die zur Bestimmung von φ nöthigen Gleichungen angeben.

Die Function mufs bekanntlich der Gleichung

$$(16.)\quad 0 = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial\varphi^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}$$

genügen. Dieselbe geht nach Einführung der γ in

$$(17.)\quad 0 = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\gamma^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\gamma'^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\gamma''^2}$$

über, und nach Einführung der μ (vgl. *Jacobi's* Math. Werke II. 43) in:

$$(18.)\quad \frac{\partial}{\partial\mu}\left[\frac{L_1 L_2}{L}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right] + \frac{\partial}{\partial\mu_1}\left[\frac{L_2 L}{L_1}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\mu_1}\right] + \frac{\partial}{\partial\mu_2}\left[\frac{L L_1}{L_2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\mu_2}\right] = 0.$$

Da ferner die an der Oberfläche des Körpers befindlichen Theilchen auf derselben nur *gleiten* sollen, so mufs w für $\mu = \mu_0$ verschwinden; daher findet zweitens die Gleichung

$$(19.)\quad \left[\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} - \left(A\frac{\partial\gamma}{\partial\mu} + A'\frac{\partial\gamma'}{\partial\mu} + A''\frac{\partial\gamma''}{\partial\mu}\right) - \left\{A^{10}\left(\gamma'\frac{\partial\gamma}{\partial\mu} - \gamma\frac{\partial\gamma'}{\partial\mu}\right) + \cdots\right\}\right]_{\mu=\mu_0}$$

Statt.

Da endlich noch im Unendlichen überhaupt jede Bewegung fehlen soll, so mufs für $\mu = \infty$ der Ausdruck

$$u^2 + u_1^2 + u_2^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2$$

verschwinden, mithin, wenn man μ, μ_1, μ_2 einführt, die Gleichung

$$(20.)\quad \left[\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)^2 + \frac{1}{L_1^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu_1}\right)^2 + \frac{1}{L_2^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu_2}\right)^2 = 0\right]_{\mu=\infty}$$

erfüllt werden.

Es ist leicht zu sehen, dafs man in Folge der Gleichung (19.):

$$(21.)\quad \varphi = W + UA + U'A' + U''A'' + U^{12}A^{12} + U^{20}A^{20} + U^{01}A^{01}$$

zu setzen hat, wo W allein von der *Zeit*, die U dagegen allein als von den *Coordinaten* μ, μ_1, μ_2 abhängig zu betrachten sind. Die Gleichung (19.) zerfällt dann in folgende *sechs:*

$$(22.)\quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial U}{\partial \mu}=\dfrac{\partial \gamma}{\partial \mu}, & \dfrac{\partial U^{12}}{\partial \mu}=-\gamma''\dfrac{\partial \gamma'}{\partial \mu}+\gamma'\dfrac{\partial \gamma''}{\partial \mu} \\ \dfrac{\partial U'}{\partial \mu}=\dfrac{\partial \gamma'}{\partial \mu}, & \dfrac{\partial U^{20}}{\partial \mu}=-\gamma\dfrac{\partial \gamma''}{\partial \mu}+\gamma''\dfrac{\partial \gamma}{\partial \mu} \\ \dfrac{\partial U''}{\partial \mu}=\dfrac{\partial \gamma''}{\partial \mu}, & \dfrac{\partial U^{01}}{\partial \mu}=-\gamma'\dfrac{\partial \gamma}{\partial \mu}+\gamma\dfrac{\partial \gamma'}{\partial \mu} \end{array}\right\}_{\mu=\mu_0}$$

W bleibt unbestimmt, schwindet jedoch, wie sich zeigen wird, vollständig aus der Rechnung.

§. 4.
Von dem Druck.

Man betrachte nun den *Gesammtdruck*, welchen der Körper durch die Flüssigkeit erleidet, und stelle die Integrale auf, welche die Componenten und die Rotationsmomente des Körpers ausdrücken. Dieselben sind, in Bezug auf die Axen γ, γ', γ'' genommen:

$$(23.)\quad \left\{\begin{array}{l} \int p_0\cos(n,\gamma)\,do,\quad \int p_0\cos(n,\gamma')\,do,\quad \int p_0\cos(n,\gamma'')\,do, \\ \int p_0(\gamma'\cos(n,\gamma'')-\gamma''\cos(n,\gamma'))\,do,\quad \int p_0(\gamma''\cos(n,\gamma)-\gamma\cos(n,\gamma''))\,do,\ \ldots, \end{array}\right.$$

wenn p_0 den Druck an der Oberfläche des Körpers bezeichnet ($\mu=\mu_0$), n die Normale dieser Oberfläche, do ein Element derselben. Die Richtung der Normale werde *positiv* genommen, indem man sich von der Oberfläche des Körpers in den Raum hinaus entfernt, so dafs also μ zugleich *wächst*.

Führt man nun unter dem Integralzeichen μ_1, μ_2 ein, und erwägt, dafs das Bogen-Element einer Curve auf der Oberfläche den Ausdruck

$$(24.)\quad ds^2 = L_1^2 d\mu_1^2 + L_2^2 d\mu_2^2$$

hat, so findet sich für do:

$$(25.)\quad do = L_1 L_2 d\mu_1 d\mu_2,$$

wo die Wurzelgröfsen L_1, L_2 *positiv* zu nehmen sind. Es ist ferner:

$$(26.)\quad \cos(n,\gamma)=\pm\frac{1}{L}\cdot\frac{\partial \mu}{\partial \gamma},\quad \cos(n,\gamma')=\pm\frac{1}{L}\cdot\frac{\partial \mu}{\partial \gamma'},\quad \cos(n,\gamma'')=\pm\frac{1}{L}\cdot\frac{\partial \mu}{\partial \gamma''}.$$

Hier fragt sich, welches Zeichen zu nehmen sei: was leicht zu entscheiden ist. Denn es sei $\Delta\nu$ (positiv) ein Element der Normale, so ist der nächste Punct der Normale, in ihrer positiven Richtung:

$$\gamma+\cos(n,\gamma).\Delta\nu,\qquad \gamma'+\cos(n,\gamma').\Delta\nu,\qquad \gamma''+\cos(n,\gamma'').\Delta\nu,$$

und derselbe sollte auf der Oberfläche $\mu = \mu_0 + \Delta\mu_0$ liegen, wo $\Delta\mu_0$ eine *positive* Gröfse ist. Man erhält aber, wenn man links die Coordinaten des Puncts einführt:

$$(27.)\quad \Delta\mu_0 = \pm\frac{1}{L}\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial y}+\frac{\partial\mu}{\partial y'}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial y'}+\frac{\partial\mu}{\partial y''}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial y''}\right)\Delta\nu = \pm L\Delta\nu.$$

Ist daher auch L stets, wie bei L_1, L_2 angenommen wurde, die positive Wurzel von L_2, so ist immer das *obere* Zeichen zu nehmen, damit man die Ausdrüke (23.) erhalte; und die Integrale nehmen dann die nachstehende Gestalt an:

$$(28.)\quad \begin{cases} P = \int\frac{L_1L_2}{L}p_0\frac{\partial y}{\partial\mu}d\mu_1 d\mu_2, \\ P' = \int\frac{L_1L_2}{L}p_0\frac{\partial y'}{\partial\mu}d\mu_1 d\mu_2, \\ P'' = \int\frac{L_1L_2}{L}p_0\frac{\partial y''}{\partial\mu}d\mu_1 d\mu_2, \end{cases}$$

$$(29.)\quad \begin{cases} P^{12} = \int\frac{L_1L_2}{L}p_0\left(y'\frac{\partial y''}{\partial\mu}-y''\frac{\partial y'}{\partial\mu}\right)d\mu_1 d\mu_2, \\ P^{20} = \int\frac{L_1L_2}{L}p_0\left(y''\frac{\partial y}{\partial\mu}-y\frac{\partial y''}{\partial\mu}\right)d\mu_1 d\mu_2, \\ P^{01} = \int\frac{L_1L_2}{L}p_0\left(y\frac{\partial y'}{\partial\mu}-y'\frac{\partial y}{\partial\mu}\right)d\mu_1 d\mu_2. \end{cases}$$

In den Integralen ist $\mu = \mu_0$ zu setzen, und es sind dieselben über die ganze Oberfläche auszudehnen.

Der Druck p wird durch die bekannte Gleichung

$$30.\quad -\frac{p}{q} = -gZ+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)+\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2\right]$$

definirt, wenn q die *Dichtigkeit* der Flüssigkeit, $+Z$ die Richtung der *Schwere* bezeichnet, wo

$$(31.)\quad Z = \alpha x+\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2,\quad \alpha^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2 = 1 \text{ ist.}$$

Führt man μ, μ_1, μ_2 ein, so geht (30.) in

$$(32.)\quad \begin{cases} -\frac{p}{q} = -gZ+\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial\mu_1}\cdot\frac{\partial\mu_1}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial\mu_2}\cdot\frac{\partial\mu_2}{\partial t} \\ \qquad\qquad +\tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)^2+\frac{1}{L_1^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu_1}\right)^2+\frac{1}{L_2^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu_2}\right)^2\right] \end{cases}$$

über, und die Gröfsen $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ $\frac{\partial\mu_2}{\partial t}$ erhalten ihre Bestimmung durch die Gleichungen

$$(33.)\quad \begin{cases} d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t}dt + \frac{\partial\varphi}{\partial\mu_1}d\mu_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial\mu_2}d\mu_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial\mu}d\mu, \\ d\mu_x = \frac{\partial\mu_x}{\partial t}dt + \frac{\partial\mu_x}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\mu_x}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial\mu_x}{\partial x}dx. \end{cases}$$

Die zweite dieser Gleichungen, durch dt dividirt, geht in

$$(34.)\quad w_x = \frac{\partial\mu_x}{\partial t} + \frac{1}{L_x^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\mu_x}$$

über, und daher giebt die Vergleichung mit (15.):

$$(35.)\quad L_x^2\frac{\partial\mu_x}{\partial t} = -\left(A\frac{\partial y}{\partial\mu_x} + A'\frac{\partial y'}{\partial\mu_x} + A''\frac{\partial y''}{\partial\mu_x}\right) + \left[A^{10}\left(y'\frac{\partial y}{\partial\mu_x} - y\frac{\partial y'}{\partial\mu_x}\right) + \cdots\right].$$

Führt man Dies in den Ausdruck von p ein, so zeigt sich, dafs jedes der Integrale (28. 29.) aus *drei* wesentlich verschiedenen Theilen besteht. Der *erste* derselben rührt von dem Gliede gZ her, von der *Schwerkraft;* der *zweite* von $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, und ist ein linearer Ausdruck der Gröfsen

$$\frac{dW}{dt},\quad \frac{dA^i}{dt},\quad \frac{dA^{hx}}{dt}.$$

Der *dritte* endlich ist eine homogene Function zweiter Ordnung aller Gröfsen A^i, A^{hx}. Man untersuche nun die letzten beiden noch genauer.

Den Integralen (23.) ist leicht anzusehen, dafs sie verschwinden, wenn p_0 einer Constanten gleich ist. Nun kommt aber W in p_0 nicht anders vor, als in dem Gliede $\frac{dW}{dt}$, welches in Bezug auf die μ constant ist. Die Gröfse W verschwindet also aus allen P.

Aber die Integrale P vereinfachen sich sehr unter der weit umfassenden Annahme, dafs die Oberfläche des Körpers durch die Ebenen $y = 0$, $y' = 0$, $y'' = 0$ in *acht symmetrische Theile* zerfalle. In diesem Falle werden offenbar die μ zu Functionen, welche ungeändert bleiben, wenn die y ihre Zeichen ändern. Ja, man sieht aus den Gleichungen in (§. 3.), dafs man dann der Function φ die Form

$$(36.)\quad \varphi = W + VyA + V'y'A' + V''y''A'' + V^{12}y'y''A^{12} + V^{20}y''yA^{20} + V^{01}yy'A^{01}$$

geben kann, wo die V dieselbe Eigenschaft haben und ferner die Gröfsen L und die Gröfsen $\frac{\partial \log y^i}{\partial\mu_x} = \frac{1}{y^i}\cdot\frac{\partial y^i}{\partial\mu_x}$ sind.

Nun zeigt sich aus der Form der Ausdrücke (23.) unmittelbar die Richtigkeit folgender Behauptung:

Wenn p_0 die Form

$$(37.)\quad p_0 = R^0 y + R' y' + R'' y'' + R^{12} y' y'' + R^{20} y'' y + R^{01} y y'' + R$$

hat und die R sind Functionen, welche sich nicht ändern, wenn sich die Vorzeichen der y ändern, so bleibt von den 7 Gliedern, in welche jeder der Ausdrücke (23.) dadurch zerfällt, nur immer *Eins* stehen, und es ist:

$$(38.)\quad \begin{cases} P = \int R\, y \cos(n,y)do, & P^{12} = \int R^{12}[y' \cos(n,y'') - y'' \cos(n,y')]do, \\ P' = \int R' y' \cos(n,y')do, & P^{20} = \int R^{20}[y'' \cos(n,y) - y \cos(n,y'')]do, \\ P'' = \int R'' y'' \cos(n,y'')do, & P^{01} = \int R^{01}[y \cos(n,y') - y' \cos(n,y)]do. \end{cases}$$

Im gegenwärtigen Falle hat nun p_0 *diese* Form; denn es nimmt die Gestalt

$$(39.)\quad -\frac{p_0}{q} = -gZ + \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \Sigma(my + m'y' + m''y'' + m^{12}y'y'' + m^{20}y''y + m^{01}yy') \\ \times (ny + n'y' + n''y'' + n^{12}y'y'' + n^{20}y''y + n^{01}yy')$$

an, wo die n und m jene Eigenschaft haben; und zwar ist immer m^i mit A^i, m^{ix} mit A^{ix} proportional; und eben so die n. Wendet man also den eben angeführten Satz an, so erhält man folgende Gleichungen, in welchen M die Masse eines dem bewegten Körper an Umfang gleichen Flüssigkeitsvolumen bedeuten soll:

$$(40.)\quad \begin{cases} P = g\mathrm{M}\cos(g,y) + \varkappa\frac{dA}{dt} + \beta A' A^{10} + \gamma A'' A^{20}, \\ \qquad\qquad P^{12} = \varkappa^{12}\frac{dA^{12}}{dt} + \beta^{12} A' A'' + \gamma^{12} A^{10} A^{20}, \\ P' = g\mathrm{M}\cos(g,y') + \varkappa'\frac{dA'}{dt} + \beta' A'' A^{21} + \gamma' A^0 A^{01}, \\ \qquad\qquad P^{20} = \varkappa^{20}\frac{dA^{20}}{dt} + \beta^{20} A'' A^0 + \gamma^{20} A^{21} A^{01}, \\ P'' = g\mathrm{M}\cos(g,y'') + \varkappa''\frac{dA''}{dt} + \beta'' A^0 A^{02} + \gamma'' A' A^{12}, \\ \qquad\qquad P^{01} = \varkappa^{01}\frac{dA^{01}}{dt} + \beta^{01} A^0 A' + \gamma^{01} A^{02} A^{12}. \end{cases}$$

Die $\varkappa$, β, γ sind Constanten; und zwar nehmen die $\varkappa$ folgende einfachen Werthe an:

$$(41.)\begin{cases} -\varkappa = q\int \frac{L_1 L_2}{L} V\gamma \frac{\partial \gamma}{\partial \mu} d\mu_1 d\mu_2, \\ \qquad -\varkappa^{12} = q\int \frac{L_1 L_2}{L} V^{12}\gamma'\gamma''\left(\gamma'\frac{\partial \gamma''}{\partial \mu} - \gamma''\frac{\partial \gamma'}{\partial \mu}\right) d\mu_1 d\mu_2, \\ -\varkappa' = q\int \frac{L_1 L_2}{L} V'\gamma' \frac{\partial \gamma'}{\partial \mu} d\mu_1 d\mu_2, \\ \qquad -\varkappa^{20} = q\int \frac{L_1 L_2}{L} V^{20}\gamma''\gamma\left(\gamma''\frac{\partial \gamma}{\partial \mu} - \gamma\frac{\partial \gamma''}{\partial \mu}\right) d\mu_1 d\mu_2, \\ -\varkappa'' = q\int \frac{L_1 L_2}{L} V''\gamma'' \frac{\partial \gamma''}{\partial \mu} d\mu_1 d\mu_2, \\ \qquad -\varkappa^{01} = q\int \frac{L_1 L_2}{L} V^{01}\gamma\gamma'\left(\gamma\frac{\partial \gamma'}{\partial \mu} - \gamma'\frac{\partial \gamma}{\partial \mu}\right) d\mu_1 d\mu_2. \end{cases}$$

Die Aufstellung der Werthe von β, γ ist leicht, führt aber auf complicirte Ausdrücke, welche ich anzugeben unterlasse. Die Wichtigkeit der Gleichungen (40.) wird sogleich im Folgenden klarer werden.

Man kennt jetzt die Kräfte, welche, mit Übergehung der *Reibung*, den Widerstand bilden, und kann zur Bewegung des Körpers selbst schreiten.

§. 5.

Gleichungen für die Bewegung des Körpers.

Man nenne M die *Masse* des Körpers, M^0, M', M'' seine *Trägheitsmomente* um die Axen y, y', y''; und Y, Y', Y'' die Componenten der an dem Punct y, y', y'' des Körpers wirkenden äufsern Kräfte. Dann lassen sich die Bewegungsgleichungen für den Körper, abgesehen von den Widerstandskräften, in der Form

$$(42.)\begin{cases} M\frac{dA}{dt} = Q, & M^0\frac{dA^{12}}{dt} + (M''-M')A^{10}A^{20} = Q^{12}, \\ M\frac{dA'}{dt} = Q', & M'\frac{dA^{20}}{dt} + (M-M'')A^{21}A^{01} = Q^{20}, \\ M\frac{dA''}{dt} = Q'', & M''\frac{dA^{01}}{dt} + (M'-M)A^{02}A^{12} = Q^{01} \end{cases}$$

darstellen, wo die Q folgende Werthe haben:

$$(43.)\begin{cases} Q = \Sigma Y + M\frac{d\xi.da_0^0 + d\xi_1.da_1^0 + d\xi_2.da_2^0}{dt^2}, & Q^{12} = \Sigma(y'Y'' - y''Y'), \\ Q' = \Sigma Y' + M\frac{d\xi.da_0' + d\xi_1.da_1' + d\xi_2.da_2'}{dt^2}, & Q^{20} = \Sigma(y''Y - yY''), \\ Q'' = \Sigma Y'' + M\frac{d\xi.da_0'' + d\xi_1.da_1'' + d\xi_2.da_2''}{dt^2}, & Q^{01} = \Sigma(yY' - y'Y). \end{cases}$$

Berücksichtigt man nun auch die ***Druckkräfte***, so gehen die Gleichungen (42.) in die folgenden über:

$$(44.)\quad \begin{cases} M\frac{dA}{dt} = Q - P, & M^0\frac{dA^{12}}{dt} + (M'' - M')A^{10}A^{20} = Q^{12} - P^{12}, \\ M\frac{dA'}{dt} = Q' - P', & M'\frac{dA^{20}}{dt} + (M^0 - M'')A^{21}A^{01} = Q^{20} - P^{20}, \\ M\frac{dA''}{dt} = Q'' - P'', & M''\frac{dA^{01}}{dt} + (M' - M^0)A^{02}A^{12} = Q^{01} - P^{01}. \end{cases}$$

Die zweiten Differentialquotienten der A sind hier nur in den sechs Gröfsen $\frac{dA^i}{dt}$ $\frac{dA^{hx}}{dt}$ enthalten; und um diese Gleichungen auf die gewöhnliche Form zu bringen, in welcher links allein zweite Differentialquotienten stehen, darf man sie nur nach diesen Gröfsen auflösen. Dieselben kommen rechts lineär vor; und zwar in denjenigen Theilen der P, welche von $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ herrühren. Es läfst sich demnach, mittels Auflösung lineärer Gleichungen, dem Systeme (44.) leicht eine Form geben, welche rechts keine zweiten Differentiale mehr enthält, nemlich die Form

$$(45.)\quad \begin{cases} (M + \varDelta M)\frac{dA}{dt} = Q + [Q], \\ \qquad (M^0 + \varDelta M^0)\frac{dA^{12}}{dt} + (M'' - M')A^{10}A^{20} = Q^{12} + [Q^{12}], \\ (M + \varDelta' M)\frac{dA'}{dt} = Q' + [Q'], \\ \qquad (M' + \varDelta M')\frac{dA^{20}}{dt} + (M^0 - M'')A^{21}A^{20} = Q^{20} + [Q^{20}], \\ (M + \varDelta'' M)\frac{dA''}{dt} = Q'' + [Q''], \\ \qquad (M'' + \varDelta M'')\frac{dA^{01}}{dt} + (M' - M^0)A^{02}A^{12} = Q^{01} + [Q^{01}]. \end{cases}$$

Die $\varDelta$ (welche die Correctionen der Masse und der Trägheitsmomente genannt werden können) und die eingeklammerten Q, sind von der Ordnung q, und verschwinden mit der Dichtigkeit der Flüssigkeit.

Wir kommen nun auf den oben erwähnten Fall der Symmetrie gegen die drei Haupt-Ebenen zurück. Man sieht unmittelbar, dafs alsdann

Die Gleichungen (44.) schon in aufgelöseter Form gegeben sind.

Sie nehmen folgende Form an:

$$(46.)\quad \begin{cases} (M+\varDelta M)\dfrac{dA}{dt}+\beta A'A^{10}+\gamma A''A^{20}=Q-g\mathrm{M}\cos(g,y), \\ (M+\varDelta' M)\dfrac{dA'}{dt}+\beta' A''A^{21}+\gamma' A A^{01}=Q'-g\mathrm{M}\cos(g,y'), \\ (M+\varDelta'' M)\dfrac{dA''}{dt}+\beta'' A A^{02}+\gamma'' A' A^{12}=Q''-g\mathrm{M}\cos(g,y''), \end{cases}$$

$$(47.)\quad \begin{cases} (M^0+\varDelta M^0)\dfrac{dA^{12}}{dt}+(M''-M'+\gamma^{12})A^{10}A^{20}+\beta^{12}A'A''=Q^{12}, \\ (M'+\varDelta M')\dfrac{dA^{20}}{dt}+(M^0-M''+\gamma^{20})A^{21}A^{01}+\beta^{20}A''A=Q^{20}, \\ (M''+\varDelta M'')\dfrac{dA^{01}}{dt}+(M'-M^0+\gamma^{01})A^{02}A^{12}+\beta^{01}AA'=Q^{01}, \end{cases}$$

und es ergiebt sich zugleich:

$$(48.)\quad \begin{cases} \varDelta M=\varkappa, & \varDelta' M=\varkappa', & \varDelta'' M=\varkappa'', \\ \varDelta M^0=\varkappa^{12}, & \varDelta M'=\varkappa^{20}, & \varDelta M''=\varkappa^{01}. \end{cases}$$

Hieraus sieht man, wenn man auf specielle Arten der Bewegung eingeht, dafs in einigen Fällen die β, γ ganz aus der Rechnung wegfallen; wovon weiter unten noch die Rede sein wird. Ich bemerke nur noch, dafs wenn der Körper sich ohne fortschreitende Bewegung nur um seinen Schwerpunct dreht, die Gleichungen der Bewegung der Form nach ungeändert bleiben und nur ihre Coëfficienten Correctionen erfahren.

§. 6.

Von der Bewegung der Flüssigkeitstheilchen. Dieselbe geschieht in Fäden.

Die Bewegung eines Flüssigkeitstheilchens erhält man durch Integration der Differentialgleichungen

$$(49.)\quad \frac{dx}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad \frac{dx_1}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\quad \frac{dx_2}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_2},$$

deren willkürliche Constanten durch die Anfangslage des Theilchens bestimmt werden. Es ist indefs leichter, nicht die wirkliche Bewegung der Theilchen zu suchen, sondern diejenige, welche sie in Bezug auf das im Körper feste Axensystem annehmen. Die Gleichungen zu diesem Zwecke sind

$$(50.)\quad \frac{d\mu}{dt}=w,\quad \frac{d\mu_1}{dt}=w_1,\quad \frac{d\mu_2}{dt}=w_2,$$

wenn man die Werthe der w aus denen (15.) nimmt.

Der alleinige Umstand indefs, dafs die fraglichen Differentialgleichungen von der ersten Ordnung sind, reicht hin, um zu beweisen:

Dafs die Bewegung der Flüssigkeit in *Fäden* geschieht.

Denn man kann sich die Integrale der Gleichungen (49.) in der Form

$$(51.)\quad \begin{cases} \alpha = f\,(x x_1 x_2 t), \\ \alpha' = f'\,(x x_1 x_2 t), \\ \alpha'' = f''(x x_1 x_2 t) \end{cases}$$

ausgedrückt vorstellen, wo α, α', α'' willkürliche Constanten sind. Diese Gleichungen bezeichnen offenbar drei Systeme von Oberflächen, mit einem veränderlichen Parameter t. Es ist aber eine Eigenschaft solcher Oberflächen, dafs sich zwei, *einem und demselben* System angehörige Flächen im Allgemeinen *niemals schneiden* können. Denn aus den Gleichungen

$$(52.)\quad \alpha = f(x, x_1, x_2, t), \quad \beta = f(x, x_1, x_2, t)$$

folgt im Allgemeinen immer

$$(53.)\quad \alpha = \beta;$$

d. h. die Oberflächen *fallen zusammen*. Vermöge dieser Eigenschaft theilen also die Oberflächen den ganzen Raum in sehr kleine Parallelepipeda, welche mit der *Zeit* zwar ihre Gestalt, niemals aber ihre gegenseitige Lage ändern können: auf die Weise, dafs jedes Parallelepipedum jederzeit von *denselben* Theilchen umgeben ist. Die Bewegung in *Fäden* findet also Statt; und zwar nicht blofs in *einer*, sondern im Grunde in *jeder* beliebigen Richtung. Es versteht sich, dafs sich Dies nur *im Allgemeinen* sagen läfst. Denn nimmt f die Form $\frac{0}{0}$ an, so kann vielleicht die Gleichung (53.) nicht nothwendig aus (54.) hervorgehen, und in diesem Falle wird das Zerreifsen eines Fadens erfolgen; was dann auch durch die besondern Umstände des Problems sich anderweitig erklären wird.

Specielle Arten der Bewegung des Körpers.

§. 7.

Bewegung ohne Rotation.

Wenn man die aufgestellten Gleichungen auf besondere Arten der Bewegung anwenden will, so ist wohl zunächst die *rein-translatorische* Bewegung zu betrachten. In diesem Falle werden die a constant; die A^{ix} verschwinden und man erhält:

$$(54.)\quad A = -\frac{d\eta}{dt},\quad A' = -\frac{d\eta'}{dt},\quad A'' = -\frac{d\eta''}{dt};$$

φ nimmt also die Form

$$(55.)\quad \varphi = -U\frac{d\eta}{dt} - U'\frac{d\eta'}{dt} - U''\frac{d\eta''}{dt}$$

an, und wenn der Körper gegen seine Haupt-Ebenen (oder, was hier gleichviel gilt, gegen irgend drei Ebenen, die in seinem Schwerpunct sich rechtwinklig schneiden) symmetrisch ist, so gehen die Gleichungen (46.) über in:

$$(56.)\quad \begin{cases} -(M+\varDelta M)\frac{d\eta}{dt} = \Sigma Y - gM\cos(g,y), \\ -(M+\varDelta' M)\frac{d\eta'}{dt} = \Sigma Y' - gM\cos(g,y'), \\ -(M+\varDelta'' M)\frac{d\eta''}{dt} = \Sigma Y'' - gM\cos(g,y''), \end{cases}$$

oder auch in:

$$(57.)\quad \begin{cases} (M+a_0^0\varDelta M+a_0'\varDelta' M+a_0''\varDelta'' M)\frac{d\xi}{dt} = \Sigma X - gM\cos(g,x), \\ (M+a_1^0\varDelta M+a_1'\varDelta' M+a_1''\varDelta'' M)\frac{d\xi_1}{dt} = \Sigma X_1 - gM\cos(g,x_1), \\ (M+a_2^0\varDelta M+a_2'\varDelta' M+a_2''\varDelta'' M)\frac{d\xi_2}{dt} = \Sigma X_2 - gM\cos(g,x_2). \end{cases}$$

In diesem Falle also wird durch die Berücksichtigung des ***Drucks allein,*** eine Correction der Masse (verschieden in verschiedenen Richtungen) bedingt, und rechts eine Verminderung der ***Schwerkraft;*** wie sie beim Eintauchen immer erfolgt.

Die Gleichung (35.) geht in

$$(58.)\quad L_x^2\frac{\partial\mu_x}{\partial t} = \frac{\partial\gamma}{\partial\mu_x}\cdot\frac{d\eta}{dt} + \frac{\partial\gamma'}{\partial\mu_x}\cdot\frac{d\eta'}{dt} + \frac{\partial\gamma''}{\partial\mu_x}\cdot\frac{d\eta''}{dt}$$

über, und die Bewegung der Flüssigkeit wird also ausgedrückt durch die Gleichungen

$$(59.)\quad L_x^2 d\mu_x = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu_x} + L_x^2\frac{\partial\mu_x}{\partial t}\right)dt,\quad \text{d. h.}$$

$$(60.)\quad \begin{cases} L^2 d\mu = \frac{\partial(\gamma-U)}{\partial\mu}d\eta + \frac{\partial(\gamma'-U')}{\partial\mu}d\eta' + \frac{\partial(\gamma''-U'')}{\partial\mu}d\eta'', \\ L_1^2 d\mu_1 = \frac{\partial(\gamma-U)}{\partial\mu_1}d\eta + \frac{\partial(\gamma'-U')}{\partial\mu_1}d\eta' + \frac{\partial(\gamma''-U'')}{\partial\mu_1}d\eta'', \\ L_2^2 d\mu_2 = \frac{\partial(\gamma-U)}{\partial\mu_2}d\eta + \frac{\partial(\gamma'-U')}{\partial\mu_2}d\eta' + \frac{\partial(\gamma''-U'')}{\partial\mu_2}d\eta'', \end{cases}$$

Man sieht dafs t ganz weggefallen ist, und dafs die Verhältnisse $d\eta : d\eta' : d\eta''$ nur von der Gestalt der Curve abhangen, auf welcher der Schwerpunct sich bewegt. Daher ergiebt sich folgender Satz:

Die Gestalt der Curven auf denen die Flüssigkeitstheilchen sich relativ gegen den Schwerpunct des Körpers zu bewegen scheinen, ist allein von der Gestalt des Körpers und von der Curve, auf der sich sein Schwerpunct bewegt, abhängig.

Wird also der Körper auf einer gegebenen Curve fortgeführt, so lassen sich die Bahnen (rel.) der Flüssigkeitstheilchen bestimmen, ohne die auf den Körper wirkenden Kräfte zu berücksichtigen.

Es ist übrigens leicht zu sehen:

Dafs das obige Theorem auch noch gilt, wenn eine Rotation des Körpers Statt findet, sobald dieselbe an den Ort, wo sich der Körper befindet, gebunden ist.

Hierzu wird der zweite Fall der Bewegung des Körpers, die *Pendelbewegung,* zu der ich mich nun wende, ein Beispiel geben.

§. 8.

Bewegung um eine feste Axe.

Man nehme an, der Körper sei mit einer festen Axe fest verbunden, und dieselbe sei die Axe der x; der Schwerpunct bewege sich demnach in der $x_1\,x_2$ Ebene; der Radius des Kreises, welchen er beschreibt, sei ϱ. Der Winkel, welchen der nach dem Schwerpunct gezogene Radius mit der X_1-Axe bildet, soll ψ heifsen. Dann ist zunächst:

$$(61.)\qquad \xi = 0,\qquad \xi_1 = \varrho\cos\psi,\qquad \xi_2 = \varrho\sin\psi.$$

Um die Gröfsen a bequem durch ψ auszudrücken, führe ich ein Coordinatensystem z, z_1, z_2 ein, welches mit dem Körper fest verbunden sein soll, und dessen Anfangspunct im Schwerpuncte liegen mag. Die Axe z sei der x parallel, die Axe z_1 verbinde die Anfangspuncte beider Systeme; ferner falle für $\psi = 0$, z_1 mit x_1, z_2 mit x_2 zusammen; für $\psi = \frac{1}{2}\pi$, z_2 mit $-x_1$, z_1 mit x_2. Dann ergiebt sich:

$$(62.)\qquad \left\{\begin{array}{ll} z = x, & x = z, \\ z_1 + \varrho = +x_1\cos\psi + x_2\sin\psi, & x_1 - \xi_1 = z_1\cos\psi - z_2\sin\psi, \\ z_2 = -x_1\sin\psi + x_2\cos\psi, & x_2 - \xi_2 = z_1\sin\psi + z_2\cos\psi. \end{array}\right.$$

Fügt man nun die Gleichungen

$$(63.)\quad \begin{cases} z = c_0^0 y + c_0' y' + c_0'' y'', \\ z_1 = c_1^0 y + c_1' y' + c_1'' y'', \\ z_2 = c_2^0 y + c_2' y' + c_2'' y'' \end{cases}$$

hinzu, so erhält man durch Vergleichung der Gleichungen (62. und 63.):

$$(64.)\quad \begin{cases} a_0^0 = c_0^0, & a_1^0 = c_1^0 \cos\psi - c_2^0 \sin\psi, & a_2^0 = c_1^0 \sin\psi + c_2^0 \cos\psi, \\ a_0' = c_0', & a_1' = c_1' \cos\psi - c_2' \sin\psi, & a_2' = c_1 \sin\psi + c_2' \cos\psi, \\ a_0'' = c_0'', & a_1'' = c_1'' \cos\psi - c_2'' \sin\psi, & a_2'' = c_1'' \sin\psi + c_2'' \cos\psi. \end{cases}$$

Durch Differentiation erhält man:

$$(65.)\quad \begin{cases} \frac{da_1^0}{dt} = -a_2^0 \frac{d\psi}{dt}, & \frac{da_2^0}{dt} = +a_1^0 \frac{d\psi}{dt}, \\ \frac{da_1'}{dt} = -a_2' \frac{d\psi}{dt}, & \frac{da_2'}{dt} = +a_1' \frac{d\psi}{dt}, \\ \frac{da_1''}{dt} = -a_2'' \frac{d\psi}{dt}, & \frac{da_2''}{dt} = +a_1'' \frac{d\psi}{dt}, \end{cases}$$

und daher mittels der bekannten Relationen zwischen den Coëfficienten der Coordinatentransformation:

$$(66.)\quad \begin{cases} A = \varrho c_2^0 \frac{d\psi}{dt}, & A^{12} = c_0^0 \frac{d\psi}{dt}, \\ A' = \varrho c_2' \frac{d\psi}{dt}, & A^{20} = c_0' \frac{d\psi}{dt}, \\ A'' = \varrho c_2'' \frac{d\psi}{dt}, & A^{01} = c_0'' \frac{d\psi}{dt}. \end{cases}$$

Die Gleichung für die *Bewegung* des Körpers erhält man, wenn man die Gleichungen (45.), der Reihe nach mit

$$\varrho c_2^0,\ \varrho c_2',\ \varrho c_2'';\quad c_0^0,\ c_0',\ c_0''$$

multiplicirt, addirt. Dann ergiebt sich offenbar eine Gleichung von der Form

$$(67.)\quad K\frac{d^2\psi}{dt^2} + L\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = R;$$

wo R, K, L Constanten bedeuten. Es tritt also durch Berücksichtigung des *Druckes* ein Glied hinzu, welches mit dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit multiplicirt ist.

Man betrachte insbesondere den Fall, wo der Körper *symmetrisch* ist, und zugleich die Axen z mit den y zusammenfallen. Alsdann verschwinden alle A bis auf

$$(68.)\quad A'' = \varrho \frac{d\psi}{dt}, \quad A^{12} = \frac{d\psi}{dt},$$

und man erhält die ***Pendelgleichung***, indem man die dritte der Gleichungen (46.), mit ϱ multiplicirt, zu der ersten Gleichung (37.) hinzufügt, nämlich:

$$(69.)\quad [(M^0+\varDelta M^0)+\varrho^2(M+\varDelta'' M)]\frac{d^2\psi}{dt^2}$$
$$=(Q'^2+\varrho Q'')+gM\varrho\{\cos(g,x_1)\sin\psi-\cos(g,x_2)\cos\psi\}.$$

Es zeigt sich, dafs durch die Berücksichtigung des *Drucks* nur eine Veränderung der *Schwerkraft* und des Trägheitsmoments eingetreten ist; bei dem gewöhnlichen Pendel also nur eine Veränderung der ***Pendellänge;*** ohne sonstige Modification der Bewegung.

Geht man wieder zu dem allgemeinen Falle dieser Bewegung zurück, so ergiebt sich ferner:

$$(70.)\quad \varphi = U\cdot\frac{d\psi}{dt},$$

wo U von t unabhängig ist; und die für die Bewegung der Flüssigkeit aufgestellten Gleichungen (15.) werden zu:

$$(71.)\quad \begin{cases} L^2\dfrac{d\mu}{d\psi} = \dfrac{\partial U}{\partial\mu}-\varrho\dfrac{\partial z_2}{\partial\mu}+\left(z_2\dfrac{\partial z_1}{\partial\mu}-z_1\dfrac{\partial z_2}{\partial\mu}\right), \\ L_1^2\dfrac{d\mu_1}{d\psi} = \dfrac{\partial U}{\partial\mu_1}-\varrho\dfrac{\partial z_2}{\partial\mu_1}+\left(z_2\dfrac{\partial z_1}{\partial\mu_1}-z_1\dfrac{\partial z_2}{\partial\mu_1}\right), \\ L_2^2\dfrac{d\mu_2}{d\psi} = \dfrac{\partial U}{\partial\mu_2}-\varrho\dfrac{\partial z_2}{\partial\mu_2}+\left(z_2\dfrac{\partial z_1}{\partial\mu_2}-z_1\dfrac{\partial z_2}{\partial\mu_2}\right); \end{cases}$$

wodurch unter anderm das am Ende des vorigen Paragraphen aufgestellte Theorem seine Bestätigung erhält, indem sich die relativen Bahncurven finden lassen, ohne die Bewegung des Körpers zu kennen.

Anwendung der aufgestellten Gleichungen auf die Bewegung eines Ellipsoïds.

§. 9.

Bestimmung der Function φ.

Der bewegte Körper sei nun ein ***Ellipsoïd,*** dessen Gleichung

$$(72.)\quad \frac{y^2}{a}+\frac{y'^2}{a'}+\frac{y''^2}{a''}=1$$

ist. Über seine ***Dichtigkeits***-Verhältnisse braucht nichts weiter festzustehen, als dafs sein Schwerpunct und seine Haupt-Axen, jener mit dem mathematischen Mittelpunct, diese mit den Haupt-Axen zusammenfallen sollen.

Die μ werden hier offenbar mittels der Gleichungen

$$(73.)\quad \begin{cases} y^2 = \dfrac{a+\mu\,.\,a+\mu_1\,.\,a+\mu_2}{a-a'\,.\,a-a''}, \\[2ex] y'^2 = \dfrac{a'+\mu\,.\,a'+\mu_1\,.\,a'+\mu_2}{a'-a''\,.\,a'-a}, \\[2ex] y''^2 = \dfrac{a''+\mu\,.\,a''+\mu_1\,.\,a''+\mu_2}{a''-a\,.\,a''-a'} \end{cases}$$

eingeführt, nach welchen μ, μ_1, μ_2 sich als die Wurzeln der cubischen Gleichung

$$(74.)\quad \frac{y^2}{a+\mu}+\frac{y'^2}{a'+\mu}+\frac{y''^2}{a''+\mu} = 1$$

darstellen. Die Gröfsen a mögen so auf einander folgen, dafs

$$(75.)\quad a > a' > a'' > 0$$

ist, und die μ sollen so liegen, dafs

$$(76.)\quad \begin{cases} +\infty > +\mu > -a'' > +\mu_1 > -a' > +\mu_2 > -a \quad \text{oder} \\ a > -\mu_2 > +a' > -\mu_1 > +a'' > -\mu > -\infty \end{cases}$$

ist. Die Oberfläche des Körpers wird dann durch die Gleichung

$$(77.)\quad \mu = 0$$

bestimmt.

Es ist nun bekannt, dafs die Gleichung zur Bestimmung von φ die Gestalt

$$(78.)\quad 0 = (\mu_1-\mu_2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+(\mu_2-\mu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_1^2}+(\mu-\mu_1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_2^2}$$

annimmt, wenn man

$$(79.)\quad \begin{cases} du = \dfrac{d\mu}{\sqrt{(a+\mu\,.\,a'+\mu\,.\,a''+\mu)}}, \\[2ex] du_1 = \dfrac{d\mu_1}{\sqrt{(a+\mu_1\,.\,a'+\mu_1\,.\,a''+\mu_1)}}, \\[2ex] du_2 = \dfrac{d\mu_2}{\sqrt{(a+\mu_2\,.\,a'+\mu_2\,.\,a''+\mu_2)}} \end{cases}$$

setzt. Es gehen ferner die Bedingungsgleichungen (22.), wenn man φ in der Form (36.) annimmt, da das Ellipsoïd ein *symmetrischer* Körper ist, in

$$(80.)\quad \begin{cases} 2\left(\dfrac{\partial V}{\partial\mu}\right)_0 = \dfrac{1-V_0}{a}, & 2\left(\dfrac{\partial V^{12}}{\partial\mu}\right)_0 = \dfrac{1-V_0^{12}}{a''}-\dfrac{1+V_0^{12}}{a'}, \\[2ex] 2\left(\dfrac{\partial V'}{\partial\mu}\right)_0 = \dfrac{1-V_0'}{a'}, & 2\left(\dfrac{\partial V^{20}}{\partial\mu}\right)_0 = \dfrac{1-V_0^{20}}{a}-\dfrac{1+V_0^{20}}{a''}, \\[2ex] 2\left(\dfrac{\partial V''}{\partial\mu}\right)_0 = \dfrac{1-V_0''}{a''}. & 2\left(\dfrac{\partial V^{01}}{\partial\mu}\right)_0 = \dfrac{1-V_0^{01}}{a'}-\dfrac{1+V_0^{01}}{a} \end{cases}$$

über. Erwägt man endlich, dafs

$$(81.)\quad \begin{cases} 4L^2 = \dfrac{\mu-\mu_1 . \mu-\mu_2}{a+\mu . a'+\mu . a''+\mu}, \\ 4L_1^2 = \dfrac{\mu_1-\mu_2 . \mu_1-\mu}{a+\mu_1 . a'+\mu_1 . a''+\mu_1}, \\ 4L_2^2 = \dfrac{\mu_2-\mu . \mu_2-\mu_1}{a+\mu_2 . a'+\mu_2 . a''+\mu_2} \end{cases}$$

ist, so sind auch die Coëfficienten der letzten Bedingungsgleichung

$$(82.)\quad \left[\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)^2 + \frac{1}{L_1^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu_1}\right)^2 + \frac{1}{L_2^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu_2}\right)^2\right]_{\mu=\infty} = 0$$

hierdurch bekannt.

Vorausgesetzt nun, die Gleichungen (78, 80, 82.) gestatten *nur eine* Lösung φ, welche allen zugleich genügt, so ist es leicht, dieselbe zu finden. Man darf nur, was der Erfolg rechtfertigt, die V sämmtlich von μ_1, μ_2 unabhängig annehmen. Dann zerfällt die Gleichung (78.) in folgende sechs:

$$(83.)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2V}{du^2}(a+\mu) + \dfrac{dV}{du}\cdot\dfrac{d(a+\mu)}{du} = 0, \\ \qquad \dfrac{d^2V^{12}}{du^2}(a'+\mu . a''+\mu) + \dfrac{dV^{12}}{du}\cdot\dfrac{d(a'+\mu . a''+\mu)}{du} = 0, \\ \dfrac{d^2V'}{du^2}(a'+\mu) + \dfrac{dV'}{du}\cdot\dfrac{d(a'+\mu)}{du} = 0, \\ \qquad \dfrac{d^2V^{20}}{du^2}(a''+\mu . a+\mu) + \dfrac{dV^{20}}{du}\cdot\dfrac{d(a''+\mu . a+\mu)}{du} = 0, \\ \dfrac{d^2V''}{du^2}(a''+\mu) + \dfrac{dV''}{du}\cdot\dfrac{d(a''+\mu)}{du} = 0, \\ \qquad \dfrac{d^2V^{01}}{du^2}(a+\mu . a'+\mu) + \dfrac{dV^{01}}{du}\cdot\dfrac{d(a+\mu . a'+\mu)}{du} = 0, \end{cases}$$

deren Lösungen

$$(84.)\quad \begin{cases} a+\mu\cdot\dfrac{dV}{du} = C, & a'+\mu\cdot a''+\mu\cdot\dfrac{dV^{12}}{du} = C^{12}, \\ a'+\mu\cdot\dfrac{dV'}{du} = C', & a''+\mu\cdot a+\mu\cdot\dfrac{dV^{20}}{du} = C^{20}, \\ a''+\mu\cdot\dfrac{dV''}{du} = C'', & a+\mu\cdot a'+\mu\cdot\dfrac{dV^{01}}{du} = C^{01} \end{cases}$$

und endlich

$$(85.)\quad \begin{cases} V = -C\int_\mu^\infty \frac{du}{a+\mu} = -CS_0, \\ \qquad V^{12} = -C^{12}\int_\mu^\infty \frac{du}{a'+\mu.a''+\mu} = C^{12}\frac{S'-S''}{a'-a''}, \\ V' = -C'\int_\mu^\infty \frac{du}{a'+\mu} = -C'S', \\ \qquad V^{20} = -C^{20}\int_\mu^\infty \frac{du}{a''+\mu.a+\mu} = C^{20}\frac{S''-S^0}{a''-a}, \\ V'' = -C''\int_\mu^\infty \frac{du}{a''+\mu} = -C''S'', \\ \qquad V^{01} = -C^{01}\int_\mu^\infty \frac{du}{a+\mu.a'+\mu} = C^{01}\frac{S^0-S'}{a-a'} \text{ sind.} \end{cases}$$

Ich habe die obere Grenze des Integrals überall unendlich gesetzt, um der Gleichung (82.) zu genügen. Man erhält nämlich, in Folge der Entwicklung

$$(86.)\quad -u = \int_\mu^\infty \frac{d\mu}{\sqrt{(a+\mu.a'+\mu.a''+\mu)}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\mu}} - \frac{a+a'+a''}{3\sqrt{\mu^3}} + \frac{(3a^2+a'^2+a''^2)+2(aa'+a'a''+a''a)}{20\sqrt{\mu^5}} + \cdots$$

durch Differentiation:

$$(87.)\quad \begin{cases} S = 2\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{2}{3\sqrt{\mu^3}} - \frac{3a+a'+a''}{5\sqrt{\mu^5}} + \cdots, \\ S' = 2\frac{\partial u}{\partial a'} = \frac{2}{3\sqrt{\mu^3}} - \frac{3a'+a''+a}{5\sqrt{\mu^5}} + \cdots, \\ S'' = 2\frac{\partial u}{\partial a''} = \frac{2}{3\sqrt{\mu^3}} - \frac{3a''+a+a'}{5\sqrt{\mu^5}} + \cdots; \end{cases}$$

welche Entwicklungen gewifs convergiren, wenn μ sehr grofs ist. Hieraus sieht man, dafs die Ausdrücke Vy, $V'y'$, $V''y''$ mit der -1ten, $V^{12}y'y''$, $V^{20}y''y$ und $V^{01}yy'$ mit der $-\frac{3}{2}$ten Potenz von μ beginnen; ihre Differentialquotienten nach μ_1, μ_2 also desgleichen, und ihre Differentialquotienten nach μ respective mit der -2ten und der $-\frac{5}{2}$ten Potenz. Demnach beginnt $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)^2$ mit der -4ten, und $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu_1}\right)^2$, $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu_2}\right)^2$ mit der -3ten. Erwägt man hierzu, dafs wenn μ sehr grofs ist, $\frac{1}{L^2}$ mit μ, $\frac{1}{L_1^2}$ und $\frac{1}{L_2^2}$ mit $\frac{1}{\mu}$ proportional sind, so verschwindet offenbar, wenn $\mu=\infty$ ist, jedes Glied der Gleichung (82.) für sich, und sie wird demnach erfüllt.

Es bleiben noch die C zu bestimmen. Führt man die Gleichungen (84, 85.) in (80.) ein, so gehen dieselben in die folgenden über:

$$(88.)\quad \begin{cases} \dfrac{2C}{\sqrt{(aa'a'')}} = 1 + C\,S_0^0, & \dfrac{2C^{12}}{\sqrt{(aa'a'')}} = -\dfrac{(a'-a'')^2 + (a'+a'')(S'-S'')C^{12}}{a''-a'}, \\ \dfrac{2C'}{\sqrt{(aa'a'')}} = 1 + C'\,S_0', & \dfrac{2C^{20}}{\sqrt{(aa'a'')}} = -\dfrac{(a''-a)^2 + (a''+a)(S''-S)C^{20}}{a-a''}, \\ \dfrac{2C''}{\sqrt{(aa'a'')}} = 1 + C''S_0'', & \dfrac{2C^{01}}{\sqrt{(aa'a'')}} = -\dfrac{(a-a')^2 + (a+a')(S-S')C^{01}}{a'-a}; \end{cases}$$

oder, wenn man

$$(89.)\quad \begin{cases} \Sigma = S^0 + S' + S'' = \dfrac{2}{\sqrt{(a+\mu.a'+\mu.a''+\mu)}}, \\ \Sigma_0 = \dfrac{2}{\sqrt{(aa'a'')}} \end{cases}$$

setzt, in:

$$(90.)\quad \begin{cases} C = \dfrac{1}{\Sigma_0 - S_0^0}, & C^{12} = -\dfrac{(a''-a')^2}{(a''-a')\Sigma_0 + (a''+a')(S_0''-S_0')}, \\ C' = \dfrac{1}{\Sigma_0 - S_0'}, & C^{20} = -\dfrac{(a-a'')^2}{(a-a'')\Sigma_0 + (a+a'')(S_0-S_0'')}, \\ C'' = \dfrac{1}{\Sigma_0 - S_0''}, & C^{01} = -\dfrac{(a'-a)^2}{(a'-a)\Sigma_0 + (a'-a)(S_0'-S_0)}, \end{cases}$$

und die Function φ nimmt somit folgenden Werth an:

$$(91.)\quad \varphi = -\left\{\frac{\gamma S.A}{\Sigma_0 - S_0} + \frac{\gamma' S'.A'}{\Sigma_0 - S_0'} + \frac{\gamma'' S''.A''}{\Sigma_0 - S_0''}\right\}$$
$$+\left\{\frac{(a'-a'')(S'-S'')\gamma'\gamma''.A^{12}}{(a'-a'')\Sigma_0 + (a'+a'')(S_0'-S_0'')} + \frac{(a''-a)(S''-S)\gamma''\gamma.A^{20}}{(a''-a)\Sigma_0 + (a''+a)(S_0''-S_0)}\right.$$
$$\left. + \frac{(a-a')(S-S')\gamma\gamma'.A^{01}}{(a-a')\Sigma_0 + (a+a')(S_0-S_0')}\right\}.$$

Wegen der Coëfficienten ist noch Einiges zu bemerken. Zunächst sind die S sämmtlich *positiv*, und also auch Σ; dabei ist

$$(92.)\quad S < S' < S''.$$

Die C sind also (mit Einem oberen Index) sämmtlich positiv; und zwar ist

$$(93.)\quad C < C' < C''.$$

Die übrigen C lassen sich auch in der Form

$$(94.)\quad\begin{cases} -\dfrac{C^{12}}{a''-a'} = \dfrac{1}{S_0+2\int_0^\infty \frac{\mu d\mu}{a'+\mu.a''+\mu}\cdot\frac{1}{\sqrt{(a+\mu.a'+\mu.a''+\mu)}}}, \\ -\dfrac{C^{20}}{a-a''} = \dfrac{1}{S'_0+2\int_0^\infty \frac{\mu d\mu}{a''+\mu.a+\mu}\cdot\frac{1}{\sqrt{(a+\mu.a'+\mu.a''+\mu)}}}, \\ -\dfrac{C^{01}}{a'-a} = \dfrac{1}{S''_0+2\int_0^\infty \frac{\mu d\mu}{a+\mu.a'+\mu}\cdot\frac{1}{\sqrt{(a+\mu.a'+\mu.a''+\mu)}}} \end{cases}$$

dar en. Links stehen gerade die Coëfficienten, welche in der zweiten Parenthese der Gleichung (91.) vorkommen. Sie sind, wie man sieht, ebenfalls sämmtlich *positiv*.

Die Gröfsen S, S', S'' lassen sich leicht auf die gewöhnliche Form der elliptischen Transcendenten bringen. Doch hat Dies, wie mir scheint, nur ein geringes Interesse, zumal da die Symmetrie der Formeln alsdann verloren geht.

§. 10.
Correctionen der Masse und der Trägheitsmomente.

Bei der Bewegung des Körpers kann man, da derselbe symmetrisch ist, auf die Gleichungen (46, 47.) zurückgehen. Da indefs die Bestimmung der β, γ etwas weitläufig wird, so begnüge ich mich, die Werthe der mit $\varDelta$ bezeichneten Correctionen anzugeben. Sie sind:

$$(95.)\quad\begin{cases} \varDelta\, M = -qV_0 \int y \cos(n, y)\, do, \\ \qquad \varDelta M^0 = -qV_0^{12}\int y'y''\{y'\cos(n,y'')-y''\cos(n,y')\}, \\ \varDelta'\, M = -qV'_0 \int y'\cos(n,y')\, do, \\ \qquad \varDelta M' = -qV_0^{20}\int y''y\{y''\cos(n,y)-y\cos(n,y'')\}, \\ \varDelta''M = -qV''_0\int y''\cos(n,y'')\, do, \\ \qquad \varDelta M'' = -qV_0^{01}\int yy'\{y\cos(n,y')-y'\cos(n,y)\}; \end{cases}$$

wo die Integrale für die ganze Oberfläche des Ellipsoïds zu nehmen sind. Man kann dieselben aber durch dreifache Integrale ersetzen, die über das ganze Volumen des Ellipsoïds auszudehnen sind, und hat alsdann:

$$(96.)\quad\begin{cases} \varDelta M = -qV_0\int dy\,dy'\,dy'', & \varDelta M^0 = -qV_0^{12}\int(y'y'-y''y'')\,dy\,dy'\,dy'', \\ \varDelta' M = -qV'_0\int dy\,dy'\,dy'', & \varDelta M' = -qV_0^{20}\int(y''y''-yy)\,dy\,dy'\,dy'', \\ \varDelta'' M = -qV''_0\int dy\,dy'\,dy'', & \varDelta M'' = -qV_0^{01}\int(yy-y'y')\,dy\,dy'\,dy''. \end{cases}$$

Es bleiben noch die C zu bestimmen. Führt man die Gleichungen (84, 85.) in (80.) ein, so gehen dieselben in die folgenden über:

$$(88.)\quad \begin{cases} \dfrac{2C}{\sqrt{(aa'a'')}} = 1 + C\,S_0^0, & \dfrac{2C^{12}}{\sqrt{(aa'a'')}} = -\dfrac{(a'-a'')^2 + (a'+a'')(S'-S'')C^{12}}{a''-a'}, \\ \dfrac{2C'}{\sqrt{(aa'a'')}} = 1 + C'S'_0, & \dfrac{2C^{20}}{\sqrt{(aa'a'')}} = -\dfrac{(a''-a)^2 + (a''+a)(S''-S)C^{20}}{a-a''}, \\ \dfrac{2C''}{\sqrt{(aa'a'')}} = 1 + C''S''_0, & \dfrac{2C^{01}}{\sqrt{(aa'a'')}} = -\dfrac{(a-a')^2 + (a+a')(S-S')C^{01}}{a'-a}; \end{cases}$$

oder, wenn man

$$(89.)\quad \begin{cases} \Sigma = S^0 + S' + S'' = \dfrac{2}{\sqrt{(a+\mu\,.\,a'+\mu\,.\,a''+\mu)}}, \\ \Sigma_0 = \dfrac{2}{\sqrt{(aa'a'')}} \end{cases}$$

setzt, in:

$$(90.)\quad \begin{cases} C = \dfrac{1}{\Sigma_0 - S_0^0}, & C^{12} = -\dfrac{(a''-a')^2}{(a''-a')\Sigma_0 + (a''+a')(S''_0 - S'_0)}, \\ C' = \dfrac{1}{\Sigma_0 - S'_0}, & C^{20} = -\dfrac{(a-a'')^2}{(a-a'')\Sigma_0 + (a+a'')(S_0 - S''_0)}, \\ C'' = \dfrac{1}{\Sigma_0 - S''_0}, & C^{01} = -\dfrac{(a'-a)^2}{(a'-a)\Sigma_0 + (a'-a)(S'_0 - S_0)}, \end{cases}$$

und die Function φ nimmt somit folgenden Werth an:

$$(91.)\quad \varphi = -\left\{\frac{\gamma S\,.\,A}{\Sigma_0 - S_0} + \frac{\gamma' S'\,.\,A'}{\Sigma_0 - S'_0} + \frac{\gamma'' S''\,.\,A''}{\Sigma_0 - S''_0}\right\}$$
$$+\left\{\frac{(a'-a'')(S'-S'')\gamma'\gamma''\,.\,A^{12}}{(a'-a'')\Sigma_0 + (a'+a'')(S'_0 - S''_0)} + \frac{(a''-a)(S''-S)\gamma''\gamma\,.\,A^{20}}{(a''-a)\Sigma_0 + (a''+a)(S''_0 - S_0)}\right.$$
$$\left.+\frac{(a-a')(S-S')\gamma\gamma'\,.\,A^{01}}{(a-a')\Sigma_0 + (a+a')(S_0 - S'_0)}\right\}.$$

Wegen der Coëfficienten ist noch Einiges zu bemerken. Zunächst sind die S sämmtlich *positiv*, und also auch Σ; dabei ist

$$(92.)\quad S < S' < S''.$$

Die C sind also (mit Einem oberen Index) sämmtlich positiv; und zwar ist

$$(93.)\quad C < C' < C''.$$

Die übrigen C lassen sich auch in der Form

$$(101.)\quad\begin{cases}\dfrac{\mu-\mu_1\cdot\mu-\mu_2}{a+\mu\cdot a'+\mu\cdot a''+\mu}\cdot\dfrac{d\mu}{d\xi}=-2\gamma\left[\dfrac{1}{a+\mu}\left(1+\dfrac{S}{\Sigma_0-S_0}\right)+\dfrac{2\dfrac{\partial S}{\partial\mu}}{\Sigma_0-S_0}\right],\\[2ex]\dfrac{\mu_1-\mu_2\cdot\mu_1-\mu}{a+\mu_1\cdot a'+\mu_1\cdot a''+\mu_1}\cdot\dfrac{d\mu_1}{d\xi}=-2\gamma\cdot\dfrac{1}{a+\mu_1}\left(1+\dfrac{S}{\Sigma_0-S_0}\right),\\[2ex]\dfrac{\mu_2-\mu\cdot\mu_2-\mu_1}{a+\mu_2\cdot a'+\mu_2\cdot a''+\mu_2}\cdot\dfrac{d\mu_2}{d\xi}=-2\gamma\cdot\dfrac{1}{a+\mu_2}\left(1+\dfrac{S}{\Sigma_0-S_0}\right).\end{cases}$$

Diesen Gleichungen läfst sich auch die Form

$$(102.)\quad\begin{cases}\mu_2-\mu\cdot d\Omega=\dfrac{d\mu_1}{a'+\mu_1\cdot a''+\mu_1},\\[2ex]\mu-\mu_1\cdot d\Omega=\dfrac{d\mu_2}{a'+\mu_2\cdot a''+\mu_2},\\[2ex]\mu_1-\mu_2\cdot d\Omega=\dfrac{d\mu}{a'+\mu\cdot a''+\mu}\cdot\left\{1-\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}(\Sigma_0-S_0+S)\sqrt{(a+\mu\cdot a'+\mu\cdot a''+\mu)}}\right\}\end{cases}$$

geben. Multiplicirt man sie mit

$$a'+\mu_1,\quad a'+\mu_2,\quad a'+\mu,$$

oder mit

$$a''+\mu_1,\quad a''+\mu_2,\quad a''+\mu,$$

so erhält man unmittelbar die zwei vollständigen Differentiale:

$$(103.)\quad\begin{cases}2\dfrac{dy''}{y''}=\dfrac{d\mu}{a''+\mu}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}(\Sigma_0-S_0+S)\sqrt{(a+\mu\cdot a'+\mu\cdot a''+\mu)}},\\[2ex]2\dfrac{dy'}{y'}=\dfrac{d\mu}{a+\mu}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}(\Sigma_0-S_0+S)\sqrt{(a+\mu\cdot a'+\mu\cdot a''+\mu)}},\end{cases}$$

oder, durch Integration:

$$(104.)\quad\begin{cases}2\log y''=\displaystyle\int\dfrac{d\mu}{a''+\mu}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}(\Sigma_0-S_0+S)\sqrt{(a+\mu\cdot a'+\mu\cdot a''+\mu)}},\\[2ex]2\log y'=\displaystyle\int\dfrac{d\mu}{a'+\mu}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}(\Sigma_0-S_0+S)\sqrt{(a+\mu\cdot a'+\mu\cdot a''+\mu)}}.\end{cases}$$

Es sind also die Coordinaten des Theilchens durch den Parameter desjenigen *confocalen Ellipsoïds* ausgedrückt, auf welchem es sich gerade befindet.

Die Integrale allerdings sind wohl weiter nicht darstellbar; nicht einmal näherungsweise, mittels der in der Theorie der elliptischen Functionen angegebenen Entwicklungen. Wenn man indefs soweit in die Flüssigkeit hineingeht, dafs sich die *sechste* und höhere Potenzen von $\sqrt{\frac{a}{\mu}}\ \sqrt{\frac{a'}{\mu}}\ \sqrt{\frac{a''}{\mu}}$ vernachlässigen lassen, so kann man den Integralen (104.) folgende einfache

Form geben:

$$(105.)\quad \begin{cases} \log\frac{y''}{y''_0} = \frac{S''}{\Sigma_0 - S_0}, & y'' = y''_0\left(1+\frac{S''}{\Sigma_0-S_0}\right)+\cdots, \\ \log\frac{y'}{y'_0} = \frac{S'}{\Sigma_0 - S_0}, & y' = y'_0\left(1+\frac{S'}{\Sigma_0-S_0}\right)+\cdots. \end{cases}$$

Es zeigt sich hieraus, dafs im Anfange, bei abnehmendem μ, die Bahncurve etwas von der y Axe sich entfernt, um sich ihr dann auf dieselbe Weise wieder zu nähern, und endlich ihr parallel zu werden.

Vernachlässigt man auch die *vierten* Potenzen von $\sqrt{\frac{a}{\mu}}$, $\sqrt{\frac{a'}{\mu}}$, $\sqrt{\frac{a''}{\mu}}$, so erhält man:

$$106.)\quad \begin{cases} y'' = y''_0\left(1+\frac{2}{3(\Sigma_0-S_0)\sqrt{\mu^3}}\right), \\ y' = y'_0\left(1+\frac{2}{3(\Sigma_0-S_0)\sqrt{\mu^3}}\right), \end{cases}$$

Die Bahncurve liegt hier in einer *Ebene*, welche durch die Axe y geht. Erwägt man hiezu, dafs zugleich die Gleichung (74.) in

$$(107.)\quad 1 = \frac{y^2+y'^2+y''^2}{\mu} = \frac{r^2}{\mu}$$

übergeht, so wird die Gleichung der Curve in ihrer Ebene, wenn z den Abstand von der y Axe und r den Radiusvector bedeutet, zu:

$$(108.)\quad z = z_0\left(1+\frac{2}{3(\Sigma_0-S_0)}\cdot\frac{1}{r^3}\right);$$

welche Curve, wie man sieht, schnell einer geraden Linie sich nähert.

Man betrachte *zweitens* den Fall, wo das Ellipsoïd um eine Haupt-Axe *rotirt*. Es sei wieder y die Rotations-Axe. Es verschwinden alle A, aufser A^{12}, und φ nimmt die Form

$$(109.)\quad \varphi = \varkappa(S'-S'')y'y''A^{12}, \qquad \varkappa = \frac{a'-a''}{(a'-a'')\Sigma_0+(a'+a'')(S'_0-S''_0)}$$

an. Die Gleichungen (15.) geben alsdann:

$$(110.)\quad \begin{cases} L^2\frac{d\mu}{dt} = y'y''.\tfrac{1}{2}A^{12}\Big[\left(\frac{1}{a'+\mu}-\frac{1}{a''+\mu}\right)+\varkappa(S'-S'')\left(\frac{1}{a'+\mu}+\frac{1}{a''+\mu}\right) \\ \qquad\qquad +2\varkappa\frac{\partial(S'-S'')}{\partial\mu}\Big], \\ L_1^2\frac{d\mu_1}{dt} = y'y''.\tfrac{1}{2}A^{12}\Big[\left(\frac{1}{a'+\mu_1}-\frac{1}{a''+\mu_1}\right)+\varkappa(S'-S'')\left(\frac{1}{a'+\mu_1}+\frac{1}{a''+\mu_1}\right)\Big], \\ L_2^2\frac{d\mu_2}{dt} = y'y''.\tfrac{1}{2}A^{12}\Big[\left(\frac{1}{a'+\mu_2}-\frac{1}{a''+\mu_2}\right)+\varkappa(S'-S'')\left(\frac{1}{a'+\mu_2}+\frac{1}{a''+\mu_2}\right)\Big], \end{cases}$$

welche sich auf folgende Form bringen lassen:

$$(111.)\quad \begin{cases} d\Omega(m+n\mu_1)(\mu_2-\mu) = \dfrac{d\mu_1}{a+\mu_1}, \\ d\Omega(m+n\mu_2)(\mu-\mu_1) = \dfrac{d\mu_2}{a+\mu_2}, \\ d\Omega(m+n\mu)\,(\mu_1-\mu_2) = \dfrac{d\mu}{a+\mu}\{1-M\}, \end{cases}$$

$$(112.)\quad M = \frac{2\varkappa(a''-a')}{2\varkappa(a''-a')-[(a''-a')+\varkappa(S'-S'')(a''+a'+2\mu)]\sqrt{(a+\mu.a'+\mu.a''+\mu)}},$$

So findet man also *ein* Integral, indem man die Gleichungen (111.) addirt, nämlich:

$$(113.)\quad 2\log y = \int\frac{M d\mu}{a+\mu}.$$

Man kann hiebei wie oben näherungsweise verfahren; doch ist Dies um so weniger von Interesse, als über das zweite Integral nichts festzustehen scheint.

§. 12.
Von Rotations-Ellipsoïden.

Der Fall eines Rotations-Ellipsoïds führt auf eine besondere Vereinfachung der angegebenen Formeln; aufser dafs sich die Gröfsen S, S', S'' durch log. und arc. tg. ausdrücken lassen.

Von den sechs Gliedern der Function φ verschwindet dasjenige, welches der Rotation um die ungleiche Axe entspricht. Der *Theorie* nach würde also durch alleinige Rotation um diese Axe *keine* Bewegung in der Flüssigkeit hervorgebracht. Der Fehler der *Theorie* war vorauszusehen, weil bei der Aufstellung der Grundgleichungen des Problems die *Reibung* zwischen der Flüssigkeit und der Wand des Körpers, welche in diesem Fall allein die Ursache einer Bewegung sein kann, vernachlässigt ist.

§. 13.
Bewegung einer Kugel; zumal unter verhinderter Rotation.

Die Gleichungen für die Bewegung einer *Kugel* will ich noch kurz angeben, obgleich die hauptsächlichsten davon in der oben erwähnten Abhandlung von *Dirichlet* zu finden sind.

Setzt man im Obigen

$$(114.)\quad a = a' = a'' = c^2, \quad c^2+\mu = r^2,$$

so ergiebt sich

$$(115.)\qquad S = S' = S'' = \frac{2}{3r^3} \quad \text{und}$$

$$(116.)\qquad \varphi = -\frac{c^3}{2r^3}(Ay + A'y' + A''y''),$$

indem die der Rotation entsprechenden Glieder, wie zu erwarten, verschwinden. Eben so verschwinden die Correctionen der Trägheitsmomente, und die Correction der Masse wird nach allen Richtungen dieselbe, nämlich:

$$(117.)\qquad \Delta M = \tfrac{1}{2}M.$$

Die *Kugel* bewegt sich also, als folgte ihr eine Flüssigkeitsmasse nach, welche ihrem halben Volumen gleichkommt.

Setzt man endlich

$$(118.)\qquad \begin{cases} y = r\cos\vartheta, \\ y' = r\sin\vartheta.\cos\omega, \\ y'' = r\sin\vartheta.\sin\omega, \end{cases}$$

und betrachtet r, ϑ, ω als die Parameter der orthogonalen Oberflächensysteme, so nehmen die Gleichungen für die Bewegung der Flüssigkeit folgende Form an:

$$(119.)\qquad \begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = -\dfrac{r^3-c^3}{r^3}[A\cos\vartheta + \sin\vartheta(A'\cos\omega + A''\sin\omega)], \\ r^2\dfrac{d\vartheta}{dt} = -\dfrac{2r^3+c^3}{2r^3}[-A\sin\vartheta + \cos\vartheta(A'\cos\omega + A''\sin\omega)] \\ \qquad\qquad + r^2(A^{20}\sin\omega - A^{10}\cos\omega), \\ r^2\sin^2\vartheta\dfrac{d\omega}{dt} = -\dfrac{2r^3+c^3}{2r^3}[-A'\sin\omega + A''\cos\omega]\sin\vartheta \\ \qquad\qquad + r^2\sin\vartheta\cos\vartheta(A^{20}\cos\omega + A^{10}\sin\omega) - A^{21}r^2\sin^2\vartheta. \end{cases}$$

Von diesen Gleichungen läfst sich ein Integral angeben, sobald A, A^{10}, A^{20} verschwinden, d. h. wenn der Mittelpunct der Kugel sich in einer *Ebene* bewegt, und eine Rotation der Kugel nur um die *Normale* dieser Ebene gestattet ist. Denn, dividirt man in diesem Falle die ersten beiden Gleichungen durch einander, so erhält man:

$$(120.)\qquad \frac{dr}{d\vartheta} = \frac{r^3-c^3}{2r^3+c^3}\cdot 2r\,\mathrm{tg}\,\vartheta$$

oder, wenn man integrirt:

$$(121.)\qquad (r^3-c^3)\cos^2\vartheta = \alpha^2 r, \quad \text{oder} \quad (r^3-c^3)y^2 = \alpha^2 r^3;$$

wo α eine willkürliche Constante ist und den Werth von y für $r=\infty$ angiebt.

Bewegt sich die Kugel geradlinig, *ohne* Rotation, längs der y-Axe, so erhält man, durch blofse Vertauschung der Coordinaten, aus der Gleichung (121.) die *zwei* Integrale:

$$(122.)\quad \begin{cases}(r^3-c^3)\sin^2\vartheta\cos^2\omega = \beta^2 r,\\ (r^3-c^3)\sin^2\vartheta\sin^2\omega = \gamma^2 r,\end{cases}$$

oder

$$(123.)\quad \begin{cases}\omega = \text{Const.}\\ (r^3-c^3)\sin^2\vartheta = \varkappa^2 r.\end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen sagt nur aus, dafs die Bewegung in einer Ebene vorsichgeht; die zweite giebt die Gleichung der Bahncurve in ihrer Ebene.

Die Curven, welche durch diese Gleichung dargestellt werden, nähern sich, unter wachsendem $\varkappa$, sehr bald geraden Linien, und schon die Curve für welche $\varkappa = 2c$ ist, ist von einer geraden Linie nur noch wenig verschieden. In der That findet man für diejenige Curve, welche an der Stelle der höchsten Erhebung ($\vartheta = \frac{1}{2}\pi$) um den doppelten Radius c von dem Mittelpuncte der Kugel absteht, $\varkappa = 1{,}87\ldots. c$, so dafs die ganze Erhebung der Curve etwa *ein Zehntheil* des Kugelradius beträgt. Dies wird gewissermafsen durch eine Beobachtung von *Duchemin* bestätigt, welcher die entsprechenden Curven bei der Bewegung eines Rotationscylinders längs seiner Axe von einer geraden Linie nicht mehr merklich verschieden fand, wenn man sich um den Radius der Cylinderbasis von der Wand des Cylinders entfernte.

Von den Puncten dieser Curven, welche *Duchemin*, der in ihnen besonders starken Krümmung wegen, *Inflexionspuncte* nennt, habe ich allerdings keine Spur entdecken können.

§. 14.
Pendelbewegung.

Die Gleichung für die *Pendelbewegung* des Körpers wird im gegenwärtigen Falle: (69).

$$(124.)\quad [M^0+\varrho^2(M+\tfrac{1}{2}\mathrm{M})]\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\varrho g(M-\mathrm{M})\sin\psi,$$

wenn man aufser der *Schwere* keine Kraft, und diese in der Richtung x_1 wirksam annimmt; und es ist hier:

$$(125.)\quad M^0 = q_1\cdot\frac{8\pi c^5}{15},\quad M = \frac{4\pi c^3}{3}\cdot q_1,\quad \mathrm{M} = \frac{4\pi c^3}{3}\cdot q,$$

wenn q_1 die *Dichtigkeit* der Kugel bezeichnet.

Nennt man nun λ die Länge eines einfachen Pendels, welches im leeren Raum eben so schwingt wie das gegebene Pendel in der Flüssigkeit, und λ' die Länge desjenigen, welches wie das gegebene im leeren Raume schwingt, so ist:

$$(126.)\qquad \lambda' = \frac{M^0 + \varrho M}{\varrho M}, \qquad \lambda = \frac{M^0 + \varrho^2 (M + \frac{1}{2}\mathrm{M})}{\varrho (M - \mathrm{M})},$$

und demnach, unter Vernachlässigung höherer Potenzen von $\frac{\mathrm{M}}{M}$:

$$(127.)\qquad \lambda = \lambda' \left\{1 + \frac{\mathrm{M}}{M}\left(1 + \frac{\varrho}{2\lambda'}\right)\right\} = \lambda' \left\{1 + n\frac{\mathrm{M}}{M}\right\}.$$

Dies ist die Form, welche man für diese Pendellänge anzunehmen pflegt; der Coëfficient n ist, wie es sein mufs, von den Dichtigkeiten frei; auch nimmt er mit wachsendem ϱ zu, und ab mit wachsendem c. Aber erstlich ist dabei keine unbedeutende Gröfse vernachlässigt; und ferner ist es klar, dafs dieser theoretische Werth von n stets kleiner sein wird als $\frac{3}{2}$, während er in den Beobachtungen, welche *Duchemin* anführt, gröfstentheils zwischen 1,6 und 1,7 liegt (p. 181 etc.). Es macht sich also hier abermals eine Differenz zwischen Theorie und Erfahrung bemerkbar, welche auch durch Berücksichtigung der *Reibung* nicht so unmittelbar scheint beseitigt werden zu können.

Die *Bewegung* der Flüssigkeit wird, da

$$(128.)\qquad \varphi = -\tfrac{1}{2} c^3 \varrho \cdot \frac{d\psi}{dt} \cdot \frac{y''}{r^3} \qquad (\S. 8.)$$

ist, dargestellt durch die Differentialgleichungen

$$(129.)\qquad \begin{cases} \dfrac{dr}{d\psi} = -\dfrac{r^3 - c^3}{r^3}\varrho \sin\vartheta \sin\omega, \\[2ex] r^2 \dfrac{d\vartheta}{d\psi} = -\dfrac{2r^3 + c^3}{2r^3}\varrho \cos\vartheta \sin\omega, \\[2ex] r^2 \sin^2\vartheta \dfrac{d\omega}{d\psi} = -\dfrac{2r^3 + c^3}{2r^3}\varrho \sin\vartheta \cos\omega + r^2 \sin^2\vartheta. \end{cases}$$

Man erhält *ein* Integral nach dem Obigen unmittelbar, nämlich:

$$(130.)\qquad (r^3 - c^3)\cos^2\vartheta = \alpha^2 r;$$

ferner aber aus der ersten und dritten Gleichung:

$$(131.)\qquad 0 = \frac{d\omega}{dr}\sin\omega - \frac{2r^3 + c^3}{2r(r^3 - c^3 - \alpha^2 r)}\cos\omega + \frac{r^3}{(r^3 - c^3)\varrho \sin\vartheta}.$$

Diese Gleichung wird integrabel, wenn man sie mit $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{r^3-c^3-\alpha^2 r}{r}}$ multiplicirt, und giebt alsdann

$$(132.)\qquad \cos\omega.\operatorname{tg}\vartheta = \frac{1}{\alpha\varrho}\int\frac{r^3dr}{\sqrt{(r(r^3-c^3))}}.$$

Das Integral rechts ist durch *elliptische Functionen* ausdrückbar. Denn zunächst ist

$$(133.)\qquad \int\frac{r^3dr}{\sqrt{(r(r^3-c^3))}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(r(r^3-c^3))}+\tfrac{1}{4}c^3\int\frac{dr}{\sqrt{(r(r^3-c^3))}}.$$

Setzt man nun

$$(134.)\qquad r = \frac{c}{1-\sqrt{3}.\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi} = c\cdot\frac{1+\cos\varphi}{(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})\cos\varphi},$$

so erhält man

$$(135.)\qquad \begin{cases} \int_c^r\frac{dr}{\sqrt{(r(r^3-c^3))}} = \frac{1}{c\sqrt[4]{3}}\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\frac{1}{4}(2+\sqrt{3})\sin^2\varphi)}} = \frac{u}{c\sqrt[4]{3}}, \\ r = c\cdot\frac{1+\cos\operatorname{am}u}{(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})\cos\operatorname{am}u},\quad \varkappa^2 = \frac{1}{4}(2+\sqrt{3}) = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2, \end{cases}$$

und endlich

$$(136.)\qquad \sqrt{(r(r^3-c^3))} = c\sqrt[4]{3}.\frac{dr}{du} = \frac{2c^2\sqrt{(3\sqrt{3})}\sin\operatorname{am}\varDelta\operatorname{am}u}{[(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})\cos\operatorname{am}u]^2},$$

so dafs die Gleichung (132.) die Gestalt

$$(137.)\qquad \cos\omega\operatorname{tg}\vartheta = \text{Const.}+\frac{c^2u}{\sqrt[4]{3}}+\frac{c^2\sqrt{(3\sqrt{3})}\sin\operatorname{am}\varDelta\operatorname{am}u}{[(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})\cos\operatorname{am}u]^2}$$

annimmt, durch welche die Bahnen der Flüssigkeitstheilchen nunmehr vollständig bestimmt sind.

Danzig, im August 1854.

9.

Sur l'analogie entre une classe de déterminants d'ordre pair; et sur les déterminants binaires.

(Par Mr. *Brioschi*, professeur à l'université de Pavie.)

Les remarquables recherches de Mr. *Hermite* sur la transformation des fonctions *Abéliennes* (Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Février 1855) l'ont conduit à la considération d'un type de formes quadratiques à quatre indéterminées, dont les coefficients sont soumis à certaines conditions. L'auteur a trouvé les propriétés caractéristiques de ces formes, en considérant l'analogie entre les déterminants binaires et les déterminants de quatrième ordre, dont les éléments sont assujettis à vérifier six équations particulières. Je vais démontrer que cette analogie a aussi lieu entre les déterminants binaires et les déterminants d'ordre n pair, dont les éléments vérifient $\frac{1}{2}n(n-1)$ équations.

1.

Théorème. Le carré d'un déterminant quelconque d'ordre pair, peut toujours être exprimé par un déterminant gauche, symétrique, d'ordre pair.

En effet, en multipliant le déterminant d'ordre n pair:

$$A = \Sigma(\pm a_{1,1}, a_{2,2}, \dots a_{n,n})$$

par le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{1,2} & -a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & -a_{1,n-1} \\ a_{2,2} & -a_{2,1} & \dots & a_{2,n} & -a_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,2} & -a_{n,1} & \dots & a_{n,n} & -a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

égal en valeur à A, on obtient:

$$A^2 = L = \begin{vmatrix} 0 & l_{1,2} & l_{1,3} & \dots & l_{1,n} \\ l_{2,1} & 0 & l_{2,3} & \dots & l_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_{n,1} & l_{n,2} & l_{n,3} & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

où l'on a posé;

$$(1.)\quad l_{r,s} = a_{r,1}a_{s,2} - a_{r,2}a_{s,1} + a_{r,3}a_{s,4} - a_{r,4}a_{s,3} + \cdots + a_{r,n-1}a_{s,n} - a_{r,n}a_{s,n-1}.$$

Or $l_{r,s} + l_{s,r} = 0$, par conséquent L, est un déterminant *gauche symétrique*. Mais tout déterminant gauche symétrique d'ordre pair est un *carré:* donc le déterminant A pourra être exprimé en fonction rationnelle des expressions $l_{r,s}$; pour $n = 4$, par exemple, on a:

$$A = l_{1,2}l_{3,4} - l_{1,3}l_{2,4} + l_{1,4}l_{2,3}.$$

Soit $\alpha_{r,s} = \frac{dA}{da_{r,s}}$. Si dans l'équation l'on fait (1.) $s = 1, 2 \ldots n$, on en tire les valeurs suivantes de $a_{r,1}$, $a_{r,2}$:

$$(2.)\quad \begin{cases} -Aa_{r,i} = \alpha_{1,i-1}l_{r,1} + \alpha_{2,i-1}l_{r,2} + \cdots + \alpha_{n,i-1}l_{r,n}, \\ +Aa_{r,i-1} = \alpha_{1,i}\;\; l_{r,1} + \alpha_{2,i}\;\; l_{r,2} + \cdots + \alpha_{n,i}\;\; l_{r,n} \end{cases} \quad (i \text{ pair})$$

qui donnent

$$(3.)\quad \begin{cases} -A\alpha_{r,i-1} = a_{1,i}\;\; \lambda_{1,r} + a_{2,i}\;\; \lambda_{2,r} + \cdots + a_{n,i}\;\; \lambda_{n,r}, \\ +A\alpha_{r,i} = a_{1,i-1}\lambda_{1,r} + a_{2,i-1}\lambda_{2,r} + \cdots + a_{n,i-1}\lambda_{n,r}, \end{cases}$$

et si

$$\lambda_{r,s} = \frac{dL}{dl_{r,s}},$$

on a

$$\lambda_{r,s} + \lambda_{s,r} = 0, \qquad \lambda_{r,r} = 0.$$

2.

Je considère un second déterminant:

$$C = \Sigma(\pm c_{1,1}, c_{2,2}, \ldots c_{n,n}).$$

En posant

$$p_{r,s} = c_{r,1}c_{s,2} - c_{r,2}c_{s,1} + \cdots + c_{r,n-1}c_{s,n} - c_{r,n}c_{s,n-1}$$

$$\gamma_{r,s} = \frac{dC}{dc_{r,s}}$$

on a:

$$C^2 = P = \begin{vmatrix} 0 & p_{1,2} & \cdots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & 0 & \cdots & p_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

et, analoguement aux équations (2.):

$$(4.)\quad \begin{cases} -Cc_{s,i} = \gamma_{1,i-1}p_{s,1} + \gamma_{2,i-1}p_{s,2} + \cdots + \gamma_{n,i-1}p_{s,n}, \\ +Cc_{s,i-1} = \gamma_{1,i}\;\; p_{s,1} + \gamma_{2,i}\;\; p_{s,2} + \cdots + \gamma_{n,i}\;\; p_{s,n}. \end{cases}$$

Soit

$$(5.)\quad a_{r,1}c_{s,1}+a_{r,2}c_{s,2}+\cdots+a_{r,n}c_{s,n} = A_{r,s},$$

on a:

$$AC=\triangle=\Sigma(\pm A_{1,1}A_{2,2}\cdots A_{n,n}),$$

et par conséquent:

$$\triangle^2=H=\begin{vmatrix} 0 & L_{1,2} & \dots & L_{1,n} \\ L_{2,1} & 0 & \dots & L_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{n,1} & L_{n,2} & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

$$(6.)\quad L_{r,s} = A_{r,1}A_{s,2}-A_{r,2}A_{s,1}+\cdots+A_{r,n-1}A_{s,n}-A_{r,n}A_{s,n-1}.$$

Si l'on pose

$$(7.)\quad k_{j,r} = \gamma_{j,2}a_{r,1}-\gamma_{j,1}a_{r,2}+\cdots+\gamma_{j,n}a_{r,n-1}-\gamma_{j,n-1}a_{r,n},$$

les équations (4. et 5.) donnent:

$$(8.)\quad C.A_{r,s} = k_{1,r}p_{s,1}+k_{2,r}p_{s,2}+\cdots+k_{n,r}p_{s,n}.$$

Mais en faisant $r=1, 2, \dots n$ dans (7.), et en multipliant par $\lambda_1, r, \lambda_2, r, \dots$ les équations, qui en résultent, on obtient, en égard aux équations (3.):

$$A.B_{r,j} = k_{j,1}\lambda_{1,r}+k_{j,2}\lambda_{2,r}+\cdots+k_{j,n}\lambda_{n,r},$$

où $B_{r,j}=\frac{d\triangle}{dA_{r,j}}$, et par conséquent:

$$(9.)\quad Ak_{j,r} = B_{1,j}l_{r,1}+B_{2,j}l_{r,2}+\cdots+B_{n,j}l_{r,n}.$$

3.

Soit encore:

$$(10.)\quad C_{r,s} = A_{1,r}c_{s,1}+A_{2,r}c_{s,2}+\cdots+A_{n,r}c_{s,n},$$

$$\nabla=\Sigma(\pm C_{1,1}C_{2,2}\dots C_{n,n},$$

on a:

$$\nabla^2=K=\begin{vmatrix} 0 & P_{1,2} & \dots & P_{1,n} \\ P_{2,1} & 0 & \dots & P_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n,1} & P_{n,2} & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

$$P_{r,s} = C_{r,1}C_{s,2}-C_{r,2}C_{s,1}+\cdots+C_{r,n-1}C_{s,n}-C_{r,n}C_{s,n-1}.$$

En substituant dans (10.) pour $A_{1,r}$, $A_{2,r}$, ... les valeurs données par l'équation (8.), et en posant

$$(11.)\quad q_{s,r} = c_{s,1}k_{r,1}+c_{s,2}k_{r,2}+\cdots+c_{s,n}k_{r,n},$$

on obtient:

$$(12.)\qquad C.C_{r,s} = q_{s,1}p_{r,1}+q_{s,2}p_{r,2}+\cdots+q_{s,n}p_{r,n}.$$

Si en dernier lieu on fait

$$D_{r,s} = \frac{d\nabla}{dC_{r,s}},$$

on a:

$$C.B_{s,r} = D_{r,1}c_{1,s}+D_{r,2}c_{2,s}+\cdots+D_{r,n}c_{n,s},$$

d'où, en posant $s=1, 2, \ldots n$, et en ajoutant les résultats, multipliés par $c_{s,2}, -c_{s,1}, \ldots c_{s,n}, -c_{s,n-1}$, on obtient:

$$(13.)\qquad \begin{aligned} C(B_{1,r}c_{s,2}-B_{2,r}c_{s,1}+\cdots+B_{n-1,r}c_{s,n}-B_{n,r}c_{s,n-1}) \\ = D_{r,1}p_{1,s}+D_{r,2}p_{2,s}+\cdots+D_{r,n}p_{n,s}. \end{aligned}$$

4.

On trouverait des formules analogues si l'on multipliait le déterminant A par

$$A = \begin{vmatrix} +a_{2,1} & +a_{2,2} & \cdots & +a_{2,n} \\ -a_{1,1} & -a_{1,2} & \cdots & -a_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ +a_{n,1} & +a_{n,2} & \cdots & +a_{n,n} \\ -a_{n-1,1} & -a_{n-1,2} & \cdots & -a_{n-1,n} \end{vmatrix},$$

ou aussi par quelque autre disposition qui rend A^2 *gauche symétrique*. Ces formules auront évidemment des relations avec celles ci-dessus. Par exemple, si l'on fait:

$$A^2 = M = \begin{vmatrix} 0 & m_{1,2} & \cdots & m_{1,n} \\ m_{2,1} & 0 & \cdots & m_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_{n,n} \end{vmatrix},$$

$$m_{r,s} = a_{1,r}a_{2,s}-a_{2,r}a_{1,s}+\cdots+a_{n-1,r}a_{n,s}-a_{n,r}a_{n-1,s},$$

et

$$(14.)\qquad h_{r,s} = l_{2,r}a_{1,s}-l_{1,r}a_{2,s}+\cdots+l_{n,r}a_{n-1,s}-l_{n-1,r}a_{n,s},$$

on aura:

$$(15.)\qquad \begin{cases} +Am_{i,s} = h_{1,s}\alpha_{1,i-1}+h_{2,s}\alpha_{2,i-1}+\cdots+h_{n,s}\alpha_{n,i-1}, \\ -Am_{i-1,s} = h_{1,s}\alpha_{1,i}\ +h_{2,s}\alpha_{2,i}\ +\cdots+h_{n,s}\alpha_{n,i}. \end{cases} \qquad (i \text{ pair})$$

5.

Supposons que les quantités $a_{r,s}$, $c_{r,s}$ donnent

$$(16.)\qquad \begin{cases} l_{1,2}=l_{3,4}=\cdots=l_{n-1,n}=t, \\ p_{1,2}=p_{3,4}=\cdots=p_{n-1,n}=u, \end{cases}$$



et réduisent à zéro toutes les autres expressions $l_{r,s}$, $p_{r,s}$, on aura:

$$L = t^n, \quad P = u^n,$$

et les équations (2.) donneront:

$$(17.)\quad \begin{cases} \alpha_{r,i} \;= +t^m a_{r-1,i-1}, & \alpha_{r,i-1} \;= -t^m a_{r-1,i}, \\ \alpha_{r-1,i} = -t^m a_{r,i-1}, & \alpha_{r-1,i-1} = +t^m a_{r,i}. \end{cases} \quad (i, r \text{ pairs})\; m = \tfrac{1}{2}n - 1.$$

Ces formules font voir l'analogie entre le déterminant A et les déterminants binaires. On en tire:

$$\begin{aligned} \Sigma(\pm \alpha_{1,1}\alpha_{2,2}\dots\alpha_{i,i}) &= t^{mi}\,.\;\Sigma(\pm a_{1,1}a_{2,2}\dots a_{i,i}), \\ \Sigma(\pm \alpha_{1,1}\alpha_{2,2}\dots\alpha_{i-1,i-1}) &= t^{m(i-1)}\Sigma(\pm a_{1,1}a_{2,2}\dots a_{i-2,i-2}a_{i,i}), \end{aligned}$$

et par conséquent:

$$\begin{aligned} t^{m-i+1}\Sigma(\pm a_{1,1}a_{2,2}\dots a_{i,i}) &= \Sigma(\pm a_{i+1,i+1}\,a_{i+2,i+2}\dots a_{n,n}), \\ t^{m-i+2}\Sigma(\pm a_{1,1}a_{2,2}\dots a_{i-2,i-2}a_{i,i}) &= \Sigma(\pm a_{i,i}\quad a_{i+1,i+1}\dots a_{n,n}). \end{aligned}$$

L'équation (8.), à cause des conditions (16.), donne:

$$u^m A_{s,r} = -k_{r-1,s}, \quad u^m A_{s,r-1} = k_{r,s} \quad (r \text{ pair})$$

ou, en vertu de l'équation (9.):

$$\begin{aligned} t^m u^m A_{i,r} \;&= +B_{i-1,r-1}, & t^m u^m A_{i-1,r} \;&= -B_{i,r-1}, \\ t^m u^m A_{i,r-1} &= -B_{i-1,r}, & t^m u^m A_{i-1,r-1} &= +B_{i,r}. \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (6.), on obtient:

$$\begin{aligned} -t^m u^m L_{i,s} \;&= A_{s,1}B_{i-1,1} + A_{s,2}B_{i-1,2} + \dots + A_{s,n}B_{i-1,n}, \\ +t^m u^m L_{i-1,s} &= A_{s,1}B_{i,1} \;+ A_{s,2}B_{i,2} \;+ \dots + A_{s,n}B_{i,n}; \end{aligned}$$

c'est à dire, on aura:

$$L_{1,2} = L_{3,4} = \dots = L_{n-1,n} = t.u;$$

et toutes les autres expressions $L_{r,s}$ seront zéro.

Pareillement on tire des équations (11, 12.):

$$\begin{aligned} -t^m u^m C_{i,s} \;&= B_{2,i-1}c_{s,1} - B_{1,i-1}c_{s,2} + \dots + B_{n,i-1}c_{s,n-1} - B_{n-1,i-1}c_{s,n}, \\ +t^m u^m C_{i-1,s} &= B_{2,i}\quad c_{s,1} - B_{1,i}\quad c_{s,2} + \dots + B_{n,i}\quad c_{s,n-1} - B_{n-1,i}c_{s,n} \end{aligned}$$

et à cause de (13.):

$$\begin{aligned} t^m u^{2m} C_{i,r} \;&= +D_{i-1,r-1}, & t^m u^{2m} C_{i-1,r} \;&= -D_{i,r-1}, \\ t^m u^{2m} C_{i,r-1} &= -D_{i-1,r}, & t^m u^{2m} C_{i-1,r-1} &= +D_{i,r}. \end{aligned}$$

Donc on a:

$$\begin{aligned} -t^m u^{2m} P_{i,s} \;&= C_{s,1}D_{i-1,1} + C_{s,2}D_{i-1,2} + \dots + C_{s,n}D_{i-1,n}, \\ +t^m u^{2m} P_{i-1,s} &= C_{s,1}D_{i,1} \;+ C_{s,2}D_{i,2} \;+ \dots + C_{s,n}D_{i,n}, \end{aligned}$$

et par conséquent:

$$(18.)\qquad P_{1,2} = P_{3,4} = \cdots = P_{n-1,n} = tu^2.$$

Les autres expressions donnent $P_{r,s} = 0$.

Les quantités $m_{r,s}$, liées aux $l_{r,s}$ par les équations (14, 15.), devront satisfaire aux mêmes conditions que celles $l_{r,s}$; c'est à dire, on aura:

$$m_{1,2} = m_{3,4} = \cdots = m_{n-1,n} = l,$$

et les autres donnent $m_{r,s} = 0$.

6.

En supposant que les quantités $a_{r,s}$ soient les coefficients de la *forme quadratique* à n indéterminées:

$$f = \Sigma a_{r,s} x_r x_s,$$

et qu'au moyen de la substitution linéaire

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{1,1}y_1 + c_{2,1}y_2 + \cdots + c_{n,1}y_n, \\ x_2 &= c_{1,2}y_1 + c_{2,2}y_2 + \cdots + c_{n,2}y_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= c_{1,n}y_1 + c_{2,n}y_2 + \cdots + c_{n,n}y_n, \end{aligned}$$

on transforme f en

$$f = \Sigma C_{r,s} y_r y_s,$$

on a le suivant

Théorème. *Si les coefficients $a_{r,s}$ de la forme f, et les coefficients $c_{r,s}$ de la substitution linéaire sont soumis aux conditions* (16.), *ceux de la transformée f seront assujettis aux conditions* (18.).

En désignant par

$$\varphi = \Sigma \alpha_{r,s} X_r X_s$$

la forme adjointe de f, les équations (17.) donnent le suivant

Théorème. *Si les coefficients de la forme f sont soumis aux conditions* (16.), *la forme adjointe φ s'obtiendra en posant dans f:*

$$x_i = + X_{i-1} t^{\frac{1}{2}m}, \qquad x_{i-1} = - X_i t^{\frac{1}{2}m} \quad (i \text{ pair}).$$

La série sygnalétique:

$$1,\quad a_{1,1},\quad \Sigma(\pm a_{1,1} a_{2,2}),\quad \ldots\quad \Sigma(\pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n-1,n-1}),\quad t^{m+1},$$

étant composée d'un nombre impair des termes, dont le premier et le dernier (lorsque m est impair) sont positifs, ne pourra présenter qu'un nombre pair de permanences; par conséquent la loi d'inertie des formes quadratiques due à Mr. *Sylvester,* donne le suivant

Théorème. *Si les coefficients $a_{r,s}$ de la forme f, sont soumis aux conditions* (16.), *et si $\frac{1}{2}n$ est pair, la forme f sera réductible par une substitution réelle, à une somme algébrique de n carrés, desquels un nombre pair auront des signes positifs.*

Ces trois théorèmes sont pour les formes quadratiques à n indéterminées, analogues à ceux qui ont été énoncés par Mr. *Hermite* pour les formes quadratiques à quatre indéterminées.

7.

En supposant que les $\frac{1}{2}n(n-1)$ conditions (16.) soient satisfaites par les quantités $a_{r,s}$, on pourra exprimer ces dernières en fonction de $\frac{1}{2}n(n+1)$ indéterminées. Nous ferons usage pour cela de la méthode employée par Mr. *Hermite* pour la transformation d'une forme quadratique en elle-même. (The Cambridge and Dublin Mathematical Journal N°. XXXIV. 1854.)

Soit:

$$\begin{aligned} \psi(x_1 \dots x_n, \; y_1, \dots y_n) &= \Sigma_r(x_{r-1}y_r - x_r y_{r-1}), \\ \psi(X_1 \dots X_n, \; Y_1, \dots Y_n) &= \Sigma_r(X_{r-1}Y_r - X_r Y_{r-1}), \end{aligned} \quad (r = 2, 4, \dots n).$$

On sait qu'en posant

$$x_s + X_s = 2\omega_s, \qquad y_r + Y_s = 2\theta_s,$$

les valeurs de X_s, Y_s qui transforment en elle-même la fonction ψ, doivent vérifier l'équation

$$X_1\frac{d\psi}{d\omega_1} + \dots + X_n\frac{d\psi}{d\omega_n} + Y_1\frac{d\psi}{d\theta_1} + \dots + Y_n\frac{d\psi}{d\theta_n} = 2\Sigma_r(\omega_{r-1}\theta_r - \omega_r\theta_{r-1}).$$

On satisfera à cette équation avec toute la généralité possible en faisant:

$$\begin{aligned} X_s &= \omega_s - z_{s,1}\frac{d\psi}{d\theta_1} + z_{s,2}\frac{d\psi}{d\theta_2} - \dots + z_{s,n}\frac{d\psi}{d\theta_n}, \\ Y_s &= \theta_s + z_{s,1}\frac{d\psi}{d\omega_1} - z_{s,2}\frac{d\psi}{d\omega_2} + \dots - z_{s,n}\frac{d\psi}{d\omega_n}, \end{aligned}$$

en supposant que les indéterminées $z_{r,s}$ soient soumises aux conditions

$$z_{i,r} = z_{r,i}, \quad z_{i-1,r-1} = z_{r-1,i-1}, \quad z_{i,r-1} = -z_{r-1,i} \quad (i, r \text{ pairs})$$

et par conséquent soient en nombre $\frac{1}{2}n(n+1)$.

En désignant par Z le déterminant

$$\begin{vmatrix} z_{1,1} & 1+z_{1,2} & \dots & z_{1,n-1} & z_{1,n} \\ 1+z_{2,1} & z_{2,2} & \dots & z_{2,n-1} & z_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{n-1,1} & z_{n-1,2} & \dots & z_{n-1,n-1} & 1+z_{n-1,n} \\ z_{n,1} & z_{n,2} & \dots & 1+z_{n,n-1} & z_{n,n} \end{vmatrix}$$

et par

$$\Sigma(\pm v_{1,1} v_{2,2} \dots v_{n,n})$$

le déterminant à éléments réciproques, la forme ψ sera transformée en elle-même par la substitution linéaire

$$\begin{aligned} Zx_r &= 2(v_{1,r-1} X_1 + v_{2,r-1} X_2 + \dots + v_{n,r-1} X_n) - ZX_r, \\ Zx_{r-1} &= 2(v_{1,r} \; X_1 + v_{2,r} \; X_2 + \dots + v_{n,r} \; X_n) - ZX_{r-1}, \\ Zy_r &= 2(v_{1,r-1} Y_1 + v_{2,r-1} Y_2 + \dots + v_{n,r-1} Y_n) - ZY_r, \\ Zy_{r-1} &= 2(v_{1,r} \; Y_1 + v_{2,r} \; Y_2 + \dots + v_{n,r} \; Y_n) - ZY_{r-1}. \end{aligned}$$

Par conséquent les relations (16.) seront vérifiées en posant:

$$\begin{aligned} Za_{r-1,1} &= 2v_{1,r}\sqrt{t}, \; \dots \; Za_{r-1,r-1} = (2v_{r-1,r} - Z)\sqrt{t}, \; \dots \; Za_{r-1,n} = 2v_{n,r}\sqrt{t}, \\ Za_{r,1} &= 2v_{1,r-1}\sqrt{t}, \; \dots \; Za_{r,r} = (2v_{r,r-1} - Z)\sqrt{t}, \; \dots \; Za_{r,n} = 2v_{n,r-1}\sqrt{t}. \end{aligned}$$

8.

Si l'on suppose $n=8$, les conditions (16.) peuvent être aussi satisfaites par les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= +a_{2,2} = +a_{3,3} = +a_{4,4} = a_{5,5} = +a_{6,6} = +a_{7,7} = +a_{8,8} = a, \\ a_{1,2} &= -a_{2,1} = -a_{3,4} = +a_{4,3} = a_{5,6} = -a_{6,5} = -a_{7,8} = +a_{8,7} = b, \\ a_{1,3} &= +a_{2,4} = -a_{3,1} = -a_{4,2} = a_{5,7} = +a_{6,8} = -a_{7,5} = -a_{8,6} = c, \\ a_{1,4} &= -a_{2,3} = +a_{3,2} = -a_{4,1} = a_{5,8} = -a_{6,7} = +a_{7,6} = -a_{8,5} = d, \\ a_{1,5} &= +a_{2,6} = +a_{3,7} = +a_{4,8} = a_{5,1} = +a_{6,2} = +a_{7,3} = +a_{8,4} = e, \\ a_{1,6} &= -a_{2,5} = -a_{3,8} = +a_{4,7} = a_{5,2} = -a_{6,1} = -a_{7,4} = +a_{8,3} = f, \\ a_{1,7} &= +a_{2,8} = -a_{3,5} = -a_{4,6} = a_{5,3} = +a_{6,4} = -a_{7,1} = -a_{8,2} = g, \\ a_{1,8} &= -a_{2,7} = +a_{3,6} = -a_{4,5} = a_{5,4} = -a_{6,3} = +a_{7,2} = -a_{8,1} = h, \end{aligned}$$

et l'on aura:

$$t = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + k^2.$$

En supposant que des équations analogues subsistent entre les quantités $c_{r,s}$ et en faisant:

$$c_{1,1} = a_1, \quad c_{1,2} = b_1, \quad \dots \quad c_{1,8} = k_1,$$

on obtient:

$$u = a_1^2 + b_1^2 + \cdots + h_1^2,$$

et:

$$\begin{aligned}
A_{1,1} &= aa_1 + bb_1 + cc_1 + dd_1 + ee_1 + ff_1 + gg_1 + hh_1 = + A_{2,2} = \cdots,\\
A_{1,2} &= ba_1 - ab_1 + dc_1 - cd_1 + fe_1 - ef_1 + hg_1 - gh_1 = - A_{2,1} = \cdots,\\
A_{1,3} &= ca_1 - db_1 - ac_1 + bd_1 + ge_1 - hf_1 - eg_1 + fh_1 = + A_{2,4} = \cdots,\\
A_{1,4} &= da_1 + cb_1 - bc_1 - ad_1 + he_1 + gf_1 - fg_1 - eh_1 = - A_{2,3} = \cdots,\\
A_{1,5} &= ea_1 + fb_1 + gc_1 + hd_1 + ae_1 + bf_1 + cg_1 + dh_1 = + A_{2,6} = \cdots,\\
A_{1,6} &= fa_1 - eb_1 + hc_1 - gd_1 + be_1 - af_1 + dg_1 - ch_1 = - A_{2,5} = \cdots,\\
A_{1,7} &= ga_1 - hb_1 - ec_1 + fd_1 + ce_1 - df_1 - ag_1 + bh_1 = + A_{2,8} = \cdots,\\
A_{1,8} &= ha_1 + gb_1 - fc_1 - ed_1 + de_1 + cf_1 - bg_1 - ah_1 = - A_{2,7} = \cdots;
\end{aligned}$$

par conséquent l'équation $L_{1,2} = t.u$ donne:

$$A_{1,1}^2 + A_{1,2}^2 + \cdots + A_{1,8}^2 = t.u:$$

extension d'un théorème d'*Euler* très-connu.

Pavie, Mars 1855.

10.

Die Gleichheit und Ähnlichkeit der Figuren, und die Ähnlichkeit derselben.

(Von Herrn Dr. *R. Baltzer*, Oberlehrer am Gymnasium zu Dresden.)

(Auszug aus einer Abhandlung des Verf., die unter demselben Titel mit dem Schulprogramm Ostern 1851 und bei G. Schönfeld in Dresden erschienen ist.)

Die Aufklärungen, welche das System der Geometrie durch die Lehre von den *Verwandtschaften* der Figuren theils erhalten, theils zu erwarten hat, veranlafsten mich, eine *elementare* Behandlung dieser Lehre zu versuchen. Um den Bedenken auszuweichen, welche gegen die bisher zu Grunde gelegten Definitionen wegen Einmischung von Lehrsätzen erhoben werden können, habe ich Linien-, Flächen- und Raumfiguren besonders in Betracht gezogen. Die Allgemeinheit der synthetischen Untersuchung wurde durch Rücksicht auf den Gegensatz der Gröfsen geführt.

I. Gleiche und ähnliche Linearfiguren.

Wenn den Puncten einer Geraden A, B, C, D, .. die Puncte einer Geraden A', B', C', D', .. entsprechen, so dafs $A'B'$, $A'C'$, $A'D'$, .. mit dem gemeinschaftlichen Anfangspunct A', den entsprechenden Strecken einzeln gleich und dabei $A'C'$, $A'D'$, .. mit $A'B'$ einstimmig oder entgegengesetzt sind, je nachdem dies bei den entsprechenden Strecken der Fall ist: so sind $ABCD$.. und $A'B'C'D'$.. *gleiche und ähnliche* Linearfiguren; d. h. jede Strecke ist der entsprechenden (homologen) *gleich*.

Solche Figuren sind *einstimmig*, oder *entgegengesetzt*, wenn die Geraden, auf welchen ihre Puncte liegen, zusammenfallen, oder parallel sind: *einstimmig*, wenn eine Strecke der entsprechenden gleichgerichtet ist, *entgegengesetzt*, wenn eine Strecke der entsprechenden entgegengerichtet ist.

Bei *einstimmig* gleichen und ähnlichen Linearfiguren sind die *Verbindungslinien* der entsprechenden Puncte (*Projectionsstrahlen*, projetantes) AA', BB', .. einstimmig gleich; bei *entgegengesetzt* gleichen und ähnlichen Linearfiguren haben dieselben eine gemeinschaftliche *Mitte*. Beiderlei Figuren sind *perspectivisch*, insofern die Verbindungslinien durch einen Punct (*Pro-*

jectionspunct) gehen; die einstimmigen Figuren haben einen äufsern, unendlich fernen Projectionspunct, die entgegengesetzten einen inneren (*Mittelpunct*); letztere zeigen sich zugleich *involutorisch*.

Wenn die Geraden, worauf gleiche und ähnliche Figuren liegen, sich schneiden und der Durchschnitt *selbstentsprechend* (tautolog) ist, so sind die Figuren *perspectivisch*, mit äufserem, unendlich fernem Projectionspunct.

Ist der Durchschnitt R der Geraden, worauf die gleichen und ähnlichen Figuren liegen, nicht *selbstentsprechend*, so giebt es auf ihrer Ebene einen ausgezeichneten Punct S, und eine ausgezeichnete Gerade s. Es sind nämlich SA und SA', SB und SB', .. von gleicher Länge, und bilden einstimmig gleiche concentrische Strahlenbüschel. Die Kreise durch R, und die einzelnen Paare entsprechender Puncte, gehen durch S; desgleichen die Geraden, welche AA', BB', .. rechtwinklig halbiren. Die Gerade s bildet mit AB und $A'B'$ entgegengesetzt-gleiche, mit RS rechte Winkel; auf ihr liegen die entsprechenden Puncte von kürzestem Abstande: die Mitten A'', B'', .. der Verbindunglinien AA', BB', ... Die geraden von S nach A'', B'', .. bilden einen Strahlenbüschel, der den vorhin erwähnten concentrischen Strahlenbüscheln *einstimmig* gleich ist. Die rechtwinkligen Projectionen der Verbindungslinien AA', BB', .. auf s sind einstimmig gleich; $A''B''$ ist der rechtwinkligen Projection von AB auf s *einstimmig*-gleich. Die Verbindungslinien AA', BB', :. nebst AB, $A'B'$, s, berühren eine Parabel, deren Brennpunct S, deren Axe RS, deren Scheiteltangente s ist.

II. Gleiche und ähnliche Planfiguren.

Wenn den Puncten einer Ebene A, B, C, D, E, .. die Puncte einer Ebene A', B', C', D', E', .. entsprechen, so dafs die Dreiecke, mit gemeinschaftlicher Grundlinie, $A'B'C'$, $A'B'D'$, $A'B'E'$, .. den entsprechenden Dreiecken gleich und ähnlich und dabei $A'B'D'$, $A'B'E'$, .. mit $A'B'C'$ einstimmig oder entgegengesetzt sind, je nachdem dies bei den entsprechenden Dreiecken der Fall ist: so sind $ABCDE$ .. und $A'B'C'D'E'$ .. *gleiche und ähnliche Planfiguren*, d. h.: dem Durchschnitt von zwei Geraden der einen Figur entspricht der Durchschnitt der entsprechenden Geraden, der Geraden durch zwei Puncte die Gerade durch die entsprechenden Puncte; dergestalt, dafs die entsprechenden Strecken, Winkel, Flächen, Linearfiguren, Strahlenbüschel einander gleich sind.

Solche Figuren sind ***einstimmig*** oder ***entgegengesetzt,*** je nachdem ein Paar entsprechende Dreiecke einstimmig oder entgegengesetzt sind; mithin nur dann, wenn ihre Ebenen zusammenfallen, oder parallel sind.

1. Einstimmig-gleiche und ähnliche Planfiguren.

Sind ein Paar entsprechende Strecken ***einstimmig*** ($ABB'A'$ ein Parallelogramm), so sind es auch die übrigen Paare; die Verbindungslinien AA', BB', .. sind ***einstimmig*** gleich und ***selbstentsprechend;*** die Figuren sind ***perspectivisch,*** mit äufserem, unendlich fernem ***Projectionspunct.***

Sind ein Paar entsprechende Strecken ***entgegengesetzt*** ($ABA'B'$ ein Parallelogramm), so sind es auch die übrigen Paare; die Verbindungslinien AA', BB', .. haben eine gemeinschaftliche, selbstentsprechende ***Mitte,*** die Figuren sind ***perspectivisch,*** mit innerem ***Projectionspunct,*** und ***involutorisch.***

Liegen die Figuren auf einer Ebene, und haben ein Paar entsprechende Strecken ***verschiedene*** Richtung, so giebt es auf ihrer Ebene einen selbstentsprechenden Punct S in endlicher Ferne. Durch S gehen:

Die Geraden, welche die Nebenwinkel entsprechender Strecken halbiren, d. h. die von AB und $B'A'$, BC und $C'B'$, .. gebildeten Winkel;

Die Geraden, welche die Verbindungslinien AA', BB', ... rechtwinklig halbiren;

Die Kreise, auf denen sich die entsprechenden Strahlenbüschel schneiden.

Die Mitten der Verbindungslinien, A'' von AA', B'' von BB', .. und die Mittelpuncte der eben erwähnten Kreise, bilden Figuren, welche den gegebenen ***einstimmig-ähnlich*** sind (S. unten).

2. Entgegengesetzt-gleiche und ähnliche Planfiguren.

In jedem Falle giebt es eine ***selbstentsprechende*** Gerade s, mit welcher die entsprechenden Geraden entgegengesetzt-gleiche Winkel bilden, und auf welcher einstimmig-gleiche und ähnliche Linearfiguren und die Mitten der Verbindungslinien AA', BB', ... liegen. Ist ein Punct von s in endlicher Ferne ***selbstentsprechend,*** so liegen die Figuren ***symmetrisch*** gegen die Axe s, und sind ***involutorisch.*** Die entsprechenden Strahlenbüschel schneiden sich auf gleichseitigen ***Hyperbeln,*** für welche s die gemeinschaftliche Asymptote ist.

Anmerkung. Eine Planfigur, welche durch eine Gerade in zwei einstimmig-gleiche und ähnliche Theile zerschnitten wird, hat einen ***Mittelpunct*** und unendlich viele ***Durchmesser,*** und heifst ***centrisch*** oder ein ***Parallelo-***

gramm im weitern Sinne. Solche Figuren lassen sich aus dem gemeinen *Parallelogramm* als Grundfigur dadurch ableiten, dafs man auf den entgegengesetzten Seiten einstimmig-gleiche und ähnliche Figuren aufsetzt, oder solche von den gegenüberliegenden Winkeln abschneidet.

Eine Planfigur, welche durch eine Gerade in zwei entgegengesetztgleiche und ähnliche Theile getheilt wird, heifst *symmetrisch* (im engern Sinne), die Gerade ihre *Axe.* Solche Figuren lassen sich aus dem *gleichschenkligen Dreieck* als Grundfigur ableiten.

Analog lassen sich aus den *regulären Figuren* theils solche ableiten, die einen Mittelpunct von höherer Ordnung haben, so dafs z. B. je n Radien, welche die Ebene in gleiche Winkel theilen, einander gleich sind und die Figur in einstimmig-gleiche und ähnliche Theile theilen; theils solche, welche mehrere Axen, und dadurch höhere *Symmetrie,* in Verbindung mit einer gewissen *Centricität* besitzen.

III. Gleiche und ähnliche sphärische Figuren.

Die vorigen Sätze werden auf die *Kugel* übergetragen, wenn man *Hauptkreise* statt gerader, sphärische statt planer Dreiecke, sphärische Kegelschnitte statt besonderer Kegelschnitte zweiten Grades setzt. Das Unterscheidende bilden die einer Figur zugehörige Gegenfigur und Polarfigur, und der Mangel unendlich ferner Puncte.

Zwei einstimmig-gleiche und ähnliche sphärische Figuren haben also einen selbstentsprechenden Punct S, dessen selbstentsprechende *Polare* einstimmig-gleiche und ähnliche Linearfiguren enthält.

Zwei entgegengesetzt-gleiche und ähnliche sphärische Figuren haben einen selbstentsprechenden *Hauptkreis* s, worauf einstimmig-gleiche und ähnliche Linearfiguren liegen, und dessen Pol *Gegenpunct* des ihm entsprechenden Punctes ist. Sie können nicht nur in eine symmetrische Lage gegen s gelangen, sondern die eine kann auch zur Gegenfigur der andern werden.

IV. Gleiche und ähnliche Raumfiguren.

Wenn den Puncten des Raumes $A, B, C, D, E, F, ..$ die Puncte des Raumes $A', B', C', D', E', F', ..$ entsprechen, so dafs die *Tetraëder* mit gemeinschaftlicher Basis, $A'B'C'D'$, $A'B'C'E'$, $A'B'C'F'$, .. den ent-

sprechenden Tetraëdern einzeln gleich und ähnlich und dabei $A'B'C'E'$, $A'B'C'F'$, ... mit $A'B'C'D'$ einstimmig oder entgegengesetzt sind, je nachdem dies bei den entsprechenden Tetraëdern der Fall ist, so sind $ABCDEF$ und $A'B'C'D'E'F'$ *gleiche und ähnliche Raumfiguren;* d. h.: dem Durchschnitt von Geraden und Ebenen der einen Figur entspricht der Durchschnitt der entsprechenden Geraden und Ebenen; den Geraden und Ebenen durch Puncte der einen Figur entsprechen die Geraden und Ebenen durch die entsprechenden Puncte; dergestalt, dafs die entsprechenden Strecken, Flächen, Winkel, Räume, Linearfiguren, Planfiguren, Strahlenbüschel, Ebenenbüschel einander gleich sind. Die entsprechenden Linearfiguren, Planfiguren, Raumfiguren, die zu solchen Figuren gehören, sind *einstimmig,* oder *entgegengesetzt,* je nachdem es ein Paar entsprechende Strecken, Dreiecke und Tetraëder sind.

1. Einstimmig-gleiche und ähnliche Raumfiguren.

Im Allgemeinen haben sie nur eine Schaar von parallelen Geraden, welche den entsprechenden Geraden parallel sind, so dafs die auf ihnen liegenden Linearfiguren den entsprechenden einstimmig-gleich und ähnlich sind (eine dieser Geraden s ist *selbstentsprechend*) und eine Schaar paralleler Ebenen (normal s), welche den entsprechenden Ebenen parallel sind, so dafs die auf ihnen liegenden Planfiguren einstimmig-gleich und ähnlich sind; keine derselben ist selbstentsprechend. Die Ebenen, welche die Winkel von entsprechenden Geraden (AB und $A'B'$) rechtwinklig halbiren, und diejenigen, welche die Nebenwinkel entsprechender Ebenen halbiren, sind der selbstentsprechenden Richtung s parallel. Durch die Drehung einer Raumfigur um die selbstentsprechende Gerade, und durch die Bewegung der Raumfigur in der selbstentsprechenden Richtung, entstehen besondere Lagen; nämlich:

a) *Perspectivische,* mit äufserem, unendlich fernem *Projectionspunct* auf s; jede Parallele zu s ist *selbstentsprechend,* jede Linearfigur mit der entsprechenden *einstimmig;*

b) *Involutorische* Lage, mit der Axe s, deren Puncte selbstentsprechend sind, gegen welche die entsprechenden Planfiguren auf den durch s gelegten selbstentsprechenden Ebenen *symmetrisch* liegen, während die entsprechenden Planfiguren auf den zu s normalen, selbstentsprechenden Ebenen *perspectivisch* sind, mit einem Projectionspunct;

c) Congruenz.

2. Entgegengesetzt-gleiche und ähnliche Raumfiguren.

Im Allgemeinen haben sie nur eine Schaar von parallelen Geraden, welche den entsprechenden Geraden *parallel* sind, und auf welchen Linearfiguren liegen, die den entsprechenden *entgegengesetzt*-gleich und ähnlich sind (eine unter diesen Geraden (n) ist selbstentsprechend, mit dem selbstentsprechenden Punct S), und eine Schaar von parallelen Ebenen (normal n), welche den entsprechenden Ebenen parallel sind, und auf welchen Planfiguren liegen, die den entsprechenden einstimmig-gleich und ähnlich sind. Eine unter diesen Ebenen ε (durch S) ist selbstentsprechend. Auf ε liegen die *Mitten* der Verbindungslinien AA', BB', ..; durch S gehen die Ebenen, welche AA', BB', .. rechtwinklig halbiren. Die Geraden, welche die Winkel der entsprechenden Geraden halbiren, sind *normal* zu n; die Ebenen, welche die Nebenwinkel der entsprechenden Ebenen halbiren, sind *parallel* zu n.

Sind die entsprechenden Planfiguren auf ε *perspectivisch*, mit äufserem, unendlich fernem Projectionspunct, so haben die Raumfiguren keinen Durchmesser n in endlicher Ferne; dagegen sind die Geraden einer Richtung auf ε *selbstentsprechend*, so wie alle Richtungen, parallel mit ε, *selbstentsprechend*.

Sind die entsprechenden Planfiguren auf ε *perspectivisch*, mit innerem Projectionspuncte S, so haben die Raumfiguren unendlich viele Durchmesser n durch S, und sind *perspectivisch*; mit innerem Projectionspunct.

Sind die entsprechenden Planfiguren auf ε *congruent*, so haben die Raumfiguren unendlich viele Durchmesser n, normal zu ε, und sind *symmetrisch* gegen ε.

In den beiden letzten Fällen sind die Raumfiguren zugleich *involutorisch*.

Bei gleichen und ähnlichen Linearfiguren im Raume sind die Verbindungslinien AA', BB', .. mit einer bestimmten Ebene *parallel;* ihre Mitten, A'' von AA', B'' von BB', .. liegen auf einer Geraden, die mit AB und $A'B'$ entgegengesetzt-gleiche Winkel bildet; die Ebenen, welche AA', BB', .. rechtwinklig halbiren, gehen durch einen Punct S'', so dafs $S''AB$ .. und $S''A'B'$ .. gleich und ähnlich sind. Die Verbindungslinien AA', BB', .. haben einerlei rechtwinklige Projectionen auf eine Gerade, die den von AB und $A'B'$ gebildeten Winkel halbirt; $A''B''$ ist den rechtwinkligen Projectionen von AB und $A'B'$ auf jene Gerade *einstimmig*-gleich. Die Ebene durch $A''B''$, normal zur gegebenen Winkel-Ebene, welcher AB und $A'B'$ parallel sind, schneidet AB und $A'B'$ in den entsprechenden Puncten von kleinster Entfernung.

V. Ähnliche Linearfiguren.

Wenn den Puncten einer Geraden A, B, C, D, .. die Puncte einer Geraden A', B', C', D', .. entsprechen, so dafs $A'B'$, $A'C'$, $A'D'$, .. mit dem gemeinschaftlichen Anfange A', zu den entsprechenden Strecken dasselbe Verhältnifs haben, und dabei $A'C'$, $A'D'$, .. mit $A'B'$ einstimmig oder entgegengesetzt sind, je nachdem dies bei den entsprechenden Strecken der Fall ist; so sind $ABCD$ .. und $A'B'C'D'$ .. *ähnliche Linearfiguren;* d. h. jede Strecke hat zu der entsprechenden dasselbe *Verhältnifs.* Ist eine Strecke der entsprechenden einstimmig oder entgegengesetzt, so ist es auch jede andre.

Zwei ähnliche Linearfiguren auf einer und derselben Geraden, haben einen *selbstentsprechenden* Punct, in endlicher Ferne. Zwei ähnliche Linearfiguren auf verschiedenen Geraden einer Ebene, mit einem selbstentsprechenden Puncte, sind *perspectivisch,* mit unendlich oder endlich fernem Projectionspunct, je nachdem der selbstentsprechende Punct endlich oder unendlich fern ist.

Ist R der nicht sich selbst entsprechende Durchschnitt von Geraden, worauf ähnliche Linearfiguren liegen; sind A'', B'', .. die innern Theilpuncte von AA', BB', .., A''', B''', .. die äufsern Theilpuncte derselben Verbindungslinien nach dem Verhältnifs entsprechender Strecken $(AB:A'B')$; sind A^{IV}, B^{IV}, die Mittelpuncte von Kreisen durch R, welche zugleich durch A und A', B und B', .. gehen; sind A^{V}, B^{V}, .. die Mittelpuncte von Kreisen, deren Durchmesser $A''A'''$, $B''B'''$, .. sind: so finden folgende Eigenschaften Statt.

Die Kreise A^{IV}, B^{IV}, .. schneiden sich in einem Puncte S;

Die Puncte A'', B'', .. liegen auf einer Geraden s, die mit AB und $A'B'$ entgegengesetzt-gleiche Winkel bildet;

Die Puncte A''', B''', .. liegen auf einer Geraden n, welche mit AB und $A'B'$ supplementare Winkel bildet; s und n schneiden sich rechtwinklig in N;

Die Kreise A^{V}, B^{V}, .. schneiden sich sämmtlich in S und N, und einzeln die Kreise A^{IV}, B^{IV}, .. rechtwinklig;

Die Dreiecke SAB, $SA'B'$, $SA''B''$, $SA'''B'''$, $SA^{\text{IV}}B^{\text{IV}}$, $SA^{\text{V}}B^{\text{V}}$ sind *einstimmig*-ähnlich; desgleichen die Dreiecke SAA', SBB', ..; die Dreiecke NAB und $NA'B'$ sind *entgegengesetzt*-ähnlich;

AB, $A'B'$, s, n sind ***vier harmonische*** Tangenten der ***Parabel,*** welche von AA', BB', .. berührt wird und deren Brennpunct S ist.

VI. Ähnliche Planfiguren.

Wenn den Puncten einer Ebene A, B, C, D, E, .. die Puncte einer Ebene A', B', C', D', E', .. so entsprechen, dafs die Dreiecke mit gemeinschaftlicher Grundlinie, $A'B'C'$, $A'B'D'$, $A'B'E'$, .. den entsprechenden Dreiecken ähnlich, und dabei $A'B'D'$, $A'B'E'$, .. mit $A'B'C'$ einstimmig oder entgegengesetzt sind, je nachdem dies bei den entsprechenden Dreiecken der Fall ist: so sind $ABCDE$.. und $A'B'C'D'E'$.. ähnliche Planfiguren; d. h.: jedem Puncte der einen Ebene entspricht ein Punct der andern Ebene; dem Durchschnitt von zwei Geraden der einen Figur der Durchschnitt der entsprechenden Geraden; der Geraden durch zwei Puncte die Gerade durch die entsprechenden Puncte; dergestalt, dafs die entsprechenden Winkel und Strahlenbüschel gleich sind, die entsprechenden Strecken dasselbe Verhältnifs haben, und die entsprechenden Flächen sich wie die Quadrate entsprechender Strecken verhalten. Je nachdem ein Paar entsprechende Dreiecke einstimmig oder entgegengesetzt sind, sind es auch die ähnlichen Planfiguren.

1. Einstimmig-ähnliche Planfiguren.

Je nachdem ein Paar entsprechende Strecken *einstimmig* oder *entgegengesetzt* sind, sind es auch die übrigen Paare, und die Figuren sind *perspectivisch*, mit selbstentsprechendem äufserem oder innerem Projectionspunct, in endlicher Ferne.

Liegen die Figuren auf einer Ebene, und haben ein Paar entsprechende Strecken verschiedene Richtung, so giebt es auf ihrer Ebene einen selbstentsprechenden Punct S. Durch denselben gehen:

Die Kreise, auf denen sich die entsprechenden Strahlenbüschel schneiden und deren Mittelpuncte A^{IV}, B^{IV}, .. sind;

Die Kreise, deren Mittelpuncte A^{V}, B^{V}, .. auf den Verbindungslinien AA', BB', .. liegen und welche die Verbindungslinien innen in A'', B'', .., aufsen in A''', B''', .. nach dem Verhältnifs entsprechender Strecken ($AB : A'B'$) theilen.

Die Figuren $SABC$.., $SA'B'C'$.., $SA''B''C''$.., $SA'''B'''C'''$.., $SA^{\text{IV}}B^{\text{IV}}C^{\text{IV}}$.., $SA^{\text{V}}B^{\text{V}}C^{\text{V}}$.. sind einstimmig-ähnlich; desgleichen die Dreiecke SAA', SBB', SCC', ..

2. Entgegengesetzt-ähnliche Planfiguren.

Sie haben, wenn ihre Ebenen *zusammenfallen*, einen *selbstentsprechenden* Punct N, und *zwei* in ihm rechtwinklig sich schneidende selbstentsprechende Gerade, deren eine (s) einstimmig-ähnliche, die andre (n) entgegengesetzt-ähnliche Linearfiguren vereinigt. Von beiden werden die Verbindungslinien AA', BB', .. harmonisch, nach dem Verhältnifs entsprechender Strecken geschnitten. Perspectivität kann nicht Statt finden.

VII. Ähnliche Raumfiguren.

Wenn den Puncten des Raumes A, B, C, D, E, F, .. die Puncte des Raumes A', B', C', D', E', F', .. entsprechen, so dafs die Tetraëder mit gemeinschaftlicher Basis $A'B'C'D'$, $A'B'C'E'$, $A'B'C'F'$, .. den entsprechenden Tetraëdern ähnlich und dabei $A'B'C'E'$, $A'B'C'F'$, .. mit $A'B'C'D'$ einstimmig oder entgegengesetzt sind, je nachdem dies bei den entsprechenden Tetraëdern der Fall ist: so sind $ABCDEF$.. und $A'B'C'D'E'F'$.. *ähnliche Raumfiguren*: d. h. den Durchschnitten von Geraden und Ebenen der einen Figur entsprechen die Durchschnitte der entsprechenden Geraden und Ebenen; den Geraden und Ebenen durch Puncte der einen Figur entsprechen die Geraden und Ebenen durch die entsprechenden Puncte der andern; dergestalt, dafs die entsprechenden Strahlen- und Ebenen-Büschel gleich sind, die entsprechenden Strecken dasselbe Verhältnifs haben, die entsprechenden Flächen wie die *Quadrate*, die entsprechenden Räume wie die *Cuben* entsprechender Strecken sich verhalten. Je zwei, durch entsprechende Puncte solcher Figuren bestimmte Linearfiguren, Planfiguren, Raumfiguren, sind ähnlich; uud zwar einstimmig, oder entgegengesetzt, je nachdem es ein Paar ihrer entsprechenden Strecken, Dreiecke und Tetraëder sind.

Bei *einstimmig*-ähnlichen Raumfiguren giebt es immer eine selbstentsprechende Gerade s, deren entsprechende Puncte einstimmig-ähnliche Linearfiguren mit einem *selbstentsprechenden* Puncte S bilden, und eine durch S normal auf s gehende selbstentsprechende Ebene ε, deren entsprechende Puncte *einstimmig*-ähnliche Planfiguren bilden. Die Verbindungslinien AA', BB', .. werden aufsen in A''', B''', .. von ε, innen in A'', B'', .. von den Geraden, welche die Winkel ASA', BSB', .. halbiren, nach dem Verhältnifs entsprechender Strecken getheilt. Die *Kugeln*, deren Durchmesser $A''A'''$, $B''B'''$, .. sind, gehen durch S. Sind die auf ε vereinten Planfiguren *perspectivisch*, mit äufserem Projectionspuncte S, so sind es die *ganzen* Raum-

figuren. Sind die auf s vereinten Planfiguren perspectivisch, mit innerem Projectionspuncte S, so sind die ganzen Raumfiguren *nicht* perspectivisch; die Theilpuncte A'', B'', .. fallen auf s.

Bei *entgegengesetzt*-ähnlichen Raumfiguren giebt es immer eine selbstentsprechende Gerade n, deren entsprechende Puncte *entgegengesetzt*-ähnliche Linearfiguren mit einem selbstentsprechenden Punct S bilden, und eine durch S normal auf n gehende selbstentsprechende Ebene s, deren entsprechende Puncte einstimmig-ähnliche Planfiguren bilden. Die Verbindungslinien AA', BB', .. werden innen in A'', B'', .. von s, aufsen in A''', B''', .. von den Geraden, welche die Nebenwinkel von ASA', BSB', .. halbiren, nach dem Verhältnifs entsprechender Strecken getheilt. Die *Kugeln*, deren Durchmesser $A''A'''$, $B''B'''$, .. sind, gehen durch S. Sind die auf s vereinten Planfiguren perspectivisch, mit innerem Projectionspunct S, so sind es die ganzen Raumfiguren. Sind die auf s vereinten Planfiguren *perspectivisch*, mit äufserem Projectionspunct S, so fallen die Theilpuncte A''', B''', .. auf n, aber die Raumfiguren selbst sind nicht perspectivisch.

Bei zwei ähnlichen *Linearfiguren im Raume* sind die Verbindungslinien der entsprechenden Puncte AA', BB', mit einer bestimmten Ebene parallel. Die innern und äufsern Theilpuncte der Verbindungslinien, nach dem Verhältnifs entsprechender Strecken, A'' und A''' von AA', B'', und B''' von BB', .. liegen auf zwei Geraden, welche mit den gegebenen Geraden AB, $A'B'$ einer bestimmten Ebene *parallel* sind und den Winkel und Nebenwinkel der gegebenen Geraden halbiren. Die Kugeln, deren Durchmesser $A''A'''$, $B''B'''$, .. sind, schneiden sich in einem *Kreise*, dessen Ebene normal ist zur Ebene des von AB und $A'B'$ gebildeten Winkels. Für jeden Punct S dieses Kreises sind SAB.. und $SA'B'$.. *ähnliche* Planfiguren.

Anmerkung. Zur Bezeichnung der erwähnten selbstentsprechenden Elemente dürften sich die besondern Namen: *Mittelpunct, Congruenzpunct, Ähnlichkeitspunct; Durchmesser, Axe, Congruenz-Axe, Ähnlichkeits-Axe, Ähnlichkeitsdurchmesser; Symmetral-Ebene, Congruenz-Ebene, Ähnlichkeits-Ebene,* mehr empfehlen als die von *Magnus* gebrauchten allgemeinen Namen: Situationspunct, Situations-Axe.

Dresden, im Juni 1852.

11.

Beiträge zur Mechanik des Pfluges.

(Von Herrn Dr. *E. Segnitz*, Prof. an der Akademie der Landwirthschaft zu Eldena.)

Erster Artikel.

Bei den mechanischen Principien, auf welche sich die Vorschriften über die zweckmäfsigste Bauart und Führung der Ackergeräthe, besonders des *Pfluges*, ohne Zweifel zurückführen lassen müssen, findet sich in den landwirthschaftlichen Schriften noch viele Unklarheit. Der bei weitem überwiegenden Mehrzahl ihrer Verfasser fehlte, wie deutlich zu bemerken, zureichende Bekanntschaft mit der Mathematik und Mechanik. Es giebt zwar einige hierher gehörige Untersuchungen, welche mit besseren Hülfsmitteln angestellt wurden; z. B.: „An essay on the construction of the plough, deduced from mathematical principles by *J. Bailey;* New-Castle 1795;" ferner eine Abhandlung „D'un nuovo orecchio, von *Lambruschini,* im Giornale agrario Toscano 1832," deren Mittheilung ich dem Herrn Geheimerath *Rau* in Heidelberg und einem meiner früheren Schüler verdanke, welcher letztere die Mühe nicht gescheut hat, mir die ganze Abhandlung abzuschreiben. Ferner „*W. Engerth,* Beitrag zur Theorie des Pfluges" in den ökonomischen Neuigkeiten und Verhandlungen; und einiges Andre, woran ich noch zu keiner unmittelbaren Einsicht habe gelangen können. Diese Untersuchungen betreffen aber nur einzelne Puncte und sind nicht weit genug fortgeführt, um sich an die practischen Erfahrungen anzuschliefsen. Ein erhebliches Hindernifs der Vergleichung der theoretischen Deductionen mit der Wirklichkeit verursacht überdies der für den vorliegenden Zweck unvollkommene Zustand der Hülfsmittel zur *Kraftmessung*. Die gewöhnlichen *Dynamometer,* welche das *Maximum* des Widerstandes anzeigen, sind hier, wo der Widerstand so sehr verschieden ist, fast unbrauchbar.

Indem ich, die oben angedeuteten Mängel bemerkend, an die Ausarbeitung einer vollständigeren Theorie des Pfluges ging, stiefs ich auf verschiedene Aufgaben, zu deren Lösung die gewöhnlichen Sätze der Mechanik nicht hinreichten. Um Mifsverständnisse zu vermeiden, bemerke ich jedoch, dafs ich vollkommen überzeugt bin, die Mechanik, insoweit sie sich auf Kräfte

bezieht, welche auf *mefsbare* Entfernungen wirken, sei eine zum Abschlufs gekommene Wissenschaft; dagegen dürften die *Molecularkräfte* noch ein weites Feld der Untersuchung darbieten. Die mir aufstofsenden Zweifel konnten sich daher nicht auf die Wirkung des hier als starren Körper zu betrachtenden Pfluges selbst, sondern nur auf die Rückwirkung der durchfurchten Erdmasse beziehen. Der zu pflügende Boden ist, je nach seiner chemischen Zusammensetzung, je nach der vorausgegangenen Behandlung, nach dem Feuchtigkeitsgrade u. s. w., nicht nur in seiner Fruchtbarkeit, sondern auch *mechanisch* sehr verschieden. Hat er einigen Thongehalt, ist er von den Wurzeln der abgeerndteten Früchte oder noch grünender Weidepflanzen durchzogen, und dabei nicht zu sehr ausgetrocknet, so bildet ein von dem Pfluge abgeschnittener prismatischer Erdstreifen einen *unelastischen* und *unvollkommen biegsamen* Körper, welcher sich auf einer schiefen Ebene hinaufschieben und umwenden läfst, ohne seinen Zusammenhang zu verlieren, oder auch nur seine Gestalt bedeutend zu verändern. Auf Körper solcher Art sind, so viel ich weifs, die Untersuchungen der theoretischen Mechanik bisher nicht ausgedehnt worden; das hier zunächst Folgende bezieht sich vorzugsweise auf diesen Zustand. Wenn dagegen der Acker schon ein oder ein paar Mal mit Pflug und Egge bearbeitet worden ist und die darin enthaltenen organischen Reste so weit zersetzt sind, dafs sie kein Hindernifs der Trennung mehr bilden, so hat man eine völlig lose Masse vor sich, und der Widerstand, welchen sie den Acker-Instrumenten entgegensetzt, scheint nach der Theorie des sogenannten *passiven Erddruckes* beurtheilt werden zu können. Ein thonreicher, durch starke Austrocknung erhärteter Boden endlich bricht beim Pflügen in grofse, scheinbar ganz unregelmäfsige Schollen und befindet sich in einem dritten Zustande, hinsichtlich dessen theoretischer Behandlung ich gestehe, noch zu keiner klaren Idee gelangt zu sein. Wegen jener Unregelmäfsigkeit bleibt auch der letzte Zustand vielleicht ganz dem Bereich des Calculs entzogen.

Mit Hinweglassung alles Desjenigen, was sich wesentlich auf die specielle Veranlassung meiner Untersuchungen bezieht, beabsichtige ich in dem Folgenden, *erstlich,* einige Resultate mitzutheilen, welche auch vom rein wissenschaftlichen Standpuncte nicht ganz ohne Interesse sein dürften, und *zweitens,* diejenigen Puncte, deren Erledigung meine eignen Kräfte übersteigt, dem mathematischen Publicum vorzulegen; mit dem Wunsche, das Interesse der Männer vom Fach für den Gegenstand in dem Maafse zu erregen, dafs sie die vollständige Auflösung der Aufgabe versuchen.

Vorstehende Einleitung schien mir nothwendig, um mich zu rechtfertigen, dafs ich in diesem, der exactesten Wissenschaft gewidmeten Journale die Aufmerksamkeit der Leser für einen scheinbar so trivialen Gegenstand in Anspruch nehme.

§. 1.

Der Keil ABC (Taf. II. Fig. 1), mit dem als ziemlich klein vorausgesetzten Kantenwinkel $ACB = \alpha$, stütze sich mit seiner untern Fläche BC gegen eine feste, horizontale Ebene. Ein auf derselben horizontalen Ebene ruhendes rechtwinkliges Parallelepipedum, biegsam genug, um sich wenigstens scheinbar an die gebrochene Linie ACD anzuschmiegen, soll dadurch gehoben werden, dafs man jenen Keil darunter schiebt. Man nenne q die auf der Seite AC gleichzeitig aufliegende Last, und die zur Fortbewegung des Keils erforderliche horizontale Kraft p, so wird, während der Angriffspunct der Kraft p in ihrer eigenen Richtung den (unendlich kleinen) Weg σ zurücklegt, die Last q auf die Höhe $\sigma.\sin\alpha$ gehoben. Also ist nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, und abgesehen von der ***Reibung:***

$$(1.)\quad p = q\sin\alpha.$$

In Voraussetzung einer vollkommen glatten Oberfläche des Keils, sind sämmtliche in Betracht kommende Widerstände als normal auf die Seite AC, mithin als parallel wirkend anzusehen; sie müssen daher auch eine Resultirende $MN = n$ haben, in Bezug auf welche

$$p = n\sin\alpha$$

ist. Vergleicht man letzteren Ausdruck mit dem (1.), so ergiebt sich

$$(2.)\quad q = n;$$

d. h. ***die Resultirende der normalen Widerstände kann durch das Gewicht der gleichzeitig aufliegenden Belastung ausgedrückt werden.*** Setzt man die auf die Längen-Einheit kommende Belastung gleich k, die Länge der schiefen Ebene $AC = l$ und ihre Höhe $AB = h$, so ergiebt sich, sobald die Belastung den höchsten Punct A erreicht hat, mit Berücksichtigung, dafs $q = k.l$, so wie $l\sin\alpha = h$ ist, der mit (2.) gleich geltende Ausdruck

$$(3.)\quad p = kh.$$

Dies aus dem Princip der virtuellen Geschwindigkeit abgeleitete Resultat erhält man nach folgender Betrachtungsweise auch durch die gewöhnliche Zerlegung der Kräfte. Das nur unvollkommen biegsame Parallelepipedum

wird nämlich in der Nähe der Kante C den Raum QCV (Fig. 2) unausgefüllt lassen, und hier eine Krümmung bekommen, welche der Einfachheit wegen für eine gebrochene Linie $AQVD$ angenommen werden mag. Dabei ist, wenn, wie vorausgesetzt, der zu hebende Körper nur lose auf seiner Unterlage aufliegt und nicht erst durch die Kante des Keils davon getrennt zu werden braucht, $QC = CV$, mithin der Winkel

$$QVC = CQV = \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Nun übt die Last q auf den Keil den normalen Druck $q.\cos\alpha$ aus; die zweite zu AC parallele Componente $q.\sin\alpha$ erleidet im Puncte Q eine weitere Zerlegung in die Seitenkräfte

$$RS = q\sin\alpha\sec\tfrac{1}{2}\alpha \quad \text{und} \quad RQ = q\sin\alpha\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\alpha,$$

oder, mit Berücksichtigung dafs $\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ ist,

$$RQ = q(1-\cos\alpha);$$

folglich ist die Summe der auf AC normalen Drucke:

$$n = q.\cos\alpha + q(1-\cos\alpha) = q;$$

wie oben.

Es läfst sich jetzt auch der Angriffspunct M (Fig. 1) der Resultirenden $MN = n$ angeben. Man findet denselben, wenn man aus C, mit dem Radius $CO = \tfrac{1}{2}BC$, den Kreisbogen CM beschreibt; denn es ist der Mittelpunct P von AC der Angriffspunct der Kraft $q\cos\alpha$, und C derjenige der Kraft $q(1-\cos\alpha)$; mithin mufs, wenn M der Angriffspunct ihrer Resultirenden sein soll,

$$PM.q.\cos\alpha = MC.q(1-\cos\alpha)$$

sein: eine Gleichung, welche in der That identisch wird, wenn man die Werthe $PM = \tfrac{1}{2}l - \tfrac{1}{2}l\cos\alpha$ und $MC = \tfrac{1}{2}l\cos\alpha$ einführt.

Um die ***Reibung*** in Rechnung zu bringen, setze man den Reibungscoëfficienten längs der schiefen Ebene AC gleich f' und den an der Sohle BC gleich f''. Auf AC findet, wie sich zeigt, der dem Gewicht der aufliegenden Last gleiche Normaldruck q Statt und erzeugt die Reibung $f'q$. ***Dieser Reibungswiderstand wirkt auf den Keil in der Richtung*** CA (Fig. 3), ***auf den zu hebenden Körper dagegen in der Richtung*** AC. Die die letztere Wirkung repräsentirende Kraft $f'q$ wird nun eben so wie die zu AC parallele Componente der aufliegenden Last, in der Nähe der Kante C eine Zerlegung in die Seitenkräfte $qf'\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\alpha$ und $qf'\sec\tfrac{1}{2}\alpha$ erfahren, von welchen

jedoch nur die erstere, normale, hier weiter in Betracht kommt. Daher giebt es zwei auf den Keil selbst wirkende Kräfte, nämlich die Reibung $CR = qf'$ und den normalen Druck $CS = qf' \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha$. Ihre Resultirende ist

$$CT = qf' \sec \tfrac{1}{2}\alpha$$

und die horizontalen Componenten der letztern sind

$$CU = qf' \sec \tfrac{1}{2}\alpha \cos \tfrac{1}{2}\alpha = qf'$$

Dagegen ist die dem Druck an der Sohle entgegenwirkende lothrechte Componente:

$$UT = qf' \sec \tfrac{1}{2}\alpha \sin \tfrac{1}{2}\alpha = qf' \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Der von der aufliegenden Last q herrührende Druck an der Sohle ist $q\cos\alpha$; es bleibt also, wenn man den Keil selbst als gewichtlos ansieht, ein Druck $q(\cos\alpha - f' \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha)$ übrig, welchem der Reibungswiderstand $qf''(\cos\alpha - f' \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha)$ an der Sohle entspricht. Thut man den vorhin gefundenen Widerstand qf' hinzu, so ergiebt sich:

$$q(f' + f'' \cos\alpha - f'f'' \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha).$$

Dieser Widerstand rührt von dem normalen Druck q her; die Reibung aber hat einen normalen Druck $CS = qf' \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha$ zur Folge, welchem (analog dem Vorhergehenden) ein horizontaler Reibungswiderstand

$$qf' \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha (f' + f'' \cos\alpha - f'f'' \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha)$$

entspricht. Hierbei entsteht aber ein neuer normaler Druck $qf'^2 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\alpha$, und daraus der Reibungswiderstand

$$qf'^2 \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} a (f' + f'' \cos\alpha + f'f'' \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha).$$

Durch Fortsetzung derselben Betrachtungen ergiebt sich die zu Überwindung der sämmtlichen Reibungswiderstände erforderliche horizontale Kraft r gleich dem Product aus q, dem Factor $f' + f'' \cos\alpha - f'f'' \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha$ und der Summe der unendlichen Reihe

$$1 + f' \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha + f'^2 \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\alpha + f'^3 \operatorname{tang}^3 \tfrac{1}{2}\alpha + \cdots = \frac{1}{1 - f' \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha},$$

oder:

$$(4.) \qquad r = q \cdot \frac{f' + f'' \cos\alpha - f'f'' \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha}{1 - f' \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha},$$

und für $f' = f'' = f$:

$$(5.) \qquad r_0 = q\left(f + \frac{f \cos\alpha}{1 - f \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha}\right).$$

Zu einem etwas abweichenden Resultat gelangt man mit Hülfe des Princips der *virtuellen Geschwindigkeiten*, indem man die Reibungswiderstände qf' und $qf''\cos\alpha$ als Kräfte ansieht, deren Angriffspuncte in ihren eigenen, oder vielmehr den entgegengesetzten Richtungen dieselben *Wege* zurücklegen, wie die zu ihrer Überwindung erforderliche horizontale Kraft, nämlich:

$$(6.)\qquad r' = q(f' + f''\cos\alpha),$$

und für $f' = f'' = f$:

$$(7.)\qquad r'_0 = qf(1 + \cos\alpha).$$

Ich halte die Ausdrücke (4. und 5.) für genauer als die (6. und 7.), weil bei den letztern keine Rücksicht genommen ist auf die Vermehrung des normalen Drucks auf die schiefe Ebene und auf die Verminderung des Drucks an der Sohle des Keils, welche durch die Reibung selbst entsteht. Indessen dürfte man sich wohl, da die Differenz für kleine Winkel nur sehr gering ist, und die erstere Betrachtungsweise in verwickelteren Fällen weitläufige Rechnungen geben würde, bei dem Folgenden darauf beschränken können, das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten in der angedeuteten Weise anzuwenden.

§. 2.

Es mögen jetzt die in dem vorhergehenden Paragraphen angestellten Betrachtungen und gefundene Resultate auf einen *gebrochenen Keil* (Fig. 4) ausgedehnt werden. Derselbe sei aus mehren schiefen Ebenen zusammengesetzt, deren Längen $l', l'', l''', \dots l^{x}$, und deren Neigungswinkel zum Horizont $\alpha, \beta, \gamma, \dots \omega$ sein sollen; wozu für die zunächt folgende Untersuchung noch die Bestimmung kommt, dafs jeder dieser Neigungswinkel gröfser sein soll, als der nach obiger Ordnung auf ihr folgende.

Bezeichnet man wieder die auf die Längen-Einheit kommende Belastung durch k, so ruhen auf jenen schiefen Ebenen die Lasten $kl', kl'', kl''', \dots kl^{x}$ und üben die normalen Drucke $kl'\cos\alpha$, $kl''\cos\beta$, $kl'''\cos\gamma$, $\dots$ $kl^{x}\cos\omega$ aus, zu deren Überwindung die horizontalen Kräfte $kl'\sin\alpha\cos\alpha$, $kl''\sin\beta\cos\beta$, $kl'''\sin\gamma\cos\gamma$, $\dots$ $kl^{x}\sin\omega\cos\omega$ nöthig sind. Ferner erfährt das sogenannte relative Gewicht $kl'\sin\alpha$ der auf l' ruhenden Last, d. h. die zu l' parallele Componente des Gewichts der letztern, an der von l' und l'' gebildeten Kante, eine Zerlegung in die Seitenkräfte (vergl. Fig. 5):

$$kl'\sin\alpha\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) \quad\text{und}\quad kl'\sin\alpha\sec\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

Erstere Seitenkraft erfordert die horizontale Kraft

$$kl' \sin\alpha \sin\alpha \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta);$$

die zweite erfährt die weitere Zerlegung in die Componente

$$kl' \sin\alpha \sec \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = kl' \sin\alpha,$$

welche das auf die folgende schiefe Ebene l'', und zwar, wie man sieht, *unverändert* fortgepflanzte relative Gewicht der auf l' ruhenden Last vorstellt; und dann in die Componente

$$kl' \sin\alpha \sec \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = kl' \sin\alpha \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

Der letztere normale Druck findet in der Nähe der Kanten zwischen l' und l'' auf die zweite schiefe Ebene mit dem Neigungswinkel β Statt; es entspricht ihm daher die horizontale Kraft

$$kl' \sin\alpha \sin\beta \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

Durch Fortsetzung analoger Schlüsse findet man, vor der Hand noch ohne Rücksicht auf die *Reibung*, für die gesammte, zur Fortbewegung eines solchen Keils erforderliche horizontale Kraft:

$$(1.) \quad P = k \cdot \left\{ \begin{aligned} & l' \sin\alpha \cos\alpha + l'' \sin\beta \cos\beta + l''' \sin\gamma \cos\gamma + \cdots + l^{x} \sin\omega \cos\omega \\ & \qquad + l' \sin\alpha (\sin\alpha + \sin\beta) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \\ & \qquad + (l' \sin\alpha + l'' \sin\beta)(\sin\beta + \sin\gamma) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) \\ & \qquad + (l' \sin\alpha + l'' \sin\beta + l''' \sin\gamma)(\sin\gamma + \sin\delta) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\gamma - \delta) \\ & + \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \qquad + (l' \sin\alpha + l'' \sin\beta + l''' \sin\gamma + \cdots + l^{x} \sin\omega) \sin\omega \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\omega. \end{aligned} \right.$$

Nun ist bekanntlich:

$$\begin{aligned} (\sin\alpha + \sin\beta) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) &= 2 \sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} \\ &= 2 \sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \cos\beta - \cos\alpha, \end{aligned}$$

und eben so findet sich:

$$\begin{aligned} (\sin\beta + \sin\gamma) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) &= \cos\gamma - \cos\beta, \\ (\sin\gamma + \sin\delta) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\gamma - \delta) &= \cos\delta - \cos\gamma, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sin\omega \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\omega &= 1 - \cos\omega. \end{aligned}$$

Man kann daher die Gleichung (1.) auch wie folgt schreiben:

$$(2.)\quad P = k\cdot\left\{\begin{array}{r} l'\sin\alpha\cos\alpha + l''\sin\beta\cos\beta + l'''\sin\gamma\cos\gamma + \cdots + l^{x}\sin\omega\cos\omega \\ + l'\sin\alpha(\cos\beta - \cos\alpha) \\ + (l'\sin\alpha + l''\sin\beta)(\cos\gamma - \cos\beta) \\ + (l'\sin\alpha + l''\sin\beta + l'''\sin\gamma)(\cos\delta - \cos\gamma) \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + (l'\sin\alpha + l''\sin\beta + l'''\sin\gamma + \cdots + l^{x}\sin\omega)(1 - \cos\omega). \end{array}\right.$$

Durch Reduction ergiebt sich hieraus, wie es das Princip der virtuellen Geschwindigkeit verlangt:

$$(3.)\quad P = k(l'\sin\alpha + l''\sin\beta + l'''\sin\gamma + \cdots + l^{x}\sin\omega),$$

oder, wenn man die Höhe des gebrochenen Keils:

$$l'\sin\alpha + l''\sin\beta + l'''\sin\gamma + \cdots + l^{x}\sin\omega = H$$

setzt:

$$(4.)\quad P = k.H;$$

wie bei dem einfachen Keil (S. 3. §. 1.).

Ferner ist die Summe der normalen Drucke auf die schiefen Ebenen $l', l'', l''', \dots l^{ix}, l^{x}$:

$$(5.)\quad N' = k\cdot\left\{\begin{array}{r} l'\cos\alpha + l''\cos\beta + l'''\cos\gamma + \cdots + l^{ix}\cos\psi + l^{x}\cos\omega \\ + 2l'\sin\alpha\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \\ + 2(l'\sin\alpha + l''\sin\beta)\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) \\ + 2(l'\sin\alpha + l''\sin\beta + l'''\sin\gamma)\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}(\gamma - \delta) \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + 2(l'\sin\alpha + l''\sin\beta + l'''\sin\gamma + \cdots + l^{ix}\sin\psi)\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}(\psi - \omega) \\ + (l'\sin\alpha + l''\sin\beta + l'''\sin\gamma + \cdots + l^{ix}\sin\psi + l^{x}\sin\omega)\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\omega. \end{array}\right.$$

Der Druck aber, welchen die Sohle des Keils auf ihre horizontale Unterlage ausübt, ist

$$(6.)\quad N'' = k\cdot\left\{\begin{array}{r} l'\cos^2\alpha + l''\cos^2\beta + l'''\cos^2\gamma + \cdots + l^{ix}\cos^2\psi + l^{x}\cos^2\omega \\ + l'\sin\alpha(\cos\alpha + \cos\beta)\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \\ + (l'\sin\alpha + l''\sin\beta)(\cos\beta + \cos\gamma)\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) \\ + (l'\sin\alpha + l''\sin\beta + l'''\sin\gamma)(\cos\gamma + \cos\delta)\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}(\gamma - \delta) \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + (l'\sin\alpha + l''\sin\beta + l'''\sin\gamma + \cdots + l^{ix}\sin\psi)(\cos\psi + \cos\omega)\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}(\psi - \omega) \\ + (l'\sin\alpha + l''\sin\beta + l'''\sin\gamma + \cdots + l^{ix}\sin\psi + l^{x}\sin\omega)\cos\omega\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\omega. \end{array}\right.$$

Nun ist:

$$(\cos\alpha+\cos\beta)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$

$$= 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = \sin\alpha-\sin\beta,$$

und eben so:

$$(\cos\beta+\cos\gamma)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) = \sin\beta-\sin\gamma$$

u. s. w., mithin läfst sich die Gleichung (6.) auch wie folgt schreiben:

$$N'' = k.\left\{\begin{array}{r} l'\cos^2\alpha+l''\cos^2\beta+l'''\cos^2\gamma+\cdots+l^{IX}\cos^2\psi+l^{X}\cos^2\omega \\ +l'\sin\alpha(\sin\alpha-\sin\beta) \\ +(l'\sin\alpha+l''\sin\beta)(\sin\beta-\sin\gamma) \\ +(l'\sin\alpha+l''\sin\beta+l'''\sin\gamma)(\sin\gamma-\sin\delta) \\ +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +(l'\sin\alpha+l''\sin\beta+l'''\sin\gamma+\cdots+l^{IX}\sin\psi)(\sin\psi-\sin\omega) \\ +(l'\sin\alpha+l''\sin\beta+l'''\sin\gamma+\cdots+l^{IX}\sin\psi+l^{X}\sin\omega)\cos\omega\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega, \end{array}\right.$$

oder, nach einigen Reductionen und mit Berücksichtigung, dafs

$$(1+\cos\omega)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega = \sin\omega \quad \text{ist:}$$

$$(7.)\qquad N'' = k\cdot\left\{\begin{array}{c} l'+l''+l'''+\cdots+l^{IX}+l^{X} \\ -(l'\sin\alpha+l''\sin\beta+l'''\sin\gamma+\cdots+l^{X}\sin\omega)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega \end{array}\right\}.$$

Ist hier der Reibungscoëfficient für die schiefen Ebenen l', l'', l''', ... gleich f', und der an der Sohle gleich f'', so ergiebt sich, mit Hülfe des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten, für die horizontale Kraft, welche nöthig ist, um die aus jenen Drucken entstehenden Reibungswiderstände zu überwinden:

$$(8.)\qquad R = f''N'+f''N''$$

und für $f'=f''=f$

$$(9.)\qquad R = fk\cdot\left\{\begin{array}{r} l'(1+\cos\alpha)+l''(1+\cos\beta)+l'''(1+\cos\gamma)+\cdots \\ \cdots+l^{IX}(1+\cos\psi)+l^{X}(1+\cos\omega) \\ +2l'\sin\alpha\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) \\ +2(l'\sin\alpha+l''\sin\beta)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) \\ +2(l'\sin\alpha+l''\sin\beta+l'''\sin\gamma)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\gamma-\delta) \\ +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +2(l'\sin\alpha+l''\sin\beta+l'''\sin\gamma+\cdots+l^{IX}\sin\psi)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\psi-\omega); \end{array}\right.$$

wobei jedoch stets vorauszusetzen, dafs sowohl die Differenzen $\alpha-\beta$, $\beta-\gamma$, $\gamma-\delta$, ... der Neigungswinkel, als auch der unterste Kantenwinkel ω nur

sehr klein sind, und dafs also die aus den Gestaltveränderungen des unvollkommen biegsamen Parallelepipedums hervorgehenden Widerstände vernachlässigt werden können.

§. 3.

Die Gleichung (1. §. 2.) kann auch noch wie folgt geordnet werden:

$$P = k[l'\sin\alpha\cos\alpha + l'\sin\alpha(\sin\alpha+\sin\beta)\tang\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) + l'\sin\alpha(1-\cos\omega)]$$
$$+k[l''\sin\beta\cos\beta + (l'\sin\alpha + l''\sin\beta)(\sin\beta+\sin\gamma)\tang\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) + l''\sin\beta(1-\cos\omega)]$$
$$+k[l'''\sin\gamma\cos\gamma$$
$$+(l'\sin\alpha+l''\sin\beta+l'''\sin\gamma)(\sin\gamma+\sin\delta)\tang\tfrac{1}{2}(\gamma-\delta)+l'''\sin\gamma(1-\cos\omega)]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

In dieser Gestalt befindet sich rechts eine Reihe, für deren allgemeines Glied der Ausdruck

$$p = k[l\sin\varphi\cos\varphi + \Sigma(l\sin\varphi).(\sin\varphi+\sin(\varphi-\Delta\varphi))\tang\tfrac{1}{2}\Delta\varphi$$
$$+ l\sin\varphi(1-\cos\omega)]$$

gelten kann. Setzt man jetzt sowohl die schiefen Ebenen l', l'', l''', ... als auch die Differenzen ihrer Neigungswinkel zum Horizont *unendlich klein*, so verwandelt sich die *gebrochene Linie* (Fig. 4), welche ein durch die Richtung der Kraft P geführter lothrechter Schnitt des Keils als obere Begrenzung bildete, in eine *stetig-gekrümmte Curve AC* (Fig. 6).

Es seien die Coordinaten eines veränderlichen Puncts M in derselben $ON = x$, $NM = y$, der Bogen $AM = s$ und die Ordinaten der Puncte A und C beziehlich y' und y''. Dann geht die Länge l der schiefen Ebene in das Bogen-Element ∂s über; ferner wird:

$$\sin\varphi = \frac{\partial y}{\partial s}; \quad \cos\varphi = -\frac{\partial x}{\partial s},$$

$$\sin\varphi + \sin(\varphi - \Delta\varphi) = 2\frac{\partial y}{\partial s},$$

$$\Sigma(l\sin\varphi) = y - y',$$

und die Tangente des halben Unterschiedes zweier aufeinanderfolgender Neigungswinkel verwandelt sich in den halben Contingenzwinkel; d. h. es wird, wenn man den Krümmungshalbmesser der Curve im Puncte M gleich ϱ setzt,

$$\tang\tfrac{1}{2}\Delta\varphi = \tfrac{1}{2}\frac{\partial s}{\varrho}.$$

Führt man diese Werthe in das obige allgemeine Glied der Reihe ein, so

erhält man das Differential der zur Fortbewegung des cylindrischen Keils nöthigen horizontalen Kraft P, und es ergiebt sich hieraus für diese selbst:

$$(1.)\qquad P = k\int_{y'}^{y''}\left(-\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{y-y'}{\varrho}+1-\cos\omega\right)\partial y.$$

Hierbei entspricht das Glied $-\frac{\partial x}{\partial s}$ dem normalen Druck der auf dem Bogen-Element aufliegenden Belastung, das Glied $1-\cos\omega$ dem bis zur untersten Kante fortgepflanzten relativen Gewicht derselben Belastung, und das Glied $\frac{y-y'}{\varrho}$ einem Widerstande, welcher von der Krümmung der Curve an der betreffenden Stelle nur von den darüber liegenden Belastungen abhängig ist.

Der früher gestellten Bedingung, dafs die Differenzen der Neigungswinkel zweier auf einander folgender schiefen Ebenen nur sehr klein sein sollen, wird bei einer stetig-gekrümmten Curve offenbar vollständig genügt. Indessen findet wahrscheinlich noch ein, der sogenannten *Steifheit der Seile* analoger Widerstand Statt, welcher eine besondere Untersuchung verlangt. Übrigens erreicht auch bei den Acker-Instrumenten der untere Kantenwinkel ω nicht selten eine *beträchtliche* Gröfse. Da jedoch dieser untern Kante zugleich das Geschäft obliegt, den zu hebenden Erdstreifen von seiner Unterlage *abzuschneiden*, so wollen wir die aus beiden Ursachen entstehenden Widerstände weiter unten *zusammenfassen*.

Um die Formel (1.) sogleich auf ein bestimmtes Beispiel anzuwenden, soll der Bogen AC einer *Ellipse* angehören, deren Mittelpunct O sei, deren grofse Axe $2a$ mit OH und deren kleine Axe $2b$ mit OY zusammenfallen möge. Unter diesen Voraussetzungen ergiebt sich aus der Mittelpunctsgleichung der Ellipse

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{(b^2-y^2)},$$

wenn man der Kürze wegen $a^2-b^2=c^2$ setzt,

$$-\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{ay}{\sqrt{(b^4+c^2y^2)}},\quad \cos\omega = \frac{ay''}{\sqrt{(b^4+c^2y''^2)}},\quad \varrho = \frac{(b^4+c^2y^2)^{\frac{3}{2}}}{ab^4},$$

mithin:

$$P = k\int_{y'}^{y''}\left(\frac{ay}{\sqrt{(b^4+c^2y^2)}}+\frac{ab^4(y-y')}{(b^4+c^2y^2)^{\frac{3}{2}}}+1-\frac{ay''}{\sqrt{(b^4+c^2y''^2)}}\right)\partial y.$$

Nun ist, abgesehen von den hinzuzufügenden Constanten:

$$\int\frac{ay\,\partial y}{\sqrt{(b^4+c^2y^2)}}=\frac{a\sqrt{(b^4+c^2y^2)}}{c^2}=\frac{ab^4+ac^2y^2}{c^2\sqrt{(b^4+c^2y^2)}},$$

$$\int\frac{ab^4y\,\partial y}{(b^4+c^2y^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{ab^4}{c^2\sqrt{(b^4+c^2y^2)}},$$

$$-\int\frac{ab^4y'\,\partial y}{(b^4+c^2y^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{ay'y}{\sqrt{(b^4+c^2y^2)}},$$

$$\int\Big(1-\frac{ay''}{\sqrt{(b^4+c^2y''^2)}}\Big)\partial y=y-\frac{ay''y}{\sqrt{(b^4+c^2y''^2)}},$$

folglich

$$\int\partial P=k\Big(\frac{ay(y-y')}{\sqrt{(b^4+c^2y^2)}}+y-\frac{ay''y}{\sqrt{(b^4+c^2y''^2)}}\Big)+\text{Const.}$$

und

$$\int_{y'}^{y''}\partial P=k\Big(y''-\frac{ay'y''}{\sqrt{(b^4+c^2y''^2)}}\Big)+\text{Const.}$$
$$-k\Big(y'-\frac{ay'y''}{\sqrt{(b^4+c^2y''^2)}}\Big)-\text{Const.},$$

oder, wenn man die Höhe AB (Fig. 6) wieder gleich H setzt,

$$P=k(y''-y')=kH.$$

Dieses Gesetz beschränkt sich natürlich nicht auf die Ellipse, sondern mufs sich, wenn man bei dem Übergange von der gebrochenen Linie zur Curve anders richtig verfahren ist, von jedem beliebigen cylindrischen Keile beweisen lassen, dessen Leitlinie nach oben concav ist. Da der Anfangspunct der Coordinaten offenbar willkürlich ist, so kann man, unbeschadet der Allgemeinheit, $y'=0$ annehmen. Ferner wollen wir statt $-\frac{\partial x}{\partial s}$ den Cosinus eines veränderlichen Winkels φ einführen; dies giebt dann:

$$\partial P=k\Big(\cos\varphi+\frac{y}{\varrho}+1-\cos\omega\Big)\partial y.$$

Nun ist:

$$\int\cos\varphi\,\partial y=y\cos\varphi+\int y\sin\varphi\,\partial\varphi,$$

$$\int\frac{y\partial y}{\varrho}=\int y\frac{\partial y}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\varrho},$$

d. h. wegen $\frac{\partial y}{\partial s}=\sin\varphi$ und $\frac{\partial s}{\varrho}=-\partial\varphi$,

$$\int\frac{y\partial y}{\varrho}=-\int y\sin\varphi\,\partial\varphi,$$

demnach also

$$\int\partial P=k(y\cos\varphi+y-y\cos\omega)+\text{Const.}$$

Dieses Integral ist hier zwischen den Grenzen $y = y' = 0$ und $y = y''$ zu nehmen, für welchen letzteren Werth der Winkel $\varphi = \omega$ wird. Es ergiebt sich daher, wie zuvor:

$$(2.)\qquad P = ky'' = kH.$$

Zu diesem Resultat würde auch das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten auf dem kürzesten Wege geführt haben; jedoch ohne anzugeben, welchen normalen Druck jedes einzelne Flächen-Element des Keils erleidet. Dieser Druck ist

$$k\left(-\partial x + \frac{y-y'}{\varrho}\partial s\right),$$

und auf die untere Kante:

$$k(y''-y')\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega;$$

mithin ist die Summe der normalen Drucke auf die gekrümmte Oberfläche des Keils:

$$(3.)\qquad N' = k\int\left(-\partial x + \frac{y-y'}{\varrho}\partial s + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega\,\partial y\right).$$

Der Druck an der Sohle dagegen ist

$$(4.)\qquad N'' = k\int(\partial s - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega\,\partial y),$$

mithin ist, wenn für beide Flächen derselbe Reibungscoëfficient f Statt findet, der horizontale Reibungswiderstand:

$$(5.)\qquad R_0 = fk\int\left[-\partial x + \left(1 + \frac{y-y'}{\varrho}\right)\partial s\right].$$

Derselbe wäre hiernach unabhängig von dem Kantenwinkel ω; was jedoch nur unter der weiter oben angedeuteten Beschränkung als näherungsweise richtig angesehen werden kann.

§. 4.

Der gebrochene Keil (Fig. 7) besteht aus zwei schiefen Ebenen, deren Längen l' und l'' sein mögen; die obere (l') sei unter dem Winkel α, die zweite (l'') unter dem Winkel β gegen den Horizont geneigt; und zwar sei diesmal $\alpha < \beta$. Wenn man nun die auf die Längen-Einheit kommende Belastung wieder mit k bezeichnet und von der Reibung vorläufig noch absieht, so ergiebt sich, nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, für die zur Fortbewegung eines solchen Keils erforderliche horizontale Kraft:

$$(1.)\qquad p = k(l'\sin\alpha + l''\sin\beta).$$

Ein zweiter Ausdruck für dieselbe Kraft läfst sich aus folgenden Be-

trachtungen herleiten. Auf die beiden schiefen Ebenen finden die normalen Drucke $kl'\cos\alpha$ und $kl''\cos\beta$ Statt, deren horizontale Componenten $kl'\sin\alpha\cos\alpha$ und $kl''\sin\beta\cos\beta$ sind. Von dem relativen Gewicht $kl'\sin\alpha$ der auf l' ruhenden Last wird diesmal nur ein Theil auf l'' übergeben; der Bruch, welcher diesen Theil ausdrückt, wird eine Function der Winkel α und β sein, die wir durch $\mathfrak{f}(\alpha,\beta)$ bezeichnen wollen. Zu diesem längs der schiefen Ebene l'' fortgepflanzten Druck kommt das relative Gewicht $kl''\sin\beta$ der auf l'' ruhenden Last hinzu; beide zusammen bringen auf die untere Kante den Druck

$$k[l'\sin\alpha.\mathfrak{f}(\alpha,\beta)+l''\sin\beta]\tang\tfrac{1}{2}\beta$$

hervor, dessen horizontale Componente

$$k[l'\sin\alpha.\mathfrak{f}(\alpha,\beta)+l''\sin\beta](1-\cos\beta)$$

ist. Es findet sich also:

$$(2.)\quad p=k(l'\sin\alpha\cos\alpha+l''\sin\beta\cos\beta+[l'\sin\alpha.\mathfrak{f}(\alpha,\beta)+l''\sin\beta](1-\cos\beta)).$$

Setzt man beide für p gefundene Werthe einander gleich, so ergiebt sich:

$$(3.)\quad \mathfrak{f}(\alpha,\beta)=\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\beta}.$$

Wendet man die analogen Schlüsse auf den vielfach gebrochenen Keil (Fig. 8) an, welcher aus den schiefen Ebenen l', l'', l''', ... l^{IX}, l^{X}, mit den Neigungswinkeln α, β, γ, ... ψ, ω, zusammengesetzt sein mag, und zwar hinsichtlich letzterer mit der Beschränkung, dafs

$$\alpha<\beta<\gamma<\cdots<\psi<\omega$$

sei, so ergiebt sich für die zur Fortbewegung eines solchen Keils erforderliche horizontale Kraft P folgender Ausdruck:

$$(4.)\quad \begin{aligned}\frac{P}{k}=\;&l'\sin\alpha\cos\alpha+l''\sin\beta\cos\beta+l'''\sin\gamma\cos\gamma+\cdots+l^{\mathrm{IX}}\sin\psi\cos\psi+l^{\mathrm{X}}\sin\omega\cos\omega\\ &+l'\sin\alpha\,\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\beta}\cdot\frac{1-\cos\beta}{1-\cos\gamma}\cdot\frac{1-\cos\gamma}{1-\cos\delta}\cdots\frac{1-\cos\psi}{1-\cos\omega}(1-\cos\omega)\\ &+l''\sin\beta\frac{1-\cos\beta}{1-\cos\gamma}\cdot\frac{1-\cos\gamma}{1-\cos\delta}\cdots\cdots\cdots\frac{1-\cos\psi}{1-\cos\omega}(1-\cos\omega)\\ &+l'''\sin\gamma\frac{1-\cos\gamma}{1-\cos\delta}\cdot\frac{1-\cos\delta}{1-\cos\varepsilon}\cdots\cdots\cdots\frac{1-\cos\psi}{1-\cos\omega}(1-\cos\omega)\\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\end{aligned}$$

oder, nach gehöriger Reduction:

$$(5.)\quad P=k(l'\sin\alpha+l''\sin\beta+\cdots+l^{\mathrm{X}}\sin\omega)=kH.$$

Die Summe der normalen Drucke auf die schiefen Ebenen $l', l'', l''', \ldots$ ist

$$(6.)\quad N' = k.\left\{\begin{array}{l} l'\cos\alpha + l''\cos\beta + l'''\cos\gamma + \cdots + l^{x}\cos\omega \\ + l'\sin\alpha\,\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\beta}\cdot\frac{1-\cos\beta}{1-\cos\gamma}\cdots\frac{1-\cos\psi}{1-\cos\omega}\cdot\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega \\ + l''\sin\beta\,\frac{1-\cos\beta}{1-\cos\gamma}\cdot\frac{1-\cos\gamma}{1-\cos\delta}\cdots\frac{1-\cos\psi}{1-\cos\omega}\cdot\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega \\ + l'''\sin\gamma\,\frac{1-\cos\gamma}{1-\cos\delta}\cdot\frac{1-\cos\delta}{1-\cos\varepsilon}\cdots\frac{1-\cos\psi}{1-\cos\omega}\cdot\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

oder, mit Berücksichtigung dafs $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega = (1-\cos\omega)\operatorname{cosec}\omega$ ist, auch:

$$\begin{array}{rl} (7.)\quad N' = & kl'\,[\cos\alpha + (1-\cos\alpha)\sin\alpha\operatorname{cosec}\omega] \\ & + kl''\,[\cos\beta + (1-\cos\beta)\sin\beta\operatorname{cosec}\omega] \\ & + kl'''[\cos\gamma + (1-\cos\gamma)\sin\gamma\operatorname{cosec}\omega] \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Gleichzeitig entsteht an der Sohle des Keils der Druck

$$\begin{array}{rl} (8.)\quad N'' = & kl'\,[\cos^2\alpha + (1-\cos\alpha)\sin\alpha\operatorname{cotg}\omega] \\ & + kl''\,[\cos^2\beta + (1-\cos\beta)\sin\beta\operatorname{cotg}\omega] \\ & + kl'''[\cos^2\gamma + (1-\cos\gamma)\sin\gamma\operatorname{cotg}\omega] \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

§. 5.

Nimmt man für den nach oben gekrümmten Keil *ABC*, um die Mittelpunctsgleichung der Curve *AMC* ohne Weiteres anwenden zu können, den Ursprung der Coordinaten wie in (Fig. 9) an, so ergiebt sich aus dem vorigen Paragraph zuvörderst für die zur Fortbewegung des Keils erforderliche horizontale Kraft:

$$P = k\int_{y'}^{y''}\left(-\frac{\partial x}{\partial s} - 1 + \frac{\partial x}{\partial s}\right)\partial y,$$

also auch für diesen Fall, dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten entsprechend,

$$(1.)\quad P = k(y'-y'') = k.H.$$

Ferner für die Summe der normalen Drucke auf die gekrümmte Oberfläche des Keils:

$$(2.)\quad N' = k\int\left[\partial x - \operatorname{cosec}\omega\left(1-\frac{\partial x}{\partial s}\right)\partial y\right],$$

und für den Druck an der Sohle:

$$(3.) \quad N'' = k\int\left[\frac{\partial x}{\partial s}\partial x - \operatorname{cotg}\omega\left(1-\frac{\partial x}{\partial s}\right)\partial y\right].$$

§. 6.

Bei dem gebrochenen Keil (Fig. 10) seien die Neigungswinkel l', l'', ... l^{IV}, l^{V},

$$\alpha < \beta < \cdots < \varkappa < \lambda,$$

und die der schiefen Ebenen l^{V}, l^{VI}, l^{VII}, ... l^{IX}, l^{X},

$$\lambda > \mu > \nu > \cdots > \psi > \omega,$$

so erleiden die schiefen Ebenen l', l'', ... l^{IV}, l^{V}, l^{VI}, ... l^{IX}, l^{X} die normalen Drucke $kl'\cos\alpha$, $kl''\cos\beta$, ... $kl^{IV}\cos\varkappa$, $kl^{V}\cos\lambda$, $kl^{VI}\cos\mu$, ... $kl^{IX}\cos\psi$, $kl^{X}\cos\omega$, und die Summe ihrer horizontalen Componenten ist:

$$(1.) \quad P' = k(l'\sin\alpha\cos\alpha + l''\sin\beta\cos\beta + \cdots + l^{IV}\sin\varkappa\cos\varkappa + l^{V}\sin\lambda\cos\lambda$$
$$+ l^{VI}\sin\mu\cos\mu + \cdots + l^{IX}\sin\psi\cos\psi + l^{X}\sin\omega\cos\omega).$$

Die Drucke auf die Kanten α, β, ... $\varkappa$ sind Null; dagegen erleidet die Kante λ den Druck

$$k.\left\{\begin{array}{l} l'\sin\alpha\dfrac{1-\cos\alpha}{1-\cos\beta}\cdot\dfrac{1-\cos\beta}{1-\cos\gamma}\cdots\dfrac{1-\cos\varkappa}{1-\cos\lambda} \\ + l''\sin\beta\dfrac{1-\cos\beta}{1-\cos\gamma}\cdot\dfrac{1-\cos\gamma}{1-\cos\delta}\cdots\dfrac{1-\cos\varkappa}{1-\cos\lambda} \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad + l^{IV}\sin\varkappa\dfrac{1-\cos\varkappa}{1-\cos\lambda} \\ \qquad\qquad + l^{V}\sin\lambda \end{array}\right\} 2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\lambda-\mu).$$

Diesem Drucke entspricht, wenn man der Kürze wegen

$$l'\sin\alpha\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\lambda} + l''\sin\beta\frac{1-\cos\beta}{1-\cos\lambda} + \cdots + l^{IV}\sin\varkappa\frac{1-\cos\varkappa}{1-\cos\lambda} = L$$

setzt, der horizontale Widerstand:

$$k(L + l^{V}\sin\lambda)(\sin\lambda + \sin\mu)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\lambda-\mu),$$

oder:

$$k(L + l^{V}\sin\lambda)(\cos\mu - \cos\lambda).$$

Eben so ist der Druck auf die Kante μ:

$$k(L + l^{V}\sin\lambda + l^{VI}\sin\mu)2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\mu-\nu),$$

und der daraus hervorgehende horizontale Widerstand:

$$k(L+l^{\text{V}}\sin\lambda+l^{\text{VI}}\sin\mu)(\cos\nu-\cos\mu)$$

u. s. f. Die horizontalen Widerstände endlich, welche den Drucken auf die Kanten ψ und ω entsprechen, sind hier beziehlich:

$$k(L+l^{\text{V}}\sin\lambda+l^{\text{VI}}\sin\mu+\cdots+l^{\text{IX}}\sin\psi)(\cos\omega-\cos\psi),$$
$$k(L+l^{\text{V}}\sin\lambda+l^{\text{VI}}\sin\mu+\cdots+l^{\text{IX}}\sin\psi+l^{\text{X}}\sin\omega)(1-\cos\omega).$$

Nun ist die Summe

$$\begin{aligned}
&(L+l^{\text{V}}\sin\lambda)(\cos\mu-\cos\lambda)\\
&+(L+l^{\text{V}}\sin\lambda+l^{\text{VI}}\sin\mu)(\cos\nu-\cos\mu)\\
&+\cdots\cdots\\
&+(L+l^{\text{V}}\sin\lambda+l^{\text{VI}}\sin\mu+\cdots+l^{\text{IX}}\sin\psi)(\cos\omega-\cos\psi)\\
&+(L+l^{\text{V}}\sin\lambda+l^{\text{VI}}\sin\mu+\cdots+l^{\text{IX}}\sin\psi+l^{\text{X}}\sin\omega)(1-\cos\omega)
\end{aligned}$$

offenbar:

$$(2.)\quad \frac{P''}{k}=(L+l^{\text{V}}\sin\lambda)(1-\cos\lambda)+l^{\text{VI}}\sin\mu(1-\cos\mu)+l^{\text{VII}}\sin\nu(1-\cos\nu)$$
$$+\cdots\cdots$$
$$+l^{\text{IX}}\sin\psi(1-\cos\psi)+l^{\text{X}}\sin\omega(1-\cos\omega).$$

Stellt man jetzt den Werth von L wieder her und fügt die oben gefundene Gröfse P' hinzu, so ergiebt sich für den gesammten horizontalen Widerstand (ohne die Reibung) $P=P'+P''$, d. h.

$$(3.)\quad P=k(l'\sin\alpha+l''\sin\beta+\cdots+l^{\text{X}}\sin\omega)=k.H.$$

Die Summe der Drucke auf den obern Theil AE des Keils, oder auf die schiefen Ebenen $l', l'', \ldots l^{\text{IV}}$, ist, wie gesagt,

$$(4.)\quad N'=k(l'\cos\alpha+l''\cos\beta+\cdots+l^{\text{IV}}\cos\varkappa),$$

und der daraus hervorgehende Druck an der Sohle:

$$(5.)\quad N''=k(l'\cos^2\alpha+l''\cos^2\beta+\cdots+l^{\text{IV}}\cos^2\varkappa).$$

Dagegen ist die Summe der Drucke auf den untern Theil AC des Keils, oder auf die schiefen Ebenen $l^{\text{V}}, l^{\text{VI}}, l^{\text{VII}}, \ldots l^{\text{IX}}, l^{\text{X}}$ (und deren Kanten):

$$(6.)\quad N_{,}=k\cdot\begin{cases}
l^{\text{V}}\cos\lambda+l^{\text{VI}}\cos\mu+l^{\text{VII}}\cos\nu+\cdots+l^{\text{IX}}\cos\psi+l^{\text{X}}\cos\omega\\
\qquad+(L+l^{\text{V}}\sin\lambda)2\tang\tfrac{1}{2}(\lambda-\mu)\\
\qquad+(L+l^{\text{V}}\sin\lambda+l^{\text{VI}}\sin\mu)2\tang\tfrac{1}{2}(\mu-\nu)\\
\quad+\cdots\cdots\\
+(L+l^{\text{V}}\sin\lambda+l^{\text{VI}}\sin\mu+\cdots+l^{\text{IX}}\sin\psi)2\tang\tfrac{1}{2}(\psi-\omega)\\
+(L+l^{\text{V}}\sin\lambda+l^{\text{VI}}\sin\mu+\cdots+l^{\text{IX}}\sin\psi+l^{\text{X}}\sin\omega)\tang\tfrac{1}{2}\omega,
\end{cases}$$

wo, wie oben:

$$L = l'\sin\alpha\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\lambda}+l''\sin\beta\frac{1-\cos\beta}{1-\cos\lambda}+\cdots+l^{\mathrm{v}}\sin\varkappa\frac{1-\cos\varkappa}{1-\cos\lambda}$$

ist. Der Druck an der Sohle endlich, welcher der Summe $N_{\prime}$ entspricht, ist:

$$(7.)\quad N_{\prime\prime} = k\begin{cases} l^{\mathrm{v}}+l^{\mathrm{vi}}+l^{\mathrm{vii}}+\cdots+l^{\mathrm{ix}}+l^{\mathrm{x}} \\ -(L+l^{\mathrm{v}}\sin\lambda+l^{\mathrm{vi}}\sin\mu+\cdots+l^{\mathrm{x}}\sin\omega)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega \\ +L\sin\lambda, \end{cases}$$

wo

$$L\sin\lambda = [l'\sin\alpha(1-\cos\alpha)+l''\sin\beta(1-\cos\beta)+\cdots+l^{\mathrm{v}}\sin\varkappa(1-\cos\varkappa)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\lambda$$

ist.

§. 7.

Wir wollen jetzt zur Betrachtung des cylindrischen Keils (Fig. 11) übergehen. Derselbe sei nach einer Curve AEC gekrümmt, welche von A bis E nach oben convex und von E bis C concav ist. (Es können AE und EC auch verschiedenen Curven angehören, wenn nur ihre, dem Puncte E angehörigen Krümmungshalbmesser in ihren gegenseitigen Verlängerungen liegen.)

Ferner seien $x_{\prime}y_{\prime}$, $x_{\prime\prime}y_{\prime\prime}$, $x_{\prime\prime\prime}y_{\prime\prime\prime}$ beziehlich die Coordinaten der Puncte A, E und C, und λ, ω die Neigungswinkel der Curve gegen den Horizont in den Puncten E und C. Unter diesen Voraussetzungen ist zuvörderst für den ganzen Verlauf der Curve, der auf ein Element ∂s derselben kommende normale Druck gleich $k\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\partial s$ und der daraus hervorgehende horizontale Widerstand $k\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\partial y$. Der mit der Curve parallele Druck im Puncte E, der durch kY bezeichnet werden mag, ist:

$$kY = k.\int_{y_{\prime}}^{y_{\prime\prime}}\frac{1-\frac{\partial x}{\partial s}}{1-\cos\lambda}\partial y.$$

Zu diesem Druck, welcher sich unverändert von E bis C fortpflanzt, kommt in einem beliebigen Puncte zwischen E und C, dessen Ordinate y sei, der ebenfalls mit der Curve parallele Druck $k(y-y_{\prime\prime})$; beide zusammen bringen den normalen Druck $k(Y+y-y_{\prime\prime})\frac{\partial s}{\varrho}$, und dieser den horizontalen Widerstand $k(Y+y-y_{\prime\prime})\frac{\partial y}{\varrho}$ hervor. Endlich erleidet die Kante C den normalen Druck $k(Y+y_{\prime\prime\prime}-y_{\prime\prime})\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega$, welchem der horizontale Widerstand

$k(Y+y_{,,,}-y_{,,})(1-\cos\omega)$ entspricht. Hieraus ergiebt sich für die gesammte, zur Fortbewegung des Keils erforderliche horizontale Kraft, ohne Rücksicht auf die Reibung:

$$(1.)\quad P=k\left\{\int_{y_,}^{y_{,,}}\frac{\partial x}{\partial s}\partial y+\int_{y_{,,}}^{y_{,,,}}\frac{Y+y-y_{,,}}{\varrho}.\partial y+(Y+y_{,,,}-y_{,,})(1-\cos\omega)\right\},$$

wo

$$(2.)\quad Y=\int_{y_,}^{y_{,,}}\frac{1-\frac{\partial x}{\partial s}}{1-\cos\lambda}\partial y\quad \text{ist.}$$

Dieser Ausdruck läfst sich in zwei Theile zerfällen, nämlich in:

$$(3.)\quad P'=k\left\{\int_{y_,}^{y_{,,}}\frac{\partial x}{\partial s}\partial y+\int_{y_{,,}}^{y_{,,,}}Y.\frac{\partial y}{\varrho}+(1-\cos\omega)\,Y\right\}$$

und

$$(4.)\quad P''=k\int_{y_{,,}}^{y_{,,,}}\left(\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{y-y_{,,}}{\varrho}+1-\cos\omega\right)\partial y,$$

von welchen letzterer den Widerstand bezeichnet, der allein Statt finden würde, wenn der Keil nur zwischen E und C belastet wäre, P' aber den Widerstand, welcher hinzukommt, indem sich die gleichmäfsige Belastung noch über E hinaus bis A erstreckt. Es seien z. B. AE und EC Kreisbogen und die Gleichungen der zugehörigen Kreise, welche sich im Puncte E von aufsen berühren,

$$(x-a_{,})^2+(y-b_{,})^2=r_{,}^2,$$
$$(x-a_{,,})^2+(y-b_{,,})^2=r_{,,}^2,$$

oder, indem man den Ursprung der Coordinaten so annimmt, dafs sowohl $a_{,}$ als $b_{,,}$ gleich Null werden:

$$x^2+(y-b_{,})^2=r_{,}^2,$$
$$(x-a_{,,})^2+y^2=r_{,,}^2.$$

Aus der ersten Gleichung folgt für den Bogen AE:

$$\frac{\partial x}{\partial s}=\frac{b_{,}-y}{r_{,}},$$

also:

$$\int_{y_,}^{y_{,,}}\frac{\partial x}{\partial s}\partial y=\frac{b_{,}(y_{,,}-y_{,})-\frac{1}{2}(y_{,,}^2-y_{,}^2)}{r_{,}}.$$

Ferner ist $\cos\lambda=\frac{y_{,,}}{r_{,,}}$, $\cos\omega=\frac{y_{,,,}}{r_{,,}}$,

$$\int_{y_{\prime\prime}}^{y_{\prime\prime\prime}} Y\frac{\partial y}{\varrho}+(1-\cos\omega)\,Y=\frac{y_{\prime\prime\prime}-y_{\prime\prime}}{r_{\prime\prime}}\,Y+\frac{r_{\prime\prime}-y_{\prime\prime\prime}}{r_{\prime\prime}}\,Y=\frac{r_{\prime\prime}-y_{\prime\prime}}{r_{\prime\prime}}\,Y,$$

oder, wenn man statt Y seinen Werth setzt:

$$\frac{r_{\prime\prime}-y_{\prime\prime}}{r_{\prime\prime}}\cdot\frac{1}{1-\cos\lambda}\int_{y_{\prime}}^{y_{\prime\prime}}\left(1-\frac{\partial x}{\partial s}\right)\partial y = y_{\prime\prime}-y_{\prime}-\frac{b_{\prime}(y_{\prime\prime}-y_{\prime})-\frac{1}{2}(y_{\prime\prime}^2-y_{\prime}^2)}{r_{\prime}},$$

folglich

$$P' = k(y_{\prime\prime}-y_{\prime}).$$

Für den Bogen EC ist $\frac{\partial x}{\partial s}=\frac{y}{r_{\prime\prime}}$,

$$\int_{y_{\prime\prime}}^{y_{\prime\prime\prime}}\frac{\partial x}{\partial s}\partial y = \frac{1}{2}\frac{y_{\prime\prime\prime}^2-y_{\prime\prime}^2}{r_{\prime\prime}},$$

$$\int_{y_{\prime\prime}}^{y_{\prime\prime\prime}}\frac{y-y_{\prime\prime}}{\varrho}\partial y = \frac{1}{2}\frac{y_{\prime\prime\prime}^2-y_{\prime\prime}^2}{r}-\frac{y_{\prime\prime}(y_{\prime\prime\prime}-y_{\prime\prime})}{r_{\prime\prime}},$$

$$\int_{y_{\prime\prime}}^{y_{\prime\prime\prime}}(1-\cos\omega)\,\partial y = y_{\prime\prime\prime}-y_{\prime\prime}-\frac{y_{\prime\prime\prime}(y_{\prime\prime\prime}-y_{\prime\prime})}{r_{\prime\prime}},$$

mithin:

$$P'' = k\left(y_{\prime\prime\prime}-y_{\prime\prime}+\frac{y_{\prime\prime\prime}^2-y_{\prime\prime}^2}{r_{\prime\prime}}-\frac{(y_{\prime\prime\prime}+y_{\prime\prime})(y_{\prime\prime\prime}-y_{\prime\prime})}{r_{\prime\prime}}\right)$$
$$= k(y_{\prime\prime\prime}-y_{\prime\prime}),$$

und

$$P = P'+P'' = k(y_{\prime\prime\prime}-y_{\prime}).$$

Der allgemeine Beweis, dafs für jede beliebige (nach oben concave) Curve $P''=k(y_{\prime\prime\prime}-y_{\prime\prime})$ sei, ist bereits in (§. 3.) enthalten. Es bleibt daher nur noch die allgemeine Gültigkeit der Gleichung $P'=k(y_{\prime\prime}-y_{\prime})$ nachzuweisen. Zu dem Ende wollen wir wieder den veränderlichen Neigungswinkel der Curve zwischen E und C durch φ bezeichnen. Da nun Y eine constante Gröfse ist, so ist:

$$\int_{y_{\prime\prime}}^{y_{\prime\prime\prime}} Y\frac{\partial y}{\varrho} = -Y\int\sin\varphi\,\partial\varphi = Y(\cos\omega-\cos\lambda);$$

das Glied $Y(1-\cos\omega)$ hinzugethan, giebt

$$Y(1-\cos\lambda) = \int_{y_{\prime}}^{y_{\prime\prime}}\left(1-\frac{\partial x}{\partial s}\right)\partial y,$$

folglich:

$$P' = k\left\{\int_{y_{\prime}}^{y_{\prime\prime}}\frac{\partial x}{\partial s}\partial y+\int_{y_{\prime}}^{y_{\prime\prime}}\left(1-\frac{\partial x}{\partial s}\right)\partial y\right\} = k(y_{\prime\prime}-y_{\prime}),$$

also ist auch bei dem zuletzt betrachteten Keile allgemein:

$$(5.) \qquad P = k(y_{\prime\prime\prime} - y_{\prime}) = k.H.$$

Die Summe der normalen Drucke auf dem nach oben convexen Theil des Keils ist:

$$(6.) \qquad N' = k\int \partial x = k(x_{\prime\prime} - x_{\prime}),$$

und der daraus hervorgehende Druck an der Sohle:

$$(7.) \qquad N'' = k\int \frac{\partial x}{\partial s}\partial x = k\int\left(1 - \frac{\partial y^2}{\partial s^2}\right)\partial s;$$

wo das Integral zwischen den durch die Puncte A und E bestimmten Grenzen zu nehmen ist. Die Summe der normalen Drucke auf den untern, concaven Theil des Keils dagegen ist:

$$(8.) \qquad N_{\prime} = k\left\{\int \partial x + \int \frac{Y + y - y_{\prime\prime}}{\varrho}\partial s + (Y + y_{\prime\prime\prime} - y_{\prime\prime})\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\omega\right\},$$

und der entsprechende Druck an der Sohle:

$$(9.) \qquad N_{\prime\prime} = k\{\int \partial s - (Y + y_{\prime\prime\prime} - y_{\prime\prime})\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\omega + Y\sin\lambda\};$$

wobei die Grenzen durch die Coordinaten E und C bestimmt sind. Statt des letzten Ausdrucks läfst sich auch folgender, nur der Form nach davon verschiedene setzen, nämlich:

$$(10.) \qquad N_{\prime\prime} = k\left\{\int \frac{\partial x}{\partial s}\partial x + \int \frac{Y + y - y_{\prime\prime}}{\varrho}\partial x + (Y + y_{\prime\prime\prime} - y_{\prime\prime})\cos\omega\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\omega\right\}.$$

Hat dabei für die gekrümmte Oberfläche des Keils und für seine ebene Sohle derselbe Reibungscoëfficient f Statt, so ergiebt sich für die zur Überwindung der Reibung erforderliche horizontale Kraft, welche zu P noch hinzukommen mufs:

$$(11.) \quad R = fk\left\{\int_{x_{\prime}y_{\prime}}^{x_{\prime\prime\prime}y_{\prime\prime\prime}}(\partial x + \partial s) - \int_{x_{\prime}y_{\prime}}^{x_{\prime\prime}y_{\prime\prime}}\frac{\partial y^2}{\partial s^2}\partial s + \int_{x_{\prime\prime}y_{\prime\prime}}^{x_{\prime\prime\prime}y_{\prime\prime\prime}}\frac{Y + y - y_{\prime\prime}}{\varrho}.\partial s + Y\sin\lambda\right\},$$

oder auch:

$$(12.) \quad R = fk\left\{\int_{x_{\prime}}^{x_{\prime\prime\prime}}\left(1 + \frac{\partial x}{\partial s}\right)\partial x + \int_{x_{\prime\prime}y_{\prime\prime}}^{x_{\prime\prime\prime}y_{\prime\prime\prime}}(Y + y - y_{\prime\prime})\frac{\partial x + \partial s}{\varrho} + (Y + y_{\prime\prime\prime} - y_{\prime\prime})\sin\omega\right\}.$$

Ich glaube wiederholt erinnern zu müssen, dafs vorstehende Untersuchungen ***nur einen Theil*** der in der Wirklichkeit Statt findenden Widerstände berücksichtigen, und auch da nur eine erste Annäherung gewähren. Es ist noch keine Rücksicht auf die Kraft genommen, welche durch die mit

der Hebung verbundene Gestaltveränderung des Erdprisma's absorbirt wird. Hier scheint der Weg des Experiments eingeschlagen werden zu müssen, um zu entscheiden, ob dieser Umstand von erheblichem Einflufs auf die Gröfse des Gesammtwiderstandes ist, und um in solchem Falle den Betrag davon festzustellen. Indessen ist a priori anzunehmen, dafs bei einem, nach einer stetigen Curve gekrümmten Keile die fragliche Kraft abhängig sein werde von dem Maafse des Erdprisma's und den Veränderungen des Krümmungshalbmessers. Ferner kommt zu den gefundenen Widerständen noch *der an der schneidenden Kante,* mit welchem wir uns im *nächsten Artikel* beschäftigen wollen. Aber auch den Kraft-Aufwand, welcher lediglich aus dem Gewicht der zu hebenden Last hervorgeht, stellen die obigen Formeln noch nicht vollkommen dar. Stellt man sich nämlich das auf der horizontalen Ebene vor dem Keil liegende, durch letzteren zu hebende senkrechte Parallelepipedum durch Ebenen senkrecht auf die Richtung, in welcher sich der Keil bewegt, in einzelne Elemente zerlegt vor, so werden diese Elemente bei der Bewegung über jede ausspringende Kante des gebrochenen Keils eine Erhöhung, und bei der Bewegung über jede einspringende Kante eine Erniedrigung ihres Schwerpuncts erfahren, welche noch nicht in Rechnung gebracht wurde. Eben so werden sich bei einem stetig gekrümmten cylindrischen Keile die Schwerpuncte seiner Elemente nicht in der Curve selbst, nach welcher der Keil gekrümmt ist, sondern in einer andern, zu ersterer parallelen Curve bewegen. Für die Anwendung des Vorstehenden auf die Theorie des Pfluges scheint es, so weit ich den Gegenstand bis jetzt übersehe, nicht nöthig, diese Ursache einer Abweichung von den gefundenen Formeln weiter zu verfolgen. Doch mufs man aus Vorsicht nicht vergessen, dafs die obigen Formeln, wie gesagt, nur *Annäherungen* sind; man mufs in jedem einzelnen Falle der Anwendung noch fragen, ob jene Abweichungen nicht eine merkliche, nicht mehr zu vernachlässigende Gröfse erreichen. Durch Unterlassung dieser Vorsicht gelangt (was ich bei dieser Gelegenheit beiläufig zu bemerken nicht unterlassen darf) z. B. *Euler* in seiner „Théorie complète de la construction et de la manoeuvre des vaisseaux (Paris 1776, page 115)" zu einem Resultat, welches ihm selbst ziemlich paradox scheint. Es ergiebt sich nämlich aus seinen Formeln als nothwendige Folge, *dafs ein Schiff nicht, wie man glauben sollte, bei directem, d. h. mit dem Kiel parallelen Lauf, sondern bei einer gewissen Abtrifft φ den geringsten Widerstand finde.* Ist P der Widerstand bei dem directen Lauf, und Q der bei einer darauf senkrechten (horizontalen)

Bewegung, so wird nach *Euler* die vortheilhafteste Abtrifft durch

$$\tang \varphi = \frac{P}{Q}$$

ausgedrückt. Dieses Resultat ist nicht nur paradox, sondern sogar *unrichtig*, wenn man es auf die in der Wirklichkeit übliche Gestalt der Schiffe anwendet. Verfolgt man den Gang der *Euler*'schen Untersuchung rückwärts, so findet sich bald das zum Grunde liegende Mifsverständnifs. *Euler* geht nämlich Anfangs von der Voraussetzung aus, dafs ein horizontaler Schnitt des Schiffs ein *Rechteck* bilde, dessen längere Seiten mit dem Kiel parallel sind. Im weiteren Verlauf glaubt er den Fehler dadurch wieder auszugleichen, dafs er die unter seiner Voraussetzung gefundenen Widerstände bei der Bewegung in den oben erwähnten Richtungen mit constanten Factoren multiplicirt, welche kleiner als 1 sind, und so zu den Werthen P und Q gelangt. Offenbar aber können die auf diese Weise corrigirten Formeln für andere Richtungen noch keinesweges den Widerstand eines Körpers von der gewöhnlichen Gestalt des Schiffes darstellen, sondern immer nur noch den eines schwimmenden senkrechten *Parallelepipeduns*, nur von geringerer Gröfse als der des ursprünglich vorausgesetzten. Läfst man z. B. den horizontalen Schnitt in ein *Quadrat* übergehen, so wird $P = Q$ und $\varphi = 45^{0}$; was unter den angenommenen, mit der Wirklichkeit freilich wenig übereinstimmenden Voraussetzungen, keineswegs paradox, sondern selbst ohne Rechnung sehr natürlich scheint. Ein solches Parallelepipedum mufs in der Richtung der Diagonale offenbar einen kleineren Widerstand finden, als bei einer zu seinen horizontalen Kanten parallelen Bewegung im Wasser. Auch in jedem andern Falle stimmt, wie leicht zu sehen, die angeblich vortheilhafteste Richtung mit der Diagonale des Rechtecks überein, auf welches der horizontale Schnitt des Schiffs durch Multiplication seiner beiden Dimensionen mit seinen Factoren reducirt wird. Dieser Theil der Untersuchungen in dem angeführten Werke *Eulers* mufs demnach als verfehlt angesehen werden.

Ich bitte um Entschuldigung wegen vorstehender Abschweifung. Sie dürfte dem vorliegenden Gegenstande vielleicht nicht ganz so fremd sein, als es beim ersten Anblick scheint. Das Schiff, welches die Wasserfläche durchfurcht, und der Pflug, welcher seine Furchen in der Erde zieht, sind ja schon oft miteinander verglichen worden.

Eldena, im August 1851.

12.

Berechnung der krummen Oberfläche und des körperlichen Inhalts eines Kugel-Ausschnitts zwischen zwei beliebigen, die Kugel und einander schneidenden Ebenen.

(Vom Herausgeber.)

Der Herausgeber dieses Journals ist auf die in der Überschrift bezeichnete Berechnung vor mehreren Jahren durch einen wirklichen Fall in der ausübenden *Technik* geführt worden. Da der Gegenstand auch mathematisch interessant ist, schon deshalb, weil er ein Beispiel giebt, dafs von einer ungemein einfachen Aufgabe die Auflösung und die End-Ergebnisse recht verwickelt sein können, theilt er die Berechnung hier mit.

I. Die Fläche des Ausschnitts.

1.

Auf dem Durchschnitt H (Taf. III.) der beiden, nicht durch den Mittelpunct der Kugel gehenden Ebenen DH und FH, also auch auf den Ebenen selbst, sei die Ebene des Papiers senkrecht. Dann ist von der *Kugelfläche* der Theil DF, unter und über dem Papiere, der zwischen den Ebenen DH und FH liegt, die gesuchte Fläche, welche durch F bezeichnet werden mag.

2.

Mit DH sei, durch den Mittelpunct C der Kugel gehend, EC parallel, und AC auf EC senkrecht. MP und FG seien ebenfalls mit DHB und EC parallel; dann sei

$$(1.)\quad \begin{cases} AB=a, & BH=KC=c, \quad AC=r, \quad HK=BC=h, \quad KE=e, \\ AP=x, & PM=y, \quad PZ=z, \quad \text{der Bogen } AM=s. \end{cases}$$

3.

Der von der Ebene HF begrenzte, in der Ebene MZP liegende, durch M gehende Bogen des nicht-gröfsten Kreises MP, multiplicirt mit ∂s, giebt das Differential ∂F der gesuchten Fläche F.

Der genannte Bogen hat $PM = y$ zum Halbmesser und $\frac{PZ}{PM} = \frac{z}{y}$ zum Cosinus. Also ist

$$(2.)\quad \partial F = 2y \arccos\frac{z}{y}\cdot\partial s.$$

4.

Es sei

$$(3.)\quad \frac{z}{y} = v \text{ und } \arccos v = w,$$

so dafs

$$(4.)\quad \partial F = 2yw\,\partial s$$

ist. Da $\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{r}{y}$, so ist $y\,\partial s = r\,\partial x$, also in (4.):

$$(5.)\quad \partial F = 2rw\,\partial x.$$

5.

Man setze

$$(6.)\quad F = -2r(2r-x)w + 2rX + \text{Const.},$$

so giebt dies:

$$\partial F = 2rw\,\partial x - 2r(2r-x)\,\partial w + 2r\,\partial X = \partial F - 2r(2r-x)\,\partial w + 2r\,\partial X \text{ (5.)},$$

also ist

$$(7.)\quad \partial X = (2r-x)\,\partial w,$$

oder, da

$$(8.)\quad y^2 = 2rx - x^2 \text{ ist,}$$

$$(9.)\quad \partial X = \frac{y^2}{x}\,\partial v.$$

6.

Nun ist ∂w, das heifst $\frac{\partial}{x}w = \frac{\partial}{v}w\cdot\frac{\partial}{x}v$, und $\frac{\partial}{v}w\cdot\frac{\partial}{w}v = 1$. Dies giebt $\frac{\partial}{v}w = \frac{1}{\frac{\partial}{w}v} = -\frac{1}{\sin w}$ (3.) $= -\frac{1}{\sqrt{(1-v^2)}}$, folglich $\frac{\partial}{x}w = -\frac{\frac{\partial}{x}v}{\sqrt{(1-v^2)}}$, mithin in (9.):

$$(10.)\quad \partial X = -\frac{y^2}{x}\cdot\frac{\partial v}{\sqrt{(1-v^2)}} = -\frac{y^2}{x}\cdot\frac{\partial\left(\frac{z}{y}\right)}{\sqrt{\left(1-\frac{z^2}{y^2}\right)}}\text{ (3.)} = -\frac{y^2}{x}\cdot\frac{y\,\partial z - z\,\partial y}{y^2\sqrt{\left(1-\frac{z^2}{y^2}\right)}}$$

$$= \frac{zy\,\partial y - y^2\,\partial z}{x\sqrt{(y^2-z^2)}},$$

oder, da $y\partial y = (r-x)\partial x$ ist (8.):

$$(11.)\qquad \partial X = \frac{z(r-x)\partial x-(2rx-x^2)\partial z}{x\sqrt{(y^2-z^2)}}.$$

7.

Es ist $\frac{ZI}{HI} = \frac{EK}{HK}$, das heifst $\frac{Z-c}{x-a} = \frac{e}{h}$. Dies giebt

$$(12.)\qquad Z = \frac{e}{h}(x-a)+c \text{ und}$$

$$(13.)\qquad \partial z = \frac{e}{h}\cdot\partial x.$$

Dies in (11.) gesetzt, giebt

$$\partial X = \frac{[e(x-a)+hc](r-x)-(2rx-x^2)e}{hx\sqrt{(y^2-z^2)}}\cdot\partial x, \quad \text{oder}$$

$$\partial X = \frac{r(hc-ea)+x(e(a-r)-ch)}{hx\sqrt{(y^2-z^2)}}\cdot\partial x,$$

oder, da $r-a=h$ ist:

$$(14.)\qquad \partial X = \frac{r(hc-ea)}{h}\cdot\frac{\partial x}{x\sqrt{(y^2-z^2)}}-(e+c)\frac{\partial x}{\sqrt{(y^2-z^2)}}.$$

8.

Es ist

$$y^2-z^2 = 2rx-x^2-\left(\frac{e(x-a)+hc}{h}\right)^2 \quad (8. \text{ und } 12.),$$

$$y^2-z^2 = \frac{h^2+e^2}{h^2}\cdot\Big[-\frac{(hc-ea)^2}{h^2+e^2}$$

$$+2x\cdot\frac{h^2r+e^2a-ehc}{h^2+e^2}-x^2\Big] \quad \text{oder, da } a=r-h \text{ ist,}$$

$$(15.)\qquad y^2-z^2 = \frac{h^2+e^2}{h^2}\Big[-\frac{(hc-ea)^2}{h^2+e^2}+2x\cdot\frac{(h^2+e^2)r-eh(e+c)}{h^2+e^2}-x^2\Big],$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$(16.)\qquad \frac{(hc-ea)^2}{h^2+e^2}=p^2, \quad \frac{(h^2+e^2)r-eh(e+c)}{h^2+e^2}=q \quad \text{und}$$

$$-p^2+2qx-x^2=Z \quad \text{setzt:}$$

$$(17.)\qquad y^2-z^2 = \frac{h^2+e^2}{h^2}\cdot Z.$$

Dies giebt in (14.):

$$(18.)\qquad \partial X = \frac{\sqrt{(hc-ea)}}{\sqrt{(h^2+e^2)}}\cdot\frac{\partial x}{xZ^{\frac{1}{2}}}-\frac{(e+c)h}{\sqrt{(h^2+e^2)}}\cdot\frac{\partial x}{Z^{\frac{1}{2}}}.$$

9.

Es ist, wenn man

$$(19.)\quad \frac{m+nx}{Z^{\frac{1}{2}}} = u$$

setzt, wo m und n *unbestimmte Constanten* sind und Z den Werth (16.) hat:

$$\partial \operatorname{arctang} u = \frac{\partial u}{1+u^2} = \Big(\frac{n\partial x}{Z^{\frac{1}{2}}} - \frac{(m+nx)\partial Z}{2Z^{\frac{3}{2}}}\Big) \cdot \frac{1}{1+\frac{(m+nx)^2}{Z}} \quad \text{oder}$$

$$(20.)\quad \partial \operatorname{arctang} u = \frac{2nZ\partial x - (m+nx)\partial Z}{2Z^{\frac{1}{2}}(Z+(m+nx)^2)}.$$

Der Zähler dieses Bruchs ist $2n(-p^2+2qx-x^2)-(m+nx)^2.2(q-x)(16.)$ $=2(-np^2+(m+nq)x-mq)$. Der Nenner ist

$$2Z^{\frac{1}{2}}(-p^2+2qx-x^2+m^2+2mnx+n^2x^2),$$

also ist in (20.):

$$(21.)\quad \partial \operatorname{arctang} u = \frac{\partial x}{Z^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{-np^2-mq+(m+nq)x}{m^2-p^2+2(q+mn)x+(n^2-1)x^2}.$$

10.

Soll hier der Factor von $\frac{\partial x}{Z^{\frac{1}{2}}}$ *gleich* 1 *sein*, damit das Integral von $\frac{\partial x}{Z^{\frac{1}{2}}}$ in (18.) gleich $\operatorname{arctang} u$ sei, so mufs

$$(22.)\quad -np^2-mq+(m+nq)x = m^2-p^2+2x(q+mn)+(n^2-1)x^2$$

sein. Dieses giebt zunächst $n^2-1=0$, also

$$(23.)\quad n = 1;$$

dann $2q+2mn=m+nq$, also $2q+2m=m+q$, mithin

$$(24.)\quad m = -q,$$

und zuletzt $-np^2-mq=m^2-p^2$, also, *identisch*, $-p^2+q^2=q^2-p^2$, so dafs die Voraussetzung (19.) in (§. 9.) *gestattet* ist. In (19.) ist jetzt vermöge (23. und 24.):

$$(25.)\quad u = \frac{x-q}{Z^{\frac{1}{2}}},$$

also ist nunmehr in (21.):

$$(26.)\quad \int \frac{\partial x}{Z^{\frac{1}{2}}} = \operatorname{arctang} u = \operatorname{arctang} \frac{x-q}{Z^{\frac{1}{2}}}.$$

11.

Soll dagegen der Factor von $\frac{\partial x}{Z^{\frac{1}{2}}}$, statt gleich 1, gleich $\frac{\varkappa}{x}$ sein, damit das andere Integral von $\frac{\partial x}{xZ^{\frac{1}{2}}}$ in (18.) $=\frac{1}{\varkappa}\operatorname{arctang} u$ sei, wo $\varkappa$ eine dritte unbestimmte Constante ist, so mufs in (21.)

(27.) $x(-np^2-mq+(m+nq)x)=\varkappa(m^2-p^2+2(q+mn)x+(n^2-1)x)$

sein. Daraus folgt $m^2-p^2=0$, also zunächst

$$(28.)\quad m=p.$$

Ferner $-np^2-mq=2\varkappa(q+mn)$ oder $-np^2-pq=2\varkappa(q+pn)$ oder $q(2\varkappa+p)=-np(p+2\varkappa)$, also

$$(29.)\quad n=-\frac{q}{p},$$

und endlich $(n^2-1)\varkappa=m+nq$, also $\left(\frac{q^2}{p^2}-1\right)\varkappa=p-\frac{q^2}{p}$ oder $\varkappa(q^2-p^2)=p(p^2-q^2)$, mithin

$$(30.)\quad \varkappa=-p.$$

Man könnte auch aus (27.) *andere* Werthe von m, p und $\varkappa$ entnehmen. Zum Beispiel zunächst aus $m^2-p^2=0$:

$$(31.)\quad m=\pm p.$$

Dann gäbe $-np^2-mq=2\varkappa(q+mn)$, $-np^2\mp pq=2\varkappa(q\pm np)$, also $-p(np\pm q)=\pm 2\varkappa(np\pm q)$, mithin

$$(32.)\quad \varkappa=\mp\tfrac{1}{2}p.$$

Endlich aus $(n^2-1)\varkappa=m+nq$ wäre $\mp\frac{1}{2}p(n^2-1)=\pm p+nq$ oder $\mp(n^2-1)=\pm 2+\frac{2nq}{p}$ oder $n^2-1=-2\mp\frac{2np}{p}$ oder $n^2\pm 2n\cdot\frac{q}{p}+1=0$, also $n=\mp\frac{q}{p}\pm\sqrt{\left(\frac{q^2}{p^2}-1\right)}$ oder

$$(33.)\quad n=\mp\frac{q-\sqrt{(q^2-p^2)}}{p}.$$

Auch diese Werthe könnten gesetzt werden; indessen sind die obigen (28. 29. und 30.) die einfacheren.

Es ist also nunmehr

$$(34.)\quad \int\frac{\partial x}{x.Z^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\varkappa}\operatorname{arc tang} u,$$

und da $u = \frac{m+nx}{Z^{\frac{1}{2}}}$ (19.) $= \frac{p - \frac{q}{p}x}{Z^{\frac{1}{2}}}$ (28. und 29.) und $x = -p$ ist (30.):

$$(35.)\quad \int \frac{\partial x}{x.Z^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{p}\operatorname{arc\,tang}\frac{p^2 - qx}{pZ^{\frac{1}{2}}}.$$

12.

Setzt man die Ausdrücke von $\int \frac{\partial x}{x.Z^{\frac{1}{2}}}$ (35.) und $\int \frac{\partial x}{Z^{\frac{1}{2}}}$ (26.) in (18.), so ergiebt sich

$$(36.)\quad X = -\frac{\sqrt{(hc-ea)}}{\sqrt{(h^2+e^2)}}\cdot\frac{1}{p}\operatorname{arc\,tang}\frac{p^2-qx}{pZ^{\frac{1}{2}}} - \frac{h(e+c)}{\sqrt{(h^2+e^2)}}\operatorname{arc\,tang}\frac{x-q}{Z^{\frac{1}{2}}} + \text{Const.}$$

oder, da $p = \frac{hc-ea}{\sqrt{(h^2+e^2)}}$ ist (16.):

$$(37.)\quad X = -r\operatorname{arc\,tang}\frac{p^2-qx}{pZ^{\frac{1}{2}}} - \frac{h(e+c)}{\sqrt{(h^2+e^2)}}\operatorname{arc\,tang}\frac{x-q}{Z^{\frac{1}{2}}} + \text{Const.}$$

und dies in (6.) gesetzt giebt, da $w = \arccos\frac{z}{y}$ ist (3.):

$$(38.)\quad F = -2r\Big[(2r-x)\arccos\frac{z}{y} + r\operatorname{arc\,tang}\frac{p^2-qx}{pZ^{\frac{1}{2}}} + \frac{h(e+c)}{\sqrt{(h^2+e^2)}}\operatorname{arc\,tang}\frac{x-q}{Z^{\frac{1}{2}}}\Big] + \text{Const.}$$

13.

Für $x = a = r - h$ ist $F = 0$, $y = r^2 - h^2$, $z = c$, also ist in (17.) $r^2 - h^2 - c^2 = \frac{h^2+e^2}{h^2}\cdot Z$, und folglich

$$(39.)\quad Z^{\frac{1}{2}} = h.\sqrt{\left(\frac{r^2-h^2-c^2}{h^2+e^2}\right)}.$$

Ferner ist aus (16.), für $x = a = r - h$,

$$p^2 - qx = \frac{1}{h^2+e^2}[(hc-ea)^2 - a((h^2+e^2)r + eh(e+c))] \quad \text{oder}$$

$$(40.)\quad (h^2+e^2)(p^2-qx) = h(c^2h - (r-h)(ec+hr)).$$

Dieses giebt, vermöge (39. und 16.), für $x = a$ und $F = 0$:

$$\frac{p^2-qx}{p.Z^{\frac{1}{2}}} = \frac{h}{h^2+e^2}(c^2h - (r-h)(ec+hr))\cdot\frac{\sqrt{(h^2+e^2)}}{hc-e(r-h)}\cdot\frac{\sqrt{(h^2+e^2)}}{h\sqrt{(r^2-h^2-c^2)}} \quad \text{oder}$$

$$(41)\quad \frac{p^2-qx}{p.Z^{\frac{1}{2}}} = \frac{c^2h-(r-h)(ec+hr)}{(hc-e(r-h))\sqrt{(r^2-h^2-c^2)}}.$$

Sodann ist für $x = a$ und $F = 0$ aus (16. und 39.):

$$\frac{x-q}{Z^{\frac{1}{2}}} = \left(r - h - \frac{(h^2+e^2)r - ch(e+c)}{(h^2+e^2)}\right) \cdot \frac{1}{h}\sqrt{\frac{h^2+e^2}{r^2-h^2-c^2}} \quad \text{oder}$$

$$(42.) \quad \frac{x-q}{Z^{\frac{1}{2}}} = \frac{ec-h^2}{\sqrt{(h^2+c^2)}\sqrt{(r^2-h^2-c^2)}}.$$

Also ist in (38.):

$$(43.) \quad \text{Const.} = +2r\Big[(r+h)\arccos\frac{c}{\sqrt{(r^2-h^2)}}$$

$$+ r \operatorname{arctang}\frac{c^2h-(r-h)(ec+hr)}{(hc-e(r-h))\sqrt{(r^2-h^2-c^2)}} + \frac{h(e+c)}{\sqrt{(h^2+e^2)}}\operatorname{arctang}\frac{ec-h^2}{\sqrt{(h^2+e^2)}\sqrt{(r^2-h^2-c^2)}}\Big].$$

14.

Für $x = AG$ erhält man das *ganze* $F = DF$. Für dieses x ist $z = y$, also $\arccos\frac{z}{y} = \arccos 1 = 0$, und Z ist vermöge (17.) gleich Null, also sind die Tangenten in (38.) $= \infty$ und folglich die zugehörigen Bogen $= \frac{1}{2}\pi$. Mithin giebt (38.) mit (43.) für den ganzen, durch die beiden Ebenen DH und FH von der Kugelfläche abgeschnittenen Theil DF:

$$(44.)\ F = 2r\Big[(r+h)\arccos\frac{c}{\sqrt{(r^2-h^2)}} - r\left(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{arctang}\frac{c^2h-(r-h)(ec+hr)}{(hc-e(r-h))\sqrt{(r^2-h^2-c^2)}}\right)$$

$$- \frac{h(e+c)}{\sqrt{(h^2+e^2)}}\left(\tfrac{1}{2}\pi + \operatorname{arctang}\frac{h^2-ec}{\sqrt{(h^2+e^2)}\sqrt{(r^2-h^2-c^2)}}\right)\Big].$$

Dies ist der gesuchte Ausdruck von F.

15.

A. Für den besondern Fall $c = 0$, oder wenn die Ebene DH von der Kugel einen *vollen, nicht gröfsten Halbkreis* abschneidet, also für den Ausschnitt $BDF_1 = F_1$, ist $z = 0$, mithin $\arccos\frac{z}{y} = \frac{1}{2}\pi$, folglich aus (44.):

$$(45.) \quad F_1 = r\Big[h\pi + 2r\operatorname{arctang}\frac{hr}{e\sqrt{(r^2-h^2)}}$$

$$- \frac{he}{\sqrt{(h^2+e^2)}}\left(\pi + 2\operatorname{arctang}\frac{h^2}{\sqrt{(h^2+e^2)}\sqrt{(r^2-h^2)}}\right)\Big].$$

B. Für den Fall wenn, aufser $c = 0$, $h = r$ ist, also für den *Abschnitt* $ADF_2 = F_2$, sind in (45.) die Tangenten $= \infty$, also die zugehörigen Bogen $= \frac{1}{2}\pi$. Mithin giebt dann (45.):

$$F_2 = r\Big[r\pi + 2r.\tfrac{1}{2}\pi - \frac{re}{\sqrt{(r^2+e^2)}}(\pi + 2.\tfrac{1}{2}\pi)\Big] \quad \text{oder}$$

$$(46.) \quad F_2 = 2r^2\pi\Big[1 - \frac{e}{\sqrt{(r^2+e^2)}}\Big].$$

C. Für $c=0$, $h=r$ und $e=0$ endlich, oder für die *halbe Kugelfläche* F_3, giebt (46.)

$$(47.)\quad F_3 = 2r^2\pi;$$

wie gehörig.

16.

Anmerkung.

Der Umstand, dafs sich in (§. 11.) für das Integral von

$$\frac{\partial x}{x\sqrt{Z}} = \frac{\partial x}{x\sqrt{(-p^2+2qx-x^2)}}\ (16.),$$

aufser dem Werthe

$$(48.)\quad \int\frac{\partial x}{xZ^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{p}\operatorname{arc\,tang}\frac{p^2-qx}{pZ^{\frac{1}{2}}}\,(35.) = -\frac{1}{p}\operatorname{arc\,tang}u_1 + \text{Const.},$$

vermöge der andern Werthe von m, n und x (31. 32. und 33.) gemäfs (19.) noch ein *zweiter* Werth

$$(49.)\quad \int\frac{\partial x}{xZ^{\frac{1}{2}}} = \mp\frac{2}{p}\operatorname{arc\,tang}\frac{\pm p \mp \frac{q-\sqrt{(q^2-p^2)}}{p}\cdot x}{Z^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -\frac{2}{p}\operatorname{arc\,tang}\frac{p^2-x(q-\sqrt{(q^2-p^2)})}{pZ^{\frac{1}{2}}} = -\frac{2}{p}\operatorname{arc\,tang}u_2 + \text{Const.}$$

findet, giebt Anlafs zu einer Bemerkung, welche vielleicht nicht ganz überflüssig ist.

A. Die Ausdrücke (48. und 49.) sind völlig richtig. Wenn man sie differentiirt, nemlich $\frac{\partial u_1}{1+u_1^2}$ und $\frac{\partial u_2}{1+u_2^2}$ berechnet, so findet sich, dafs

$$(50.)\quad -\frac{1}{p}\cdot\frac{\partial u_1}{1+u_1^2} = -\frac{2}{p}\cdot\frac{\partial u_2}{1+u_2^2} = \frac{\partial x}{xZ^{\frac{1}{2}}}$$

ist; wie es sein soll. Daraus aber, dafs die *Differentiale* von $-\frac{1}{p}\operatorname{arc\,tang}u_1$ und $-\frac{2}{p}\operatorname{arc\,tang}u_2$ gleich sind, folgt natürlich nicht, dafs auch die *Integrale* gleich seien, nämlich dafs $-\frac{1}{p}\operatorname{arc\,tang}u_1 = -\frac{2}{p}\operatorname{arc\,tang}u_2$ sei; denn dies würde

$$(51.)\quad \operatorname{arc\,tang}u_1 = 2\operatorname{arc\,tang}u_2 = \operatorname{arc\,tang}\frac{2u_2}{1-u_2^2}$$

geben; was *nicht* zutrifft.

B. Der Grund davon liegt in den *Constanten*. Bezeichnet man nemlich dieselben durch C_1 und C_2, so kann keineswegs die Gleichheit (51.),

sondern nur die Gleichheit $C_1-\frac{1}{p}\operatorname{arctang} u_1 = C_2-\frac{2}{p}\operatorname{arctang} u_2$ oder

$$(52.)\quad p(C_1-C_2) = \operatorname{arctang} u_1 - 2\operatorname{arctang} u_2$$

Statt finden; und diese Gleichung *mufs* nothwendig erfüllt werden.

C. Da die Constante eines Integrals für *alle* Werthe der Veränderlichen *dieselbe* ist, so kann man sie für einen *beliebigen* Werth von x suchen. Am leichtesten ergiebt sie sich hier für diejenigen Werthe von x, für welche Z gleich Null ist. Für diesen Werth von x geben (48. und 49.), wenn man den Werth von $\int\frac{\partial x}{xZ^{\frac{1}{2}}}$ für jenen Werth von x durch A bezeichnet:

$$(53.)\quad A = -\frac{1}{p}\cdot\tfrac{1}{2}\pi + C_1,\text{ also } C_1 = \frac{1}{p}\cdot\tfrac{1}{2}\pi + A \text{ und}$$

$$(54.)\quad A = -\frac{2}{p}\cdot\tfrac{1}{2}\pi + C_2,\text{ also } C_2 = \frac{2}{p}\cdot\tfrac{1}{2}\pi + A.$$

Dies in (52.) gesetzt, giebt $p\left(\frac{1}{p}\cdot\tfrac{1}{2}\pi - \frac{1}{p}\cdot\pi\right) = \operatorname{arctang} u_1 - 2\operatorname{arctang} u_2$, also $\operatorname{arctang} u_1 = -(\tfrac{1}{2}\pi - 2\operatorname{arctang} u_2) = -2\operatorname{arccotang} u_2$ oder

$$(55.)\quad \operatorname{arctang} u_1 = -\operatorname{arctang}\frac{1-u_2^2}{2u_2} = +\operatorname{arctang}\tfrac{1}{2}\left(u_2-\frac{1}{u_2}\right).$$

D. Um zu sehen, dafs dies wirklich zutrifft, sei der Kürze wegen,

$$(56.)\quad q^2-p^2 = r^2.$$

Dann ist zufolge (49.):

$$(57.)\quad u_2 = \frac{p^2+(r-q)x}{pZ^{\frac{1}{2}}}.$$

Dies giebt, in (55.) und $Z = -p^2+2qx-x^2$ (16.) gesetzt:

$$u_2-\frac{1}{u_2} = \frac{p^2+(r-q)x}{pZ^{\frac{1}{2}}} - \frac{pZ^{\frac{1}{2}}}{p^2+(r-q)x}$$

$$= \frac{p^4+2p^2rx-2p^2qx+r^2x^2-2rqx^2+q^2x^2-p^2(-p^2+2qx-x^2)}{p(p^2+rx-qx)Z^{\frac{1}{2}}} \text{ oder}$$

$$u_2-\frac{1}{u_2} = \frac{p^4+2p^2rx-4p^2qx-2rqx^2+(r^2+q^2+p^2)x^2}{p(p^2+rx-qx)Z^{\frac{1}{2}}},$$

oder, wegen $r^2+q^2+p^2 = 2q^2$ (56.):

$$(58.)\quad \tfrac{1}{2}\left(u_2-\frac{1}{u_2}\right) = \frac{p^2(p^2-qx)+rx(p^2-qx)-qx(p^2-qx)}{p(p^2+rx-qx)Z^{\frac{1}{2}}} = \frac{p^2-qx}{pZ^{\frac{1}{2}}} = u_1 \text{ (48.)}.$$

Es ist also wirklich $\operatorname{arctang}\frac{1}{2}\left(u_2 - \frac{1}{u_2}\right) = \operatorname{arctang} u_1$; wie es nach (55.) sein soll.

Es folgt demnach, dafs es wirklich zwei verschiedene Ausdrücke des *veränderlichen* Theils des Integrals giebt, die also für *jeden* Werth von x nur um eine *Constante* verschieden sind.

II. Der körperliche Inhalt des Ausschnitts.

17.

Das Differential desselben ist das Product von ∂x in die Fläche des *Kreis-Abschnitts* ZM. Diese Fläche findet sich, wenn man das *Dreieck* ZP von dem *Kreis-Ausschnitt* MZP abzieht. *Letzterer* hat $2yw$ (3.) zum Bogen und y zum Halbmesser. Seine Fläche ist also $2yw.\frac{1}{2}y = y^2 w$. Das *Dreieck* ZP hat $2\sqrt{(y^2 - z^2)}$ zur Grundlinie und $ZP = z$ zur Höhe; seine Fläche ist also $z\sqrt{(y^2 - z^2)}$. Demnach ist von dem gesuchten körperlichen Inhalt des *Kugel-Ausschnitts* DHF, welcher durch K bezeichnet werden mag, das Differential

$$(59.)\quad \partial K = y^2 w \partial x - z\sqrt{(y^2 - z^2)}\partial x = (2rx - x^2) w \partial x - z\sqrt{(y^2 - z^2)}\partial x.$$

18.

Man setze

$$(60.)\quad K = (rx^2 - \tfrac{1}{3}x^3) w - zx\sqrt{(y^2 - z^2)} + X + \text{Const.},$$

so ist

$$(61.)\quad \partial K = (2rx - x^2) w \partial x + (rx^2 - \tfrac{1}{3}x^3)\partial w - z\sqrt{(y^2 - z^2)}\partial x - x\sqrt{(y^2 - z^2)}\partial z - \frac{zx(y\partial y - z\partial z)}{\sqrt{(y^2 - z^2)}} + \partial X,$$

und vermöge des Werths (59.) von ∂K:

$$(62.)\quad \partial X = (\tfrac{1}{3}x^3 - rx^2)\partial w + x\sqrt{(y^2 - z^2)}\partial z + \frac{zx(y\partial y - z\partial z)}{\sqrt{(y^2 - z^2)}}$$

oder, da $\partial w = -\frac{\partial \frac{z}{y}}{\sqrt{\left(1 - \frac{z^2}{y^2}\right)}}$ (§. 6.) $= -\frac{y^2\partial z - zy\partial y}{y^2\sqrt{(y^2 - z^2)}}$ und $y^2 = 2rx - x^2$ ist (8.):

$$\partial X = (rx^2 - \tfrac{1}{3}x^3)\frac{y^2\partial z - zy\partial y}{(2rx - x^2)\sqrt{(y^2 - z^2)}} + \frac{zxy\partial y + x(y^2 - 2z^2)\partial z}{\sqrt{(y^2 - z^2)}} \quad \text{oder}$$

$$3\partial X = \frac{x}{\sqrt{(y^2 - z^2)}}\left[(9rx - 4x^2 - 6z^2)\partial z + \frac{3r - 2x}{2r - x} zy\partial y\right]$$

oder auch, da $y\partial y=(r-x)\partial x$ (8.), also $\frac{3r-2x}{2r-x}\cdot y\partial y=\frac{(r-x)(3r-2x)}{2r-x}\cdot\partial x$ $=\frac{(r-2x)(2r-x)+r^2}{2r-x}\cdot\partial x$ ist:

$$(63.)\quad 3\partial X=\frac{x}{\sqrt{(y^2-z^2)}}[(9rx-4x^2-6z^2)\partial z+z(r-2x)\partial x]+\frac{r^2zr\partial x}{(2r-x)\sqrt{(y^2-z^2)}}.$$

19.

Aus (12. und 13.) ist $z=\frac{e(x-a)+hc}{h}$ und $\partial z=\frac{e\partial x}{h}$. Dies giebt

$$\frac{zx\partial x}{2r-x}=\frac{-(2r-x)+2r}{2r-x}\cdot z\partial x=-z\partial x+\frac{2rz\partial x}{2r-x}$$
$$=-z\partial x+2r\cdot\frac{-e(2r-x)+2re-ae+hc}{h(2r-x)}\cdot\partial x \quad\text{oder}$$

$$(64.)\quad \frac{zx\partial z}{2r-x}=-z\partial x-\frac{2re}{h}\partial x+2r\cdot\frac{2re-ae+hc}{h(2r-x)}\partial x,$$

also in (63.)

$$3\partial X=\frac{\partial x}{\sqrt{(y^2-z^2)}}\Big[(9rx-4x^2-6z^2)\frac{ex}{h}+z(rx-2x^2-r^2)-\frac{2r^3e}{h}\Big]$$
$$+\frac{2r^3}{h}\cdot\frac{2re-ae+hc}{(2r-x)\sqrt{(y^2-z^2)}}\cdot\partial x, \quad\text{oder}$$

$$(65.)\quad 3h^3\partial X$$
$$=\frac{h^2\partial x}{\sqrt{(y^2-z^2)}}[(9rx-4x^2-6z^2)ex+(e(x-a)+hc)(rx-2x^2-r^2)-2r^3e]$$
$$+2r^3(2re-ae+hc)\cdot\frac{h^2\partial x}{(2r-x)\sqrt{(y^2-z^2)}}.$$

20.

Der Factor von $\frac{\partial x}{\sqrt{(y^2-z^2)}}$ in (65.), welcher durch M bezeichnet werden mag, ist

$$M=h^2[(9rx-4x^2)ex+(e(x-a)+hc)(rx-2x^2-r^2)-2r^3e]$$
$$-6ex(e(x-a)+hc)^2$$
$$=h^2(ear^2-hcr^2-2r^3e)$$
$$+x(-er^2h^2-earh^2+h^3cr-6e^3a^2-6eh^2c^2+12e^2ahc)$$
$$+x^2(10erh^2+2eah^2-2h^3c+12e^3a-12e^2hc)+x^3(-6eh^2-6e^3),$$

oder, da $a=AB=r-h$ ist:

$$(66.)\quad M=-h^2r^2(er+h(e+c))$$
$$+x(h^3r(e+c)-h^2e(2r^2+6e^2+6c^2+12ec)+12he^2r(e+c)-6e^3r^2)$$
$$+x^2(-2h^3(e+c)+12h^2er-12e^2h(e+c)+ne^3r)-6x^3e(h^2+e^2),$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$(67.)\quad e+c=\varepsilon \text{ und } h^2+e^2=\chi^2 \text{ setzt,}$$

$$\begin{aligned}M = &-h^2r^2(h\varepsilon+re)\\ &+x((h\varepsilon-re)(h^2r-6e(h\varepsilon-re))-h^2r^2e)\\ &+2x^2(-6(h^2+e^2)(h\varepsilon-re)+5h^3e)\\ &-6e\chi^2x^3,\end{aligned}$$

und wenn man nach

$$(68.)\quad h\varepsilon-re = \tau^2 \text{ setzt:}$$

$$(69.)\quad \begin{aligned}M = &-h^2r^2(h\varepsilon+re)+x(\tau^2(h^2r-6e\tau^2)-h^2r^2e)\\ &+2x^2(-6\chi^2\tau^2+5h^3\varepsilon)\\ &-6e\chi^2x^3.\end{aligned}$$

Ferner ist in (65.):

$$(70.)\quad 2re-ae+hc = 2re-re+he+hc = h\varepsilon+re.$$

Setzt man also, wiederum der Kürze wegen,

$$(71.)\quad \begin{cases}1.\ -h^2r^2(h\varepsilon+re) = A,\\ 2.\ \tau^2(h^2r-6e\tau^2)-h^2r^2e = B,\\ 3.\ -12\chi^2\tau^2+10h^3\varepsilon = C,\\ 4.\ -6e\chi^2 = D,\end{cases}$$

so dafs in (68.)

$$(72.)\quad M = A+Bx+Cx^2+Dx^3$$

ist, und dann noch

$$(73.)\quad 2r^3h^2(h\varepsilon+re) = E,$$

so giebt (65.):

$$(74.)\quad 3h^3\partial X = \frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3}{\sqrt{(y^2-x^2)}}\cdot\partial x+\frac{E\partial x}{(2r-x)\sqrt{(y^2-x^2)}},$$

oder auch, weil nach (17. und 66.) $\sqrt{(y^2-x^2)} = \frac{\chi}{h}Z^{\frac{1}{2}}$ ist:

$$(75.)\quad 3h^2\chi\partial X = \frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3}{Z^{\frac{1}{2}}}\cdot\partial x+\frac{E\partial x}{(2r-x)Z^{\frac{1}{2}}}.$$

21.

Man setze

$$(76.)\quad \frac{\partial x}{Z^{\frac{1}{2}}} = \partial Y \text{ und } \int\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3}{Z^{\frac{1}{2}}}\cdot\partial x = (\lambda x^2+\mu x+\nu)Z^{\frac{1}{2}}+\sigma Y,$$

wo λ, μ, ν und σ unbestimmte Constanten sind, so giebt dies:

$$\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3}{Z^{\frac{1}{2}}}\cdot\partial x=(2\lambda x+\mu)Z^{\frac{1}{2}}\partial x+\frac{\lambda x^2+\mu x+\nu}{2Z^{\frac{1}{2}}}\partial Z+\sigma\partial Y,$$

oder, wegen $\partial Y=\frac{\partial x}{Z^{\frac{1}{2}}}$ (76.):

(77.) $(A+Bx+Cx^2+Dx^3)\partial x=(2\lambda x+\mu)Z\partial x+\frac{1}{2}(\lambda x^2+\mu x+\nu)\partial Z+\sigma\partial x.$

Zufolge (16.) ist $Z=-p^2+2qx-x^2$, also $\partial Z=2(q-x)\partial x$. Daher giebt (77.)

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3=(2\lambda x+\mu)(-p^2+2qx-x^2)+(\lambda x^2+\mu x+\nu)q-x+\sigma$$

oder (78.) $A+Bx+Cx^2+Dx^3$

$$=-p^2\mu+q\nu+\sigma+(-2p^2\lambda+3q\mu-\nu)x+(5q\lambda-2\mu)x^2-3\lambda x^3;$$

und daraus folgt

(79.) $$\begin{cases}-3\lambda=D, & \text{oder}\quad \lambda=-\frac{1}{3}D,\\ 5q\lambda-2\mu=C, & \mu=\frac{1}{2}(5q\lambda-C),\\ -2p^2\lambda+3q\mu-\nu=B, & \nu=-2p^2\lambda+3q\mu-B,\\ -p^2\mu+q\nu+\sigma=A, & \sigma=+p^2\mu-q\nu+A,\end{cases}$$

also

(80.) $$\begin{cases}1.\quad \lambda=-\frac{1}{3}D,\\ 2.\quad \mu=-\frac{5}{6}qD-\frac{1}{2}C,\\ 3.\quad \nu=+\frac{2}{3}p^2D-\frac{5}{2}q^2D-\frac{3}{2}qC-B,\\ 4.\quad \sigma=-\frac{5}{6}p^2qD-\frac{1}{2}p^2C-\frac{2}{3}p^2qD+\frac{5}{2}q^3D+\frac{3}{2}q^2C+qB+A.\end{cases}$$

Demnach ist in (76.), weil $Y=\int\frac{\partial x}{Z^{\frac{1}{2}}}=\text{arctang}\,\frac{x-q}{Z^{\frac{1}{2}}}$ ist (26.):

(81.) $$\int\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3}{Z^{\frac{1}{2}}}$$

$$=[-\tfrac{1}{3}Dx^2-(\tfrac{5}{6}qD+\tfrac{1}{2}C)x+(\tfrac{2}{3}p^2-\tfrac{5}{2}q^2)D-\tfrac{3}{2}qC-B]Z^{\frac{1}{2}}$$
$$+[\tfrac{1}{2}q(5q^2-3p^2)D+\tfrac{1}{2}(3q^2-p^2)C+qB+A]\,\text{arctang}\,\frac{x-q}{Z^{\frac{1}{2}}}.$$

22.

Ferner ist, wenn man

(82.) $2r-x=x_1$ also $x=2r-x_1$ setzt,

(83.) $$Z=-p^2+2q(2r-x_1)-(2r-x_1)^2\ (16.)$$
$$=-p^2+4qr-4r^2+(4r-2q)x_1-x_1^2,$$

oder auch,

(84.) $-p_1^2+4r(q-r)=-p_1^2$ und $2r-q=q_1$ gesetzt:

(85.) $$Z=-p_1^2+2q_1x+x_1^2.$$

Nach (16. und 67.) ist

$$(86.)\quad \begin{cases} 1.\ p^2 = \dfrac{(hc-ea)^2}{\varkappa^2} = \dfrac{(hc-er+eh)^2}{\varkappa^2} = \dfrac{(h\varepsilon-er)^2}{\varkappa^2} \text{ und} \\ 2.\ q = \dfrac{(h^2+e^2)r-eh\varepsilon}{\varkappa^2} = r - \dfrac{eh\varepsilon}{\varkappa^2}, \end{cases}$$

also ist in (84.)

$$(87.)\quad \begin{cases} 1.\ -p_1^2 = -\dfrac{(h\varepsilon-er)^2}{\varkappa^2} - 4r\cdot\dfrac{eh\varepsilon}{\varkappa^2} = -\dfrac{(h\varepsilon+er)^2}{\varkappa^2} \text{ und} \\ 2.\ +q_1 = r + \dfrac{eh\varepsilon}{\varkappa^2}. \end{cases}$$

Nun giebt (82.) für (75.):

$$(88.)\quad \frac{E\partial x}{(2r-x)Z^{\frac{1}{2}}} = -\frac{E\partial x_1}{x_1 Z^{\frac{1}{2}}},$$

und davon ist das Integral nach (35.):

$$(89.)\quad \int\frac{E\partial x}{(2r-x)Z^{\frac{1}{2}}} = +\frac{E}{p_1}\operatorname{arc\,tang}\frac{p_1^2-q_1x_1}{p_1Z^{\frac{1}{2}}} = \frac{E}{p_1}\operatorname{arc\,tang}\frac{p_1^2-q_1(2r-x)}{p_1Z^{\frac{1}{2}}}.$$

23.

Zufolge (60.) ist

$$(90.)\quad 3\varkappa h^2K = \varkappa h^2[(3rx^2-x^3)w - 3xz\sqrt{(y^2-z^2)}] + 3\varkappa h^2X.$$

Nach (3.) ist $w = \arccos\frac{z}{y}$, und $3\varkappa h^2X$ findet sich aus (75., 81. und 89.). Dies giebt, in (90.) gesetzt:

$$\begin{aligned} 3\varkappa h^2K = {} & \varkappa h^2x\left[(3rx-x^2)\arccos\frac{z}{y} - 3z\sqrt{(y^2-z^2)}\right] \\ & + Z^{\frac{1}{2}}[-\tfrac{1}{3}Dx^2 - (\tfrac{5}{6}qD+\tfrac{1}{2}C)x + (\tfrac{2}{3}p^2-\tfrac{5}{2}q^2)D - \tfrac{3}{2}qC - B] \\ & + \operatorname{arc\,tang}\frac{x-q}{Z^{\frac{1}{2}}}[\tfrac{1}{2}q(5q^2-3p^2)D + \tfrac{1}{2}(3q^2-p^2)C + qB + A] \\ & + \frac{E}{p_1}\operatorname{arc\,tang}\frac{p_1^2-q_1(2r-x)}{p_1Z^{\frac{1}{2}}} + \text{Const.}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} (91.)\quad K = {} & x^2(r-\tfrac{1}{3}x)\arccos\frac{z}{y} - zx\sqrt{(y^2-z^2)} \\ & + \frac{Z^{\frac{1}{2}}}{18\varkappa h^2}[(4p^2-15q^2)D - 9qC - 6B - (5qD+3C)x - 2Dx^2] \\ & + \frac{1}{6\varkappa h^2}\operatorname{arc\,tang}\frac{x-q}{Z^{\frac{1}{2}}}[q(5q^2-3p^2)D + (3q^2-p^2)C + 2qB + 2A] \\ & + \frac{E}{3p_1\varkappa h^2}\operatorname{arc\,tang}\frac{p_1^2-q_1(2r-x)}{p_1Z^{\frac{1}{2}}} + \text{Const.} \end{aligned}$$

24.

Für $x = a = r - h$ ist $z = c$, $y^2 = r^2 - h^2$, $Z^{\frac{1}{2}} = \frac{h}{\varkappa}\sqrt{(y^2 - z^2)}$ (17.) $= \frac{k}{\varkappa}\sqrt{(r^2 - h^2 - c^2)}$ und der körperliche Inhalt K des Ausschnitts ist Null. Dies giebt, aus (91.):

$$(92.)\quad \text{Const.} =$$

$$-\tfrac{1}{3}(r-h)^2(2r+h)\arccos\frac{c}{\sqrt{(r^2-h^2-c^2)}} + (r-h)c\sqrt{(r^2-h^2-c^2)}$$
$$-\frac{\sqrt{(r^2-h^2-c^2)}}{18\varkappa^2 h}[(4p^2-15q^2)D - 9qC - 6B - (5qD+3C)(r-h)2D(r-h)^2]$$
$$+\frac{1}{6\varkappa h^2}\operatorname{arc\,tang}\frac{(q-r+h)\varkappa}{h\sqrt{(r^2-h^2-c^2)}}[q(5q^2-3p^2)D + (3q^2-p^2)C + 2qB + 2A]$$
$$-\frac{E}{3p_1\varkappa h_2}\operatorname{arc\,tang}\frac{(p_1^2-q_1(r+h))\varkappa}{hp_1\sqrt{(r^2-h^2-c^2)}}.$$

Den *ganzen* Körper erhält man für $x = A$, für welches x, $y = z$, also $\arccos\frac{z}{y} = \arccos 1 = 0$ und $Z^{\frac{1}{2}} = 0$, mithin $\operatorname{arc\,tang}\frac{x-q}{Z^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\pi$ und $\operatorname{arc\,tang}\frac{p_1^2 - q(r-x)}{p_1 Z^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\pi$ ist. Also giebt (91. und 92.) für den *ganzen* Körper:

$$(93.)\quad K = (r-h)c\sqrt{(r^2-h^2-c^2)} - \tfrac{1}{3}(r-h)^2(2r+h)\arccos\frac{c}{\sqrt{(r^2-h^2-c^2)}}$$
$$-\frac{\sqrt{(r^2-h^2-c^2)}}{18\varkappa^2 h}[(4p^2-15q^2)D - 9qC - 6B - (5qD+3C)(r-h) - 2D(r-h)^2]$$
$$+\frac{1}{6\varkappa h^2}\left(\tfrac{1}{2}\pi + \operatorname{arc\,tang}\frac{(q-r+h)\varkappa}{h\sqrt{(r^2-h^2-c^2)}}\right)[q(5q^2-3p^2)D + (3q^2-p^2)C + 2qB + 2A]$$
$$+\frac{E}{3p_1\varkappa h_2}\left(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{arc\,tang}\frac{(p_1^2-q(r+h))\varkappa}{hp_1\sqrt{(r^2-h^2-c^2)}}\right);$$

wo nun die Werthe von A, B, C, D, E, p, q, und p_1 und q_1 zu setzen sind.

25.

A. Zunächst ist in (93.) der Factor zu $-\frac{\sqrt{(r^2-h^2-c^2)}}{18\varkappa h^2}$, der durch M_1 bezeichnet werden mag,

$$(94.)\quad M_1 = 2D(2p^2 - (r-h)^2) - (5qD + 3C)(3q + r - h) - 6B.$$

Hierin die Werthe von D, C und B aus (71.) und von

$$(95.)\quad \begin{cases} 1.\ p^2 = \frac{(hc-ea)^2}{h^2+e^2}(16.) = \frac{(hc-er+eh)^2}{\varkappa^2}(67.) = \frac{(h\varepsilon-er)^2}{\varkappa^2}(67.) = \frac{\tau^4}{\varkappa^2} \\ \quad\text{und} \\ 2.\ q = \frac{(h^2+e^2)r - eh\varepsilon}{\varkappa^2}(16.\text{ und }67.) = \frac{h^2 r - \tau^2 e}{\varkappa^2}(68.) \end{cases}$$

gesetzt, giebt

$$M_1 = -12e\varkappa^2\left(\frac{2\tau^4}{\varkappa^2}-(r-h)^2\right)$$
$$-(-30e(h^2r-\tau^2e)-36\varkappa^2\tau^2+30h^3\varepsilon)\left(\frac{3h^2r-3\tau^2e}{\varkappa^2}+r-h\right)$$
$$-6\tau^2(h^2r-6\tau^2e)+6h^2r^2e.$$

Hier ist $-30e(h^2r-\tau^2e)-36\varkappa^2\tau^2+30h^3\varepsilon = 30h^2(h\varepsilon-re)+\tau^2(30e^2-36\varkappa^2)$ $= 30h^2r^2+30e^2\tau^2-36\varkappa^2\tau^2 = -6\varkappa^2\tau^2$, also ist

$$M_1 = 12e((r-h)^2\varkappa^2-2\tau^4)+6\tau^2((3h^2r-3\tau^2e)+\varkappa^2(r-h))-6\tau^2(h^2r-6\tau^2e)+6h^2r^2e$$
$$= \varkappa^2(r-h)(6\tau^2+12e(r-h))-6\tau^4e+12\tau^2h^2r+6h^2r^2e,$$

und die Werthe von τ^2 und ε (68. und 67.) gesetzt, nach gehöriger Verwandlung:

$$(96.)\qquad M_1 = 6h[h^3e+c(3(r-h)(h^2+e^2)+2h^3-hce].$$

B. Der Factor rechts in der dritten Zeile von (93.), der durch M_2 bezeichnet werden mag, ist:

$$(97.)\qquad M_2 = q^2(5qD+3C)-p^2(3qD+C)+2qB+2A.$$

Hier ist

$5qD+3C = -30e(h^2r-\tau^2e)-36\varkappa^2\tau^2+30h^3\varepsilon$ (95. 2. und 71. 4. und 3.) oder

$$(98.)\qquad 5qD+3C = 6\tau^2(5h^2+5e^2-6\varkappa^2) = 6\tau^2(5h^2+5e^2-6h^2-6e^2)\ (67.)$$
$$= -6\tau^2\varkappa^2\ (67.).$$

Ferner

$3qD+C = -18e(h^2r-\tau^2e)-12\varkappa^2\tau^2+10h^3\varepsilon$ (95. 2. und 71. 4. 3.) oder

$$(99.)\qquad 3qD+C = 2[\tau^2(3e^2-h^4)-4h^2re].$$

Dies und (71. 1. und 2.) in (97. und 95.) gesetzt, giebt

$$M_2 = -\frac{6\tau^2}{\varkappa^2}(h^2r-\tau^2e)^2-\frac{2\tau^4}{\varkappa^2}(\tau^2(3e^2-h^2)-4h^2re)$$
$$+\frac{2(h^2r-\tau^2e)}{\varkappa^2}(\tau^2(h^2r-6\tau^2e)-h^2r^2e)-2h^2r^2(h\varepsilon+re) \text{ oder, vermöge (67. u. 68.):}$$
$$\tfrac{1}{2}\varkappa^2M_2 = -3\tau^2(h^2r-\tau^2e)^2-\tau^4(\tau^2(3e^2-h^2)-4h^2re)$$
$$+(h^2r-\tau^2e)(\tau^2(h^2r-6\tau^2e)-h^2r^2e)-h^2r^2(h^2+e^2)(\tau^2+2re) \text{ oder, vermöge (67.):}$$
$$(100.)\qquad M_2 = \frac{2h^3(e+c)}{h^2+e^2}[h^2(e+c)^2-3r^2(h^2+e^2)].$$

C. Sodann ist in (93.)

$$M_3 = \frac{(q-r+h)\varkappa}{h} = \frac{(q-r+h)\varkappa^2}{h\varkappa} = \frac{h^2r-\tau^2c+\varkappa^2(h-r)}{h\varkappa}\ (95. 2.)$$
$$= \frac{h^2r-hee+e^2r+(h^2+e^2)(h-r)}{h\varkappa}\ (68. u. 67.) = \frac{h^2r-he^2-hec+e^2r+h^3-h^2r+e^2h-e^2r}{h\varkappa},$$

oder

$$(101.)\qquad M_3 = \frac{h^2 - cc}{\sqrt{(h^2+e^2)}}.$$

D. Ferner ist in (93.)

$$\varkappa^2(p_1^2 - q_1(r+h)) = (h\varepsilon + er)^2 - (\varkappa^2 r + eh\varepsilon)(r+h)\ (87.),\ \text{also}$$

$$\frac{(p_1^2 - q_1(r+h))\varkappa}{hp_1} = \frac{(h\varepsilon + er)c - hr(r+h)}{\varkappa p_1} = \frac{(h\varepsilon + er)c - hr(r+h)}{h\varepsilon + er}\ (87.1.)\ \text{oder}$$

$$(102.)\qquad M_4 = \frac{(p_1^2 - q_1(r+h))\varkappa}{hp_1} = c - \frac{hr(r+h)}{hc + (h+r)e}.$$

E. Endlich ist in (93.), aus (73. und 87.):

$$(103.)\qquad M_5 = \frac{E}{3p_1\varkappa h^2} = \frac{2r^3h^2(h\varepsilon + re)}{3(h\varepsilon + re)h^2} = \tfrac{2}{3}r^3.$$

26.

Setzt man nun in (93.) die Werthe von M_1, M_2, M_3, M_4 und M_5 (96., 100., 101., 102. und 103.), so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}(104.)\quad K = {} & (r-h)\Big[c\sqrt{(r^2-h^2-c^2)} - \tfrac{1}{3}(r-h)(2r+h)\arccos\frac{c}{\sqrt{(r^2-h^2-c^2)}}\Big] \\ & - \frac{\sqrt{(r^2-h^2-c^2)}}{3(h^2+e^2)}[h^3e + c(2h^3 - hce + 3(r-h)(h^2+e^2))] \\ & + \frac{h(e+c)}{3(h^2+e^2)^{\frac{3}{2}}}[h^2(e+c)^2 - 3r^2(h^2+e^2)]\Big[\tfrac{1}{2}\pi + \operatorname{arctang}\frac{h^2 - ec}{\sqrt{(h^2+e^2)}\sqrt{(r^2-h^2-c^2)}}\Big] \\ & + \tfrac{2}{3}r^3\Big[\tfrac{1}{2}\pi + \operatorname{arctang}\frac{hr(r+h) - c(hc + e(h+r))}{(hc + (h+r)e)\sqrt{(r^2-h^2-c^2)}}\Big].\end{aligned}$$

Der Factor von $\sqrt{(r^2-h^2-c^2)}$ in den beiden ersten Zeilen dieses Ausdrucks ist $c(r-h) - \frac{h^3e + c(2h^3 - hce + 3(r-h)(h^2+e^2))}{3(h^2+e^2)} = \frac{h(c^2e - 2h^2c - h^2e)}{3(h^2+e^2)}$, also findet sich, wenn man auch den gesammten Factor von π nimmt:

$$\begin{aligned}(105.)\quad K = {} & \frac{h(c^2e - 2h^2c - h^2e)\sqrt{(r^2-h^2-c^2)}}{3(h^2+e^2)} + \pi\Big[\frac{(h^2(e+c)^2 - 3r^2(h^2+e^2))\,h(e+c)}{6(h^2+e^2)^{\frac{3}{2}}} + \tfrac{1}{3}r^3\Big] \\ & - \tfrac{1}{3}(r-h)^2(2r+h)\arccos\frac{c}{\sqrt{(r^2-h^2-c^2)}} \\ & + \frac{h(e+c)}{3(h^2+e^2)^{\frac{3}{2}}}(h^2(e+c)^2 - 3r^2(h^2+e^2))\operatorname{arctang}\frac{h^2-ec}{\sqrt{(h^2+e^2)}\sqrt{(r^2-h^2-c^2)}}, \\ & + \tfrac{2}{3}r^3\operatorname{arctang}\frac{(hr - ce)(h+r) - c^2h}{(hc + (h+r)e)\sqrt{(r^2-h^2-c^2)}};\end{aligned}$$

welches der gesuchte Ausdruck des *Inhalts des Kugel-Ausschnitts DHF* ist.

27.

A. Für den besondern Fall $c = 0$, also für den Körper $BDF_1 = K_1$,

ist der erste Theil des Ausdrucks (105.):

$$(106.)\qquad = -\frac{h^3 e\sqrt{(r^2-h^2)}}{3(h^2+e^2)}.$$

Der Factor von $\frac{1}{6}\pi$ ist

$$\frac{(h^2c^2-3r^2(h^2+e^2))he}{(h^2+e^2)^{\frac{3}{2}}}+2r^3-(r-h)^2(2r+h)$$

$$=\frac{(h^2e^2-3r^2(h^2+e^2))he}{(h^2+e^2)^{\frac{3}{2}}}+2r^3-2r^3-r^2h+4r^2h+2rh^2-2h^2r-h^3$$

$$(107.)\qquad = h\cdot\frac{(e^3-(h^2+e^2)^{\frac{3}{2}})(h^2-3r^2)-3r^2h^2e}{(h^2+e^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die dritte Zeile rechts in (105.) ist

$$(108.)\qquad = \frac{he}{3(h^2+e^2)^{\frac{3}{2}}}(h^2e^2-3r^2(h^2+e^2))\,\text{arc tang}\,\frac{h^2}{\sqrt{(h^2+e^2)}\sqrt{(r^2-h^2)}}.$$

Die vierte Zeile ist

$$(109.)\qquad = \tfrac{2}{3}r^3\,\text{arc tang}\,\frac{hr(h+r)}{(h+r)e\sqrt{(r^2-h^2)}} = \tfrac{2}{3}r^3\,\text{arc tang}\,\frac{hr}{e\sqrt{(r^2-h^2)}},$$

also ist

$$(110.)\qquad K_1 = -\tfrac{1}{3}h^3e\cdot\frac{\sqrt{(r^2-h^2)}}{h^2+e^2}+\tfrac{1}{6}\pi h\cdot\frac{(e^3-(h^2+e^2)^{\frac{3}{2}})(h^2-3r^2)-3r^2h^2e}{(h^2+e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+\frac{he(h^2e^2-3r^2(h^2-e^2))}{3(h^2+e^2)^{\frac{3}{2}}}\,\text{arc tang}\,\frac{h^2}{\sqrt{(h^2+e^2)}\sqrt{(r^2-h^2)}}+\tfrac{2}{3}r^3\,\text{arc tang}\,\frac{hr}{e\sqrt{(r^2-h^2)}}.$$

B. Für $c=0$ und $h=r$, also für den Körper $ADF_2=K_2$, ist in (110.), $\text{arc tang}\,\frac{h^3}{\sqrt{(h^2+e^2)}\sqrt{(r^2-h^2)}}$ und $\text{arc tang}\,\frac{hr}{e\sqrt{(r^2-h^2)}} = \text{arc tang}\,\infty = \frac{1}{2}\pi$, mithin ist aus (110.):

$$K_2 = \tfrac{1}{6}\pi\left[\frac{-2c^3(e^3-(c^2+e^2)^{\frac{3}{2}})-3re+re(r^2e^2-3r^2(r^2+e^2))+2r^3(r^2+e^2)^{\frac{3}{2}}}{(r^2+e^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\ \text{oder}$$

$$(111.)\qquad K_2 = \tfrac{2}{3}r^3\pi\Big(1-\frac{e(2e^2+3r^2)}{2(r^2+e^2)^{\frac{3}{2}}}\Big).$$

C. Für $c=0$, $h=r$ und $e=0$ endlich, also für die ***halbe Kugel*** $=K_3$, giebt (111.)

$$(112.)\qquad K_3 = \tfrac{2}{3}r^3\pi;$$

wie gehörig.

28.

Ob vielleicht noch auf einem kürzern Wege zu den End-Ergebnissen zu gelangen sei, bleibe dahin gestellt; die Ergebnisse selbst aber lassen sich, wie es scheint, nicht weiter vereinfachen.

Berlin, im Mai 1847.

13.
Gedächtnifsrede auf *Carl Gustav Jacob Jacobi.*

(Von *Lejeune Dirichlet.*)

(Gehalten in der Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 1. Juli 1852.)*)

Indem ich es unternehme, die wissenschaftlichen Leistungen des gröfsten Mathematikers zu schildern, welcher seit *Lagrange* unserer Körperschaft als anwesendes Mitglied angehört hat, treten mir lebhaft die Schwierigkeiten der Aufgabe vor Augen, die ganze Bedeutung der Schöpfungen eines Mannes darzustellen, welcher mit starker Hand in fast alle Gebiete einer durch zweitausendjährige Arbeit zu unermefslichem Umfange angewachsenen Wissenschaft eingegriffen, überall, wohin er seinen schöpferischen Geist gerichtet, wichtige, oft tief verborgene Wahrheiten zu Tage gefördert und, neue Grundgedanken in die Wissenschaft einführend, die mathematische Speculation in mehr als einer Richtung auf eine höhere Stufe erhoben hat. Nur die Überzeugung, dafs solchen der Wissenschaft und ihren Pflegern geleisteten Diensten gegenüber eine Pflicht der Dankbarkeit zu erfüllen ist, kann die Bedenken, welche das Bewufstsein meiner Unzulänglichkeit in mir hervorruft, zum Schweigen bringen: denn wem könnte die Erfüllung dieser Pflicht mehr obliegen, als mir, der ich, wie alle meine Fachgenossen, durch *Jacobi's* wissenschaftliche Productionen so wesentlich gefördert, überdies eine nicht geringere Belehrung meinem vieljährigen, so nahem Verkehr mit dem grofsen Forscher verdanke.

Carl Gustav Jacob Jacobi wurde den 10. Dec. 1804 zu Potsdam geboren, wo sein Vater ein begüterter Kaufmann war. Die erste Unterweisung in den alten Sprachen und den Elementen der Mathematik erhielt er von seinem mütterlichen Oheim, Hrn. *Lehmann*, der den regsamen Knaben

*) Diese Gedächtnifsrede ist zugleich eine vortreffliche Abhandlung und eine tief eindringende Beurtheilung der *Jacobi*'schen mathematischen Arbeiten. Da nun die meisten dieser Arbeiten zuerst in dem gegenwärtigen Journale gedruckt sind, so findet sie auch in diesem recht eigentlich ihre Stelle. Die Königliche Akademie der Wissenschaften zu Berlin hat es auf die Bitte des Herausgebers gestattet, dafs der Abdruck der Gedächtnifsrede, nachdem der Herr Verfasser dem Herausgeber seine Erlaubnifs dazu ertheilt hatte, schon jetzt, obgleich seit ihrer ersten Bekanntmachung in den Denkschriften der Akademie noch nicht die regelmäfsigen 5 Jahre verflossen sind, hier aus denselben erfolge.

Der Herausg. d. Journ.

weniger zu unterrichten als zu lenken hatte, und unter dessen einsichtiger Leitung dieser so rasche Fortschritte machte, dafs er, noch nicht zwölf Jahr alt, in die zweite Classe des Potsdamer Gymnasiums und schon nach einem halben Jahre in die erste aufgenommen wurde. In dieser blieb er volle 4 Jahre, da er nicht füglich vor zurückgelegtem 16ten Jahre die Universität besuchen konnte. Der mathematische Unterricht, der ganz als Gedächtnifssache behandelt wurde, konnte dem jungen Primaner nicht zusagen. Sein Verhältnifs zum Lehrer war daher längere Zeit sehr unangenehm, gestaltete sich jedoch zuletzt besser, da der Lehrer einsichtig genug war, den ungewöhnlichen Schüler gewähren zu lassen, und es zu gestatten, dafs dieser sich mit *Euler's „Introductio"* beschäftigte, während die übrigen Schüler mühsam erlernte Elementarsätze hersagten. Wie weit *Jacobi's* geistige Entwicklung damals schon vorgeschritten war, zeigt der Versuch, den er um diese Zeit zur Auflösung der Gleichungen des 5ten Grades anstellte, und dessen er in einer seiner Abhandlungen später erwähnt hat.

An dieser Aufgabe hat mehr als einer von Denen, welche später einen grofsen Namen erlangt haben, zuerst seine Kräfte geübt; und man begreift in der That leicht, welchen Reiz gerade dieses Problem auf ein erwachendes Talent ausüben mufste, so lange die Unmöglichkeit desselben noch nicht erwiesen war. Zu der Berühmtheit, welche so viele fruchtlose Bemühungen dieser Untersuchung gegeben hatten, gesellte sich der besondere Umstand, dafs das Problem, als einem Gebiete angehörig, welches unmittelbar an die Elemente grenzt, ohne ein grofses Maafs von Vorkenntnissen zugänglich schien.

Auf der hiesigen Universität theilte *Jacobi* seine Zeit zwischen philosophischen, philologischen und mathematischen Studien. Als Theilnehmer an den Übungen des philologischen Seminars erregte er die Aufmerksamkeit unseres Collegen *Böckh*, des Vorstehers dieses Instituts, welcher den jungen Mann wegen seines scharfen und eigenthümlichen Geistes sehr lieb gewann und durch besonderes Wohlwollen auszeichnete.

Mathematische Vorlesungen scheint er wenig besucht zu haben, da diese damals auf der hiesigen Universität einen zu elementaren Character hatten, als dafs sie *Jacobi,* der schon mit einigen der Hauptwerke von *Euler* und *Lagrange* vertraut war, wesentlich hätten fördern können. Desto eifriger sah er sich in der mathematischen Literatur um, und suchte namentlich eine allgemeine Übersicht der grofsen wissenschaftlichen Schätze zu gewinnen, welche die akademischen Sammlungen enthalten. *Jacobi,* dessen Natur das

blofse Einsammeln von Kenntnissen nicht zusagte und der das Bedürfnifs fühlte, der Dinge, womit er sich beschäftigte, ganz Herr zu werden, erkannte nach etwa zweijährigen Universitätsstudien die Nothwendigkeit einen Entschlufs zu fassen, und entweder der Philologie, oder der Mathematik zu entsagen. Da die Entscheidung, welche er traf, nicht nur für ihn, sondern auch für die Wissenschaft, welcher er sich von nun an ausschliefslich widmete, so wichtige Folgen gehabt hat, so wird man die Gründe, welche seine Wahl bestimmten, gern von ihm selbst erfahren. Er schreibt darüber an seinen schon genannten Oheim: „Indem ich so doch einige Zeit mich ernstlich mit der Philologie beschäftigte, gelang es mir, einen Blick wenigstens zu thun in die innere Herrlichkeit des alten hellenischen Lebens, so dafs ich wenigstens nicht ohne Kampf dessen weitere Erforschung aufgeben konnte. Denn aufgeben mufs ich sie für jetzt ganz. Der ungeheure Kolofs den die Arbeiten eines *Euler, Lagrange, Laplace* hervorgerufen haben, erfordert die ungeheuerste Kraft und Anstrengung des Nachdenkens, wenn man in seine innere Natur eindringen will, und nicht blofs äufserlich daran herumkramen. Über diesen Meister zu werden, dafs man nicht jeden Augenblick fürchten mufs von ihm erdrückt zu werden, treibt ein Drang, der nicht rasten und ruhen läfst, bis man oben steht und das ganze Werk übersehen kann. Dann ist es auch erst möglich mit Ruhe an der Vervollkommnung seiner einzelnen Theile recht zu arbeiten und das ganze, grofse Werk nach Kräften weiter zu führen, wenn man seinen Geist erfafst hat."

Zu seiner Doctordissertation wählte *Jacobi* einen schon vielfach behandelten Gegenstand, die Zerlegung der algebraischen Brüche. Er beweiset darin zuerst merkwürdige Formeln, welche *Lagrange* ohne Beweis in den Abhandlungen unserer Akademie gegeben hatte, geht dann zu einer neuen Art der Zerlegung über, welche nicht, wie die bis dahin ausschliefslich betrachtete, völlig bestimmt ist, und beschliefst die Abhandlung mit Untersuchungen über die Umformung der Reihen; wobei schon ein neues Princip bemerklich wird, von welchem er in späteren Arbeiten mehrfach Gebrauch gemacht hat.

Gleich nach seiner Promotion habilitirte sich *Jacobi* bei der Universität und hielt eine Vorlesung über die Theorie der krummen Flächen und Curven im Raume. Nach dem Zeugnifs eines seiner damaligen Zuhörer mufs sein Lehrtalent bei diesem ersten Auftreten schon sehr entwickelt gewesen sein und er es verstanden haben, sein Thema mit grofser Klarheit und auf eine seine Zuhörer sehr anregende Weise zu behandeln. Der 21jährige Docent

zeigte auch darin eine sehr frühe Reife des Urtheils, dafs er, unbeirrt durch den Mifscredit, in welchen die Methode des Unendlichkleinen um jene Zeit durch eine grofse Autorität gekommen war, gerade dieser in seiner Darstellung folgte und seine Zuhörer mit dem besten Erfolge zu überzeugen sich bemühte, dafs die verdächtigte Methode nur in ihrer abgekürzten Form von der strengen Methode der Alten unterschieden ist, aber gerade durch diese Form bei allen zusammengesetzten Fragen unentbehrlich wird.

Die Aufmerksamkeit, welche *Jacobi* zu erregen anfing, veranlafste die höchste Unterrichtsbehörde, ihn aufzufordern, seine Lehrthätigkeit vorläufig als Privatdocent in Königsberg fortzusetzen, wo durch die eben vacant gewordene Professur der Mathematik sich zu seiner Beförderung mehr Aussichten als in Berlin darboten.

Bei seiner Übersiedelung nach Königsberg war es für *Jacobi* ein wichtiges Ereignifs, den grofsen Astronomen *Bessel* persönlich kennen zu lernen, und zum ersten Male in einem, dem seinigen so nahe verwandten Fache ein Genie in der Nähe zu sehen. Die tägliche Anschauung des Feuereifers dieses aufserordentlichen Mannes übte selbst auf ihn, der es doch von seiner frühsten Jugend an gewohnt war, die gröfsten Anstrengungen von sich zu fordern, den mächtigsten Einflufs; dessen er später oft dankbar erwähnt hat.

Es war für *Jacobi's* schriftstellerische Laufbahn ein glücklicher Umstand, dafs der Anfang derselben mit der Gründung der mathematischen Zeitschrift zusammenfiel, durch deren Herausgabe sich unser College *Crelle* ein so grofses und bleibendes Verdienst, nicht nur um die Verbreitung, sondern auch um die Belebung des Studiums der Wissenschaft erworben hat. *Jacobi,* der zu den frühesten Mitarbeitern der Zeitschrift gehörte, ist ihr bis zu seinem Tode treu geblieben; und wenn man die beiden besondern Werke „Fund. nova" und „Canon arith." ausnimmt, so sind fast alle seine andern Arbeiten zuerst im Crelleschen Journal erschienen.

Jacobi's erste Abhandlungen zeigen ihn schon als durchaus vollendeten Mathematiker, mag er nun, wie in den Aufsätzen „über *Gaufs* neue Methode zur genährten Bestimmung der Integrale" und „über die *Pfaff*sche Methode für die Integration der partiellen Differentialgleichungen", bekannte Theorieen aus einem neuen Gesichtspuncte betrachten und wesentlich vereinfachen, oder noch nicht gelösete Probleme behandeln und zu neuen Resultaten gelangen. Unter den Arbeiten der letzteren Art sind hier zwei besonders zu erwähnen: eine Abhandlung von wenigen Seiten, in der er eine bis dahin unbekannt ge-

bliebene Grund-Eigenschaft der merkwürdigen Function kennen lehrt, welche, von *Legendre* zuerst in die Wissenschaft eingeführt, in allen spätern allgemeinen Untersuchungen über die Anziehung eine so grofse Rolle gespielt hat; und eine andere „über die cubischen Reste." Diese letztere enthält zwar nur Sätze ohne Beweise, aber diese Sätze sind der Art, dafs sie nicht das Ergebnifs der Induction sein können, und keinen Zweifel darüber lassen, dafs *Jacobi* schon damals in dem wissenschaftlichen Gebiete, welches *Gaufs* ein Virteljahrhundert früher der mathematischen Speculation eröffnet hatte und welches eben so sehr der höheren Algebra als der Theorie der Zahlen angehört, im Besitze neuer, fruchtbarer Principien sein mufste; was auch durch eine spätere Publication bestätigt wird, in der er ausdrücklich erwähnt, dafs er diese Principien schon damals *Gaufs* brieflich mitgetheilt habe.

Von der weitern Verfolgung dieses Gegenstandes wurde *Jacobi* zu jener Zeit durch eine andere Arbeit, seine Untersuchungen über die elliptischen Functionen abgezogen, welche ihm bald eine so grofse Berühmtheit verleihen und eine Stelle unter den ersten Mathematikern der Zeit anweisen sollten.

Der junge Mathematiker, der sich schon in so vielen Richtungen mit Erfolg versucht hatte, schien längere Zeit in der Theorie der elliptischen Functionen vom Glücke nicht begünstigt zu werden. Einer seiner Freunde, der ihn eines Tages auffallend verstimmt fand, erhielt auf die Frage nach dem Grunde dieser Verstimmung von ihm die Antwort: Sie sehen mich eben im Begriff, dieses Buch (*Legendre's* Exercices etc.) auf die Bibliothek zurückzuschicken, mit welchem ich entschiedenes Unglück habe. Wenn ich sonst ein bedeutendes Werk studirt habe, hat es mich immer zu eigenen Gedanken angeregt und ist dabei immer etwas für mich abgefallen. Diesmal bin ich ganz leer ausgegangen und nicht zum geringsten Einfalle inspirirt worden.

Wenn die eignen Gedanken in diesem Fall etwas lange auf sich warten liefsen, so stellten sie sich dafür später um so reichlicher ein: so reichlich, dafs sie, in Verbindung mit den gleichzeitigen Gedanken *Abel's*, eine unerwartete Erweiterung und die völlige Umgestaltung eines der wichtigsten Zweige der Analysis zur Folge hatten.

Indem der Fortschritt hier zu derselben Zeit von zwei verschiedenen Seiten ausging, wird es erforderlich, neben *Jacobi's* Untersuchungen, der gleichzeitigen Arbeiten *Abel's* zu erwähnen. Im Ursprunge von einander unabhängig, greifen die Entdeckungen beider später so in einander ein, dafs die

Darstellung der einen ohne Berücksichtigung der andern kaum verständlich sein würde.

Die Theorie der elliptischen Functionen, mit welcher *Abel's* und *Jacobi's* Namen auf immer verbunden sind, reicht in ihren Anfängen nicht über die Mitte des vorigen Jahrhunderts zurück. Ein italienischer Mathematiker von ungewöhnlichem Scharfsinn, der Graf *Fagnano* aus dem Kirchenstaate, machte die merkwürdige Entdeckung, dafs das Integral welches den Bogen der Curve ausdrückt, welche damals die Mathematiker unter dem Namen Lemniscate vielfach beschäftigte, ähnliche Eigenschaften besitzt wie das einfachere Integral welches einen Kreisbogen darstellt, und dafs z. B. zwischen den Grenzen zweier Integrale dieser Art, deren eines dem doppelten Werthe des andern gleich ist, ein einfacher algebraischer Zusammenhang Statt findet, so dafs ein Lemniscatenbogen, wenn gleich eine Transcendente höherer Art, doch wie ein Kreisbogen durch geometrische Construction verdoppelt oder gehälftet werden kann. *Euler* fand einige Jahre später die eigentliche Quelle dieser und anderer ähnlicher Eigenschaften, in einem Satze, der zu den schönsten Bereicherungen gehört, welche die Wissenschaft diesem grofsen Forscher verdankt. Nach diesem *Euler*schen Satze hängt ein gewisses Integral, welches allgemeiner ist als das von *Fagnano* betrachtete und in unserer jetzigen Terminologie elliptisches Integral der ersten Gattung heifst, so von seiner Grenze ab, dafs zwei solche Integrale mit beliebigen Grenzen immer in ein drittes vereinigt werden können, dessen Grenzen eine einfache algebraische Verbindung der Grenzen jener ist; gerade so wie der Sinus eines zweitheiligen Bogens algebraisch aus den Sinus seiner Bestandtheile gebildet werden kann. Aber das elliptische Integral ist allgemeiner als dasjenige, welches einen Kreisbogen ausdrückt. Auf die einfachste Form gebracht, hängt es nicht wie dieses blofs von seiner Grenze, sondern auch von einer andern in der Function enthaltenen Gröfse, dem sogenannten Modul ab. Das *Euler*sche Theorem ergab nur Beziehungen zwischen Integralen mit demselben Modul. Das erste Beispiel eines Zusammenhanges zwischen Integralen die sich durch ihre Moduln unterscheiden, bot eine spätere, von *Landen* und in etwas anderer Form von *Lagrange* gemachte Entdeckung dar, nach welcher ein elliptisches Integral durch eine einfache algebraische Substitution in ein anderes Integral derselben Art verwandelt werden kann.

Es ist *Legendre's* unvergänglicher Ruhm, in den eben erwähnten Entdeckungen die Keime eines wichtigen Zweiges der Analysis erkannt und

durch die Arbeit eines halben Lebens auf diesen Grundlagen eine selbständige Theorie errichtet zu haben, welche alle Integrale umfafst, in denen keine andere Irrationalität enthalten ist als eine Quadratwurzel, unter welcher die Veränderliche den 4ten Grad nicht übersteigt. Schon *Euler* hatte bemerkt, mit welchen Modificationen sein Satz auf solche Integrale ausgedehnt werden kann; *Legendre,* indem er von dem glücklichen Gedanken ausging, alle diese Integrale auf feste canonische Formen zurückzuführen, gelangte zu der für die Ausbildung der Theorie so wichtig gewordenen Erkenntnifs, dafs sie in drei wesentlich verschiedene Gattungen zerfallen. Indem er dann jede Gattung einer sorgfältigen Untersuchung unterwarf, entdeckte er viele ihrer wichtigsten Eigenschaften, von welchen namentlich die, welche der dritten Gattung zukommen, sehr verborgen und ungemein schwer zugänglich waren. Nur durch die ausdauernste Beharrlichkeit, die den grofsen Mathematiker immer von neuem auf den Gegenstand zurückkommen liefs, gelang es ihm hier, Schwierigkeiten zu besiegen, welche mit den Hülfsmitteln, die ihm zu Gebote standen, kaum überwindlich scheinen mufsten.

Die Theorie, wie *Abel* und *Jacobi* sie vorfanden, bot mehrere höchst räthselhafte Erscheinungen dar, zu deren Aufklärung die damals bekannten Principien nicht ausreichten. So hatte man, um nur einer dieser Erscheinungen zu erwähnen, gefunden, dafs der Grad der mit Hülfe des *Euler*schen Satzes gebildeten Gleichung, von deren Lösung die Theilung des elliptischen Integrals abhängt, nicht wie in der analogen Frage der Kreistheilung, der Anzahl der Theile, sondern dem Quadrate dieser Anzahl gleich ist. Die Bedeutung der reellen Wurzeln, deren Anzahl mit jener übereinstimmt, war leicht ersichtlich, wogegen die zahlreichern imaginären ganz unerklärlich erscheinen mufsten. Aber dafs hier ein Geheimnifs verborgen liege, darüber hatte man vor *Abel* und *Jacobi* kein Bewufstsein; und ihnen war es vorbehalten, sich zuerst über diese und ähnliche Erscheinungen zu wundern; was in der Mathematik, wie in anderen Gebieten, oft schon eine halbe Entdeckung ist.

Obgleich die Umgestaltung der Theorie der elliptischen Functionen, welche man *Abel* und *Jacobi* verdankt, aus dem Zusammenwirken mehrerer sich gegenseitig unterstützender Gedanken hervorgegangen ist, so scheint doch zweien dieser Gedanken die gröfste Wichtigkeit zugeschrieben werden zu müssen, weil sie alle Theile der neuen Theorie innig durchdringen. Während die früheren Bearbeiter dieses Gegenstandes das elliptische Integral der

ersten Gattung als eine Function seiner Grenze ansahen, erkannten ***Abel*** und ***Jacobi,*** unabhängig von einander, wenn auch der erstere einige Monate früher, die Nothwendigkeit, die Betrachtungsweise umzukehren, und die Grenze, nebst zwei einfachen von ihr abhängigen Gröfsen, die so unzertrennlich mit ihr verbunden sind wie der Sinus zum Cosinus gehört, als Functionen des Integrals zu behandeln; gerade wie man schon früher zur Erkenntnifs der wichtigsten Eigenschaften der vom Kreise abhängigen Transcendenten gelangt war, indem man den Sinus und Cosinus als Functionen des Bogens, und nicht diesen als eine Function von jenen betrachtete.

Ein zweiter, ***Abel*** und ***Jacobi*** gemeinsamer Gedanke, der Gedanke das Imaginäre in diese Theorie einzuführen, war von noch gröfserer Bedeutung; und ***Jacobi*** hat es später oft wiederholt, dafs die Einführung des Imaginären allein alle Räthsel der früheren Theorie gelöset habe. Wäre es nicht eine so alte Erfahrung, dafs das nahe Liegende sich fast immer zuletzt darbietet, so würde man es auffallend finden müssen, dafs dieser Gedanke ***Euler*** entgangen ist, zu dessen frühesten und schönsten Leistungen es gehört, die Theorie der Kreisfunctionen, indem er diese als imaginäre Exponentialgröfsen behandelte, in solchem Grade vereinfacht und erweitert zu haben, dafs fast das ganze Gebiet der Analysis eine wesentliche Umgestaltung dadurch erfuhr.

Indem ***Abel*** und ***Jacobi*** in die vorhin erwähnten, durch Umkehrung aus dem elliptischen Integral der ersten Gattung gebildeten Functionen, welche nach unserer jetzigen Terminologie ausschliefslich elliptische Functionen genannt werden, das Imaginäre einführten, erkannten sie, dafs diese Functionen gleichzeitig an der Natur der Kreisfunctionen und an der der Exponentialgröfsen Theil haben, und dafs, während jene nur für reelle, diese nur für imaginäre Werthe des Arguments periodisch sind, die elliptischen Functionen beide Arten der Periodicität in sich vereinigen.

Durch den Besitz dieser Grundgedanken auf einen neuen Boden gestellt, richteten ***Abel*** und ***Jacobi*** ihre Untersuchungen auf zwei verschiedene Regionen der Theorie. ***Abel's*** Thätigkeit wandte sich den Problemen zu, welche die Vervielfältigung und Theilung der elliptischen Integrale betreffen; und indem er mit Hülfe des Princips der doppelten Periode in die Natur der Wurzeln der Gleichung von welcher die Theilung abhängt, tief eindrang, gelangte er zu der ganz unerwarteten Entdeckung, dafs die allgemeine Theilung des elliptischen Integrals mit beliebiger Grenze immer algebraisch, d. h. durch blofse Wurzel-Ausziehung bewerkstelligt werden kann, sobald die besondere

Theilung der sogenannten vollständigen Integrale als schon ausgeführt vorausgesetzt wird. Die eben genannte besondere Theilung scheint nur für specielle Moduln möglich, unter welchen derjenige der einfachste ist, dem die Lemniscate entspricht. Indem er die Lösung des Problems für diesen Fall durchführte zeigte er dafs die Theilung der ganzen Lemniscate der Kreistheilung völlig analog ist und in denselben Fällen durch geometrische Construction geleistet werden kann, in welchen, nach der schönen, 25 Jahre früher von *Gaufs* gegebenen Theorie, der Kreis eine solche Theilung zuläfst.

An diese letztere Arbeit *Abel's* knüpft sich eine erwähnenswerthe historische Merkwürdigkeit. In der Einleitung zum letzten Abschnitte der *„Disq. arith."*, welcher der Kreistheilung gewidmet ist, hatte *Gaufs* im Vorbeigehen bemerkt, dafs dasselbe Princip, worauf seine Kreistheilung beruht, auch auf die Theilung der Lemniscate anwendbar sei; und in der That liegt das *Gaufs*ische Princip, nach welchem die Wurzeln der zu lösenden Gleichung so in einen Cyclus zu bringen sind, dafs jede von der vorhergehenden auf dieselbe Weise abhängt, der Abhandlung *Abel's* über die Theilung der Lemniscate wesentlich zu Grunde. Wenn aber für die Kreistheilung längst bekannte Eigenschaften der trigonometrischen Functionen genügten, um die Wurzeln dem *Gaufs*ischen Principe gemäfs zu ordnen, so war für den Fall der Lemniscate, zu einer ähnlichen Anordnung, ja um nur die Möglichkeit einer solchen zu erkennen, eine Einsicht in die Natur der Wurzeln erforderlich, welche nur das Princip der doppelten Periodicität gewähren konnte. Die vorhin erwähnte Äufserung ist also durch *Abel's* Abhandlung zu einem unwidersprechlichen Zeugnisse geworden, dafs *Gaufs*, seiner Zeit weit vorauseilend, schon zu Anfange des Jahrhunderts das Princip der doppelten Periode erkannt hatte. Dieses Zeugnifs ist jedoch erst durch die spätere Arbeit *Abel's* verständlich geworden, und thut daher seinem und *Jacobi's* Anrecht an diese Erfindung keinen Abbruch.

Aufser den schon erwähnten, auf die Theilung bezüglichen Resultaten hatten *Abel's* Untersuchungen noch eine andere, nicht weniger wichtige Entdeckung zur Folge. Indem er in den Formeln, durch welche er die elliptischen Functionen eines vielfachen Arguments durch die Functionen des einfachen dargestellt hatte, den Multiplicator unendlich werden liefs, erhielt er merkwürdige Ausdrücke für die elliptischen Functionen in Form von unendlichen Reihen, so wie von Quotienten unendlicher Producte: eine Entdeckung welche für die Analysis vielleicht von noch gröfserer Bedeutung ist als die

von *Abel* nachgewiesene algebraische Lösbarkeit der Gleichungen für die Theilung.

Zu derselben Zeit, als *Abel* diese schönen Untersuchungen ausführte, war *Jacobi* in einem andern Theile desselben Gebietes nicht weniger erfolgreich beschäftigt. Die oben erwähnte Substitution, durch welche ein elliptisches Integral in ein Integral von derselben Form übergeht, war bis dahin die einzige ihrer Art. Zwar hatte *Legendre,* nicht lange vor der Zeit wo *Jacobi* sich diesem Gegenstande zuwandte, eine zweite Transformation der elliptischen Integrale aufgefunden, aber diese zweite Transformation, mit welcher er den Gegenstand für abgeschlossen hielt, war damals in Deutschland noch nicht bekannt, und es gehörte daher ein seltener Scharfsinn dazu, aus *einem* sichtbaren Ringe auf das Vorhandensein einer unendlichen Kette zu schliefsen, und eine eben so grofse Kühnheit, sich die Erkenntnifs der Natur dieser Kette als Aufgabe zu stellen.

Eine glückliche Induction, bei welcher der feine und ganz neue Gedanke eine wesentliche Rolle spielte, die Transformation und die Multiplication aus einem gemeinschaftlichen Gesichtspuncte und letztere als einen speciellen Fall der erstern zu betrachten, leitete *Jacobi* auf die Vermuthung, dafs rationale Functionen jedes Grades geeignet seien, ein elliptisches Integral in ein Integral von derselben Form zu verwandeln. Diese Vermuthung bestätigte sich sogleich, indem sich ergab, dafs die Anzahl der willkührlichen Coëfficienten, über welche man für jeden Grad zu verfügen hatte, ausreichte, um allen Bedingungen zu genügen, welche zu erfüllen waren, wenn das transformirte Integral der Form nach mit dem ursprünglichen übereinstimmen sollte. Aber wenn auch eine so einfache Betrachtungsweise über die Möglichkeit der Sache kaum einen Zweifel lassen konnte, so war noch ein grofser Schritt zu thun, um die innere analytische Natur der zur Transformation geeigneten gebrochenen Ausdrücke zu erkennen. Von welcher Art die hierbei zu besiegenden Schwierigkeiten waren, und durch welche geistreiche Betrachtungen *Jacobi* diese überwand, kann hier nicht ausgeführt werden; eben so wenig als es mir gestattet ist, alle wichtige Folgerungen aufzuzählen, die sich aus dem vollständig gelöseten Problem ergaben. Ich erwähne nur des merkwürdigen Ergebnisses dieser Untersuchung: dafs die Multiplication immer aus zwei Transformationen zusammengesetzt werden kann.

Indem *Abel* und *Jacobi* so die Theorie gleichzeitig in zwei verschiedenen Richtungen vervollkommneten, schien es als habe das Schicksal die

Ehre des zu vollbringenden Fortschritts gleichmäfsig unter die jungen Wettkämpfer vertheilen wollen; denn die Art, wie bald darauf Einer die Erfindung des Andern weiterführte, liefs keinen Zweifel, dafs jeder von ihnen, wäre ihm der andere nicht in einem Theile der Arbeit zuvorgekommen, den ganzen Fortschritt allein vollbracht haben würde.

Jacobi war in seinen Untersuchungen von der Annahme ausgegangen, dafs bei der Transformation die ursprüngliche Variable rational durch die neue ausgedrückt sei. *Abel* behandelte das Problem in der weitern Voraussetzung, dafs zwischen beiden irgend eine algebraische Gleichung Statt finde, und gelangte zu dem Resultate, dafs das so verallgemeinerte Problem immer auf den Fall zurückgeführt werden kann, den *Jacobi* so vollständig behandelt hatte.

Nicht minder erfolgreich griff *Jacobi* in die von *Abel* gegebene Theorie der allgemeinen Theilung ein. Die Art, wie *Abel* das Problem gelöset hatte, zeigte zwar, dafs die Wurzeln immer algebraisch ausdrückbar sind, erforderte aber zur wirklichen Darstellung derselben die Bildung von gewissen symmetrischen Wurzelverbindungen, die nur in jedem besondern Falle bewerkstelligt werden konnte. Aus einem neuen Principe, welches bald näher zu erwähnen sein wird, leitete *Jacobi* die schliefslichen, für jeden Grad geltenden und unmittelbar aus den Daten des Problems gebildeten Ausdrücke der Wurzeln ab; welche Ausdrücke überdies vor den *Abel*schen eine gröfsere Einfachheit ihrer Form voraus haben. Als *Jacobi* das Resultat dieser Arbeit in einer kurzen Notiz bekannt machte, hoffte er *Abel* durch die Vervollkommnung der Lösung des Theilproblems in Verwunderung zu setzen; aber diese Hoffnung blieb unerfüllt. — *Abel* war eben gestorben, kaum 27 Jahre alt, weniger als zwei Jahre nach der Bekanntmachung seiner ersten Arbeiten über die elliptischen Functionen. Ein so frühes Ziel hatte der Tod der glänzenden Laufbahn dieses tiefsinnigen und umfassenden Geistes gesetzt.

Jacobi's weitere Untersuchungen über die elliptischen Transcendenten, wie auch die zuletzt erwähnte, sind aus einem Gedanken hervorgegangen, dem man wegen der Folgen, die er gehabt, vielleicht die erste Stelle unter seinen Conceptionen einräumen mufs. Es war dies der Gedanke, die unendlichen Producte, durch deren Quotienten *Abel* die elliptischen Functionen ausgedrückt hatte, als selbständige Transcendenten in die Analysis einzuführen. Als es ihm gelungen war, diese Producte, die übrigens alle von derselben Natur und als besondere Fälle *einer* Transcendente anzusehen sind, in Reihenform darzustellen, erkannte er eine Function, welche sich französischen

Mathematikern schon in Untersuchungen der mathematischen Physik dargeboten hatte; wo sie aber wenig beachtet und nur eine ihrer Eigenschaften bemerkt worden war. *Jacobi* unterwarf sie einer tief eindringenden Untersuchung, erforschte ihre analytische Natur und führte sie dann in die Theorie der Integrale der 2ten und 3ten Gattung ein; was nicht nur die Erkenntnifs des innern Zusammenhanges schon bekannter, isolirt stehender Eigenschaften dieser Integrale, sondern auch die wichtige Entdeckung zur Folge hatte, dafs die Integrale der dritten Gattung, welche von drei Elementen abhangen, vermittels der neuen Transcendente, welche deren nur zwei enthält, ausgedrückt werden können.

Bei der spätern Darstellung der ganzen Theorie, wie *Jacobi* sie in seinen Vorlesungen zu geben pflegte, bildet die Betrachtung der erwähnten Function den Ausgangspunct. Die ganze Lehre gewinnt dadurch nicht nur einen überraschenden Grad von Einfachheit und Durchsichtigkeit, sondern dieser umgekehrte Gang ist auch dadurch bemerkenswerth, dafs er für andere, später zu erwähnende Untersuchungen das Vorbild geworden ist.

Bedenkt man, dafs die neue Function jetzt das ganze Gebiet der elliptischen Transcendenten beherrscht, dafs *Jacobi* aus ihren Eigenschaften wichtige Theoreme der höhern Arithmetik abgeleitet hat, und dafs sie eine wesentliche Rolle in vielen Anwendungen spielt, von welchen hier nur die vermittels dieser Transcendente gegebene Darstellung der Rotationsbewegung erwähnt werden mag, welche eine von *Jacobi's* letzten und schönsten Arbeiten ist, so wird man dieser Function die nächste Stelle nach den längst in die Wissenschaft aufgenommenen Elementartranscendenten einräumen müssen. Auffallender Weise hat eine so wichtige Function noch keinen andern Namen, als den der Transcendente Θ, nach der zufälligen Bezeichnung, mit der sie zuerst bei *Jacobi* erscheint; und die Mathematiker würden nur eine Pflicht der Dankbarkeit erfüllen, wenn sie sich vereinigten, ihr *Jacobi's* Namen beizulegen, um das Andenken des Mannes zu ehren, zu dessen schönsten Entdeckungen es gehört, die innere Natur und hohe Bedeutung dieser Transcendente zuerst erkannt zu haben.

Abel's oben erwähnte Arbeiten sind nicht die einzige Leistung ersten Ranges dieses hervorragenden Mathematikers; sie sind nicht einmal die bedeutendste seiner Leistungen. Seine gröfste Entdeckung hat er in einem Satze niedergelegt, welcher seinen Namen führt und ganz das Gepräge seines aufserordentlichen Geistes trägt, dessen characteristische Eigenschaft

es war, die Fragen der Wissenschaft in der umfassendsten Allgemeinheit zu behandeln.

Das schon oben bezeichnete *Euler*sche Theorem — ich rede hier von demselben als Princip, nicht von den daraus gezogenen Folgerungen, die sich täglich weiter erstreckten — bildete damals auf dem Gebiete, dem es angehört, die Grenze der Wissenschaft, über welche hinauszugehen *Euler* selbst, *Lagrange* und andere Vorgänger *Abel's,* sich vergebens bemüht hatten. Welche Bewunderung mufste daher eine Entdeckung hervorrufen, welche, die Integrale aller algebraischen Functionen umfassend, die Grundeigenschaft derselben enthüllte.

Legendre nennt das *Abel*sche Theorem ein *monumentum aere perennius,* und *Jacobi* bezeichnet denselben Satz, „wie er in einfacher Gestalt und ohne Apparat von Calcul den tiefsten und umfassendsten mathematischen Gedanken ausspreche, als die gröfste mathematische Entdeckung unserer Zeit, obgleich erst eine künftige, vielleicht späte grofse Arbeit ihre ganze Bedeutung aufweisen könne."

Diese Arbeit hat bereits begonnen, und *Jacobi* selbst hat daran den wesentlichsten Antheil gehabt.

Der nahe liegende Versuch, die umgekehrten Functionen der *Abel*schen Integrale auf dieselbe Weise, wie es bei den elliptischen mit so grofsem Erfolge geschehen war, in die Analysis einzuführen, erwies sich bald als unausführbar, und verwickelte in unauflöslichen Widerspruch; denn *Jacobi* erkannte sogleich, dafs diese umgekehrten Functionen vier- oder mehrfach periodisch sein müfsten, während doch eine analytische Function, wenn sie wie die elliptischen und Kreisfunctionen einwerthig, und wo sie nicht unendlich wird, stetig sein soll, nur zwei Perioden zuläfst. Es bedurfte also hier eines neuen, verborgenen Gedankens, wenn das *Abel*sche Theorem nicht unfruchtbar bleiben, wenn es die Basis einer grofsen analytischen Theorie werden sollte.

Nachdem *Jacobi* mehrere Jahre hindurch den Gegenstand nach allen Seiten erwogen hatte, fand er endlich die Lösung des Räthsels darin, dafs hier gleichzeitig vier oder mehr Integrale zu betrachten und aus ihnen durch Umkehrung zwei oder mehr Functionen von eben so vielen Argumenten zu bilden sind. Diese Divination machte er in einer Abhandlung von 10 Seiten bekannt, der zwei Jahre später eine umfangreichere folgte, in welcher die analytische Natur dieser umgekehrten Function im hellsten Lichte erschien.

Gehört auch die später gefundene Darstellung dieser Functionen nicht *Jacobi*, sondern zwei jüngern Mathematikern von ungewöhnlichem Talente, so mufs ich doch auch dieses wichtigen Fortschrittes hier insofern erwähnen, als *Jacobi's* Einflufs unverkennbar darin hervortritt. *Goepel* und *Rosenhain* haben beide, *Jacobi's* oben erwähnte zweite Behandlung der Theorie der elliptischen Functionen zum Vorbilde nehmend, ihren schönen Arbeiten die Betrachtung von unendlichen Reihen zu Grunde gelegt, deren Bildungsgesetz allgemeiner, aber von derselben Art wie das der Reihe ist, durch welche die *Jacobi*sche Function ausgedrückt wird.

Obgleich ich mich bei der eben gegebenen Darstellung von *Jacobi's* Entdeckungen im Gebiete der elliptischen und *Abel*schen Transcendenten auf das Wesentlichste beschränkt habe, so ist dieselbe dennoch zu einem Umfange angewachsen, der mich zwingt, die noch zu erwähnenden Leistungen *Jacobi's* hier in eine kurze Übersicht zusammenzufassen, aus welcher ich viele Arbeiten, welche nur einzelne Fragen betreffen und das Detail der Wissenschaft vervollkommnet haben, ausschliefsen mufs.

Schon oben ist von *Jacobi's* Untersuchungen über die Kreistheilung und die Anwendungen derselben auf die höhere Arithmetik, als zu seinen frühesten Arbeiten gehörend, die Rede gewesen. Bei diesen Untersuchungen, denen er die Form zum Grunde legte, welche die zuerst von *Gaufs* gegebene Auflösung der zweigliedrigen Gleichungen später durch *Lagrange* erhalten hatte, traf er in einigen Resultaten mit dem grofsen Mathematiker *Cauchy* zusammen, der zu derselben Zeit mit ähnlichen Forschungen beschäftigt war und dieses Umstandes erwähnte, als er während *Jacobi's* ersten Aufenthalts in Paris seine Arbeiten im Auszuge veröffentlichte.

Aus einem schönen, aus der Kreistheilung abgeleiteten Satze, auf den auch *Cauchy* gekommen war und nach welchem alle Primzahlen, die bei der Division durch eine gegebene Primzahl oder das Vierfache derselben die Einheit zum Reste lassen, auf eine bestimmte Potenz erhoben, deren Exponent blofs von der letzteren Primzahl abhängt, durch die sogenannte quadratische Hauptform dargestellt werden, welche die negativ genommene gegebene Primzahl zur Determinante hat, schöpfte *Jacobi* die Vermuthung, dafs jener Exponent mit der Anzahl der von einander verschiedenen quadratischen Formen übereinstimmen müsse, welche der erwähnten Determinante entsprechen. Da sich diese Vermuthung in allen numerischen Beispielen bestätigte, so trug er kein Bedenken, diese Bemerkung in einer kurzen Notiz zu veröffentlichen.

Ich glaube den bisher unbekannt gebliebenen Ursprung dieses Resultats nach *Jacobi's* mündlicher Mittheilung als ein merkwürdiges Beispiel scharfsinniger Induction hier erwähnen zu müssen, obgleich der strenge Beweis desselben nicht auf die Kreistheilung gegründet werden zu können, sondern wesentlich verschiedene, der Integralrechnung und der Reihenlehre entnommene Principien zu erfordern scheint, die erst später in die Wissenschaft eingeführt worden sind.

Die im Jahre 1832 erschienene zweite Abhandlung von *Gaufs* über die biquadratischen Reste, die durch den tiefsinnigen Gedanken, complexe ganze Zahlen in der höhern Arithmetik gerade so wie reelle zu behandeln, und durch das darin aufgestellte Reciprocitätsgesetz Epoche macht, welches in der Theorie der biquadratischen Reste zwischen zwei complexen Primzahlen Statt findet, gab *Jacobi* Veranlassung, seine frühern Untersuchungen wieder aufzunehmen; und es gelang ihm, den erwähnten schönen Satz von *Gaufs* und einen ähnlichen, welcher sich auf die cubischen Reste bezieht, mit grofser Einfachheit aus der Kreistheilung abzuleiten.

Obgleich *Jacobi* die eben angeführten Untersuchungen und andere damit zusammenhängende, die ich nicht einmal andeutungsweise bezeichnen kann, in den Jahren 1836-39 vollständig niedergeschrieben hat, so ist er doch nie dazu gekommen, sie durch den Druck zu veröffentlichen. Seine Zögerung entsprang aus dem Wunsche, einigen seiner Resultate eine gröfsere Ausdehnung zu geben; wozu er, von so vielen andern Arbeiten in Anspruch genommen, die nöthige Mufse nicht gefunden hat. Ein Theil seiner Forschungen, und namentlich die schon erwähnten Beweise der Reciprocitätssätze sind jedoch einigen deutschen Mathematikern durch Nachschriften der Vorlesungen bekannt geworden, welche er im Winter 1836-37 in Königsberg über die Kreistheilung und deren Anwendung auf die Theorie der Zahlen gehalten hat.

Eine andere höchst ergiebige Quelle für die höhere Arithmetik hat *Jacobi* in der Theorie der elliptischen Functionen entdeckt, aus welcher er schöne Sätze über die Anzahl der Zerlegungen einer Zahl in 2, 4, 6 und 8 Quadrate, so wie andere über solche Zahlen abgeleitet hat, welche gleichzeitig in mehreren quadratischen Formen enthalten sind. Diese wichtigen Bereicherungen der Wissenschaft sind eine Frucht der oben erwähnten Einführung der *Jacobi*schen Function in die Theorie der elliptischen Transcendenten.

Jacobi hat sich wiederholt mit der Reduction und Werthbestimmung doppelter und vielfacher Integrale beschäftigt. Ich erwähne hier besonders der einfachen Methode, durch welche er die Bestimmung der Oberfläche eines ungleichaxigen Ellipsoïds auf elliptische Integrale von der ersten und zweiten Gattung zurückführt; welche Zurückführung *Legendre*, zu dessen schönsten Leistungen sie gehört, nur mit Hülfe sehr verborgener Eigenschaften der Integrale der dritten Gattung gelungen war. In einer andern hierher gehörigen Abhandlung hat *Jacobi* das *Euler*sche Additionstheorem auf doppelte Integrale ausgedehnt, und bald darauf bemerkt, wie auch der *Abel*sche Satz einer ähnlichen Erweiterung fähig sei.

Von *Jacobi's* Arbeiten über das eben genannte Capitel der Integralrechnung ist nur ein Theil veröffentlicht worden. Eine grofse Abhandlung, welche die Attraction der Ellipsoïden zum Gegenstande hat, obgleich seit langer Zeit beinahe vollendet, ist bisher ungedruckt geblieben, und nur durch einige gelegentliche Notizen bekannt geworden. Als er sich mit dem erwähnten Problem beschäftigte, kam er auch auf den schönen, von *Poisson* um dieselbe Zeit gefundenen Satz, nach welchem die Anziehung, welche eine unendlich dünne, von zwei concentrischen, ähnlichen und ähnlich-liegenden ellipsoïdischen Flächen begrenzte Schale auf einen Punct im äufseren Raume ausübt, ohne Integralzeichen dargestellt werden kann. *Jacobi* hat dieses Umstandes nie öffentlich Erwähnung gethan, obgleich er sich dabei auf das Zeugnifs mehrerer Mathematiker hätte berufen können, denen er den Satz mitgetheilt hatte, ehe die erste Anzeige der *Poisson*schen Abhandlung erschienen war.

Mit den eben besprochenen Untersuchungen hängt eine andere Arbeit *Jacobi's* zusammen, die wegen ihres überraschenden Resultats hier nicht unerwähnt bleiben darf. *Maclaurin* hat bekanntlich zuerst gezeigt, dafs eine homogene flüssige Masse mit Beibehaltung ihrer äufsern Gestalt sich gleichförmig um eine feste Axe drehen kann, wenn diese Gestalt die eines Rotationsellipsoïds ist; und dieses schöne Resultat ist später von *d'Alembert* und *Laplace* durch den Nachweis vervollständigt worden, dafs jedem Werthe der Winkelgeschwindigkeit, wenn dieser unter einer gewissen Grenze liegt, zwei, und nur zwei solche Ellipsoïden entsprechen. *Lagrange* scheint zuerst an die Möglichkeit gedacht zu haben, dafs auch ein ungleichaxiges Ellipsoïd den Bedingungen der Permanenz genügen könne; wenigstens geht dieser grofse Mathematiker in seiner analytischen Mechanik bei Behandlung dieser Frage von Formeln aus, welche für ein beliebiges Ellipsoïd gelten. Indem er aber

so zu zwei zu erfüllenden Gleichungen gelangt, in welchen die beiden Äquatorialaxen auf eine symmetrische Weise enthalten sind, zieht er aus dieser Symmetrie den Schlufs, dafs jene Axen gleich sein *müssen,* während doch nur daraus folgt, dafs sie gleich sein *können,* wo dann beide Gleichungen in eine und mit der von ***Maclaurin*** zuerst aufgestellten und von ***d'Alembert*** und ***Laplace*** discutirten zusammenfallen.

Der Verfasser eines bekannten Lehrbuchs, der in der Darstellung dieses Gegenstandes ***Lagrange*** gefolgt ist, und den eben erwähnten übereilten Schlufs mit dem Worte „nothwendig" begleitet, erregte zuerst ***Jacobi's*** Verdacht, welcher bei genauerer Betrachtung jener zwei Gleichungen, zu seiner, und gewifs aller Mathematiker grofsen Überraschung bald fand, dafs auch ein ungleichaxiges Ellipsoïd den Bedingungen des Gleichgewichts genügen kann.

Der Veranlassung, welche ***Jacobi*** in seinen Untersuchungen über die Attraction der Ellipsoïden fand, sich mit den Flächen zweiten Grades zu beschäftigen, verdankt man die Kenntnifs mehrerer interessanter Eigenschaften, und einer höchst eleganten Erzeugungsweise dieser Flächen. Die mir gestellten Grenzen zwingen mich, mich auf diese Andeutung zu beschränken, und ***Jacobi's*** übrige, der Geometrie gewidmeten Arbeiten nur dem Gegenstand nach zu bezeichnen. Ich nenne daher nur die Abhandlung über ein Problem der Elementargeometrie, welches vor ihm nur in speciellen Fällen behandelt worden war, und dessen vollständige Lösung er aus der Theorie der elliptischen Transcendenten ableitet; seine Untersuchungen über die Anzahl der Doppeltangenten algebraischer Curven, und einige kleinere Aufsätze, in welchen er Sätze über die Krümmung der Flächen und kürzesten Linien mit grofser Einfachheit auf rein synthetischem Wege beweiset.

Zu ***Jacobi's*** wichtigsten Untersuchungen gehören diejenigen über die analytische Mechanik. ***Hamilton*** hatte die interessante Entdeckung gemacht, dafs die Integration der Differentialgleichungen der Mechanik sich immer auf die Lösung von zwei simultanen partiellen Differentialgleichungen zurückführen läfst; aber diese Entdeckung war, wie merkwürdig sie auch erscheinen mufste, völlig unfruchtbar geblieben, bis ***Jacobi*** sie von einer unnöthigen Complication befreite, indem er zeigte, dafs die zu findende Lösung nur einer der beiden partiellen Differentialgleichungen zu genügen braucht. Indem er vermittels der so vereinfachten Theorie, um nur eine der zahlreichen Anwendungen anzuführen, das noch ungelösete Problem behandelte, die geodätische Linie auf dem ungleichaxigen Ellipsoïd zu bestimmen, gelang es ihm, mit Hülfe eines

analytischen Instruments, welches sich schon früher in seinen Händen als sehr wirksam gezeigt hatte und jetzt unter dem Namen der elliptischen Coordinaten allgemein bekannt ist, die partielle Differentialgleichung zu integriren, und so die Gleichung der geodätischen Linie in Form einer Relation zwischen zwei *Abel*schen Integralen darzustellen. Diese *Jacobi*sche Entdeckung ist die Grundlage eines der schönsten Capitel der höhern Geometrie geworden, welches deutsche, französische und englische Mathematiker wetteifernd ausgebildet haben.

Durch den oben erwähnten Zusammenhang zwischen einem Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen und *einer* partiellen Differentialgleichung wurde er, die Sache in umgekehrter Ordnung betrachtend, zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen zurückgeführt, mit welcher er sich schon in einer seiner frühesten Abhandlungen über die *Pfaff*sche Methode beschäftigt hatte, und gelangte jetzt zu dem Resultate, dafs von der ganzen Reihe von Systemen, deren successive Integration *Pfaff* fordert, die Behandlung des ersten alle übrigen überflüssig macht, dafs also schon der erste Schritt der früheren Methode vollständig zum Ziele führt.

Einen ähnlichen Charakter hat die Vervollkommnung, welche die Variationsrechnung *Jacobi* verdankt. Während zur Existenz eines Maximum's oder Minimum's das Verschwinden der ersten Variation *nothwendig* ist, so ist diese Bedingung allein nicht *ausreichend,* und erst die Beschaffenheit der zweiten Variation entscheidet, ob ein Maximum, oder ein Minimum, oder keines von beiden stattfindet. Zufolge der Theorie, wie sie *Jacobi* vorfand, waren nach den Integrationen, die durch das Verschwinden der ersten Variation gefordert werden, neue Integrationen zu leisten, um die zweite Variation zu discutiren; *Jacobi* zeigte, dafs die ersteren die letzteren involviren, so dafs also auch hier die vollständige Lösung der Aufgabe bereits mit der Vollendung des ersten Schrittes gegeben ist.

Wenn es die immer mehr hervortretende Tendenz der neuern Analysis ist, Gedanken an die Stelle der Rechnung zu setzen, so giebt es doch gewisse Gebiete in denen die Rechnung ihr Recht behält. *Jacobi,* der jene Tendenz so wesentlich gefördert hat, leistete vermöge seiner Meisterschaft in der Technik auch in diesen Gebieten Bewundernswürdiges. Dahin gehören seine Ahandlungen über die Transformation homogener Functionen zweiten Grades; über Elimination; über die simultanen Werthe, welche einer Anzahl von algebraischen Gleichungen genügen; über die Umkehrung der Reihen, und über die Theorie der Determinanten. In dem letztgenannten Capitel ver-

dankt man ihm eine ausgebildete Theorie der von ihm mit dem Namen der Functional-Determinanten bezeichneten Ausdrücke. Indem er die Analogie dieser Ausdrücke mit den Differentialquotienten weit verfolgte, gelangte er zu einem allgemeinen Principe, welches er das Princip des letzten Multiplicators nannte, und welches bei fast allen, in den Anwendungen vorkommenden Integrationsproblemen die letzte Integration zu bewerkstelligen das Mittel giebt, indem es den dazu erforderlichen integrirenden Factor *a priori* angiebt.

Der Einflufs welchen *Jacobi* auf die Fortschritte der Wissenschaft geübt hat, würde nur unvollständig hervortreten, wenn ich nicht seiner Thätigkeit als öffentlicher Lehrer Erwähnung thäte. Es war nicht seine Sache, Fertiges und Überliefertes von neuem zu überliefern; seine Vorlesungen bewegten sich sämmtlich aufserhalb des Gebiets der Lehrbücher, und umfafsten nur diejenigen Theile der Wissenschaft, in denen er selbst schaffend aufgetreten war; und dafs hiefs bei ihm, sie boten die reichste Fülle der Abwechselung. Seine Vorträge zeichneten sich nicht durch diejenige Deutlichkeit aus, welche auch der geistigen Armuth oft zu Theil wird, sondern durch eine Klarheit höherer Art. Er suchte vor Allem die leitenden Gedanken, welche jeder Theorie zu Grunde liegen, darzustellen; und indem er Alles was den Schein der Künstlichkeit an sich trug entfernte, entwickelte sich die Lösung der Probleme so naturgemäfs vor seinen Zuhörern, dafs diese Ähnliches schaffen zu können die Hoffnung fassen durften. Wie er die schwierigsten Gegenstände zu behandeln wufste, konnte er seine Zuhörer mit Recht durch die Versicherung ermuthigen, dafs sie in seinen Vorlesungen sich nur ganz einfache Gedanken anzueignen haben würden.

Der Erfolg einer so ungewöhnlichen Lehrart, wie ich sie eben geschildert habe und wie sie nur einem schöpferischen Geiste zu Gebote steht, war wahrhaft aufserordentlich. Wenn jetzt in Deutschland die Kenntnifs der Methoden der Analysis in einem Grade verbreitet ist wie zu keiner frühern Zeit, wenn zahlreiche jüngere Mathematiker die Wissenschaft nach allen Richtungen erweitern und bereichern: so hat *Jacobi* an einer so erfreulichen Erscheinung den wesentlichsten Antheil. Fast alle sind seine Schüler gewesen; selten ist ein aufkeimendes Talent seiner Aufmerksamkeit entgangen; keinem, sobald er es erkannt, hat sein fördernder Rath, seine aufmunternde Theilnahme gefehlt.

Ich habe mich eben bemüht, *Jacobi* als Erfinder und in seiner Wirksamkeit als Lehrer darzustellen. Soll ich jetzt den Versuch wagen, ihn zu

schildern, wie er aufserhalb der wissenschaftlichen Sphäre Denen erschien, die den mathematischen Wissenschaften fern stehen, so mufs ich es als den Grundzug seines Wesens bezeichnen, dafs er ganz in der Welt der Gedanken lebte, und dafs in ihm Das, wozu es bei den meisten, selbst bedeutenden Menschen eines besondern Anlaufs bedarf, das Denken, zum habituellen Zustande und wie zur zweiten Natur geworden war. Wenn etwas im Leben, oder in der Wissenschaft, einmal seine Aufmerksamkeit erregt hatte, so ruhte er nicht, bis er es zu eignen Gedanken verarbeitet hatte; und mit dieser ununterbrochenen geistigen Thätigkeit war in ihm ein so seltenes Gedächtnifs vereinigt, dafs er Alles, womit er sich einmal beschäftigt hatte, sich sogleich vergegenwärtigen und darüber verfügen konnte.

Der unerschöpfliche Vorrath an Wissen und eigenen Gedanken, welcher *Jacobi* jeden Augenblick zu Gebote stand, eine seltene geistige Beweglichkeit, durch die er sich jedem Alter, jeder Fassungskraft anzupassen wufste, und eine eigenthümlich humoristische, die Dinge scharf bezeichnende Ausdrucksweise verliehen dem grofsen Mathematiker auch im geselligen Verkehr eine ungewöhnliche Bedeutung, die noch durch die Bereitwilligkeit, wissenschaftliche Fragen aus dem Stegreif zu behandeln, erhöht wurde. Diese Bereitwilligkeit entsprang aus dem innersten Wesen seiner Natur, die in der Überwindung von Schwierigkeiten ihre eigentliche Befriedigung fand, und es lag daher für ihn ein ganz besonderer Reiz darin, wissenschaftliche Ergebnisse durch einfache Betrachtungen selbst Solchen verständlich zu machen, denen die dazu scheinbar unentbehrlichen Vorkenntnisse fehlten. Nur mufste er, um einen solchen Versuch anzustellen, die Überzeugung haben, dafs Die, mit welchen er sich unterhielt, ein wirkliches Interesse an der Sache nahmen. Wo er hingegen gedankenlose Neugier zu bemerken glaubte, oder entschiedene Meinungen mit Selbstgefälligkeit von Solchen aussprechen hörte, die sich nie die harte Arbeit des Selbstdenkens zugemuthet hatten, verliefs ihn die Geduld, und er machte dann gewöhnlich der Unterhaltung durch eine ironische, nicht selten scharf abweisende Bemerkung ein Ende. Man hat ihm oft vorgeworfen, dafs er sich bei solchen Anläfsen seiner geistigen Kraft zu sehr bewufst gezeigt habe. Aber Die, welche ihn so beurtheilen, würden vielleicht ihre Meinung geändert haben, hätten sie den Preis gekannt, um welchen er das Recht auf ein solches Bewufstsein erlangt hatte. Ein Brief aus dem Jahr 1824, aus einer Zeit also, zu welcher *Jacobi* noch völlig unbekannt war und daher durchaus kein Interesse haben konnte, seine geistigen Kämpfe mit über-

triebenen Farben zu schildern, enthält folgende Stelle, die ich als merkwürdigen Beitrag zur Characteristik des aufserordentlichen Mannes hier wörtlich mittheile. *Jacobi* war damals eben 20 Jahre alt geworden und seit etwa einem Jahre ausschliefslich mit mathematischen Studien beschäftigt.

„Es ist eine saure Arbeit, die ich gethan habe, und eine saure Arbeit, in der ich begriffen bin. Nicht Fleifs und Gedächtnifs sind es, die hier zum Ziele führen; sie sind hier die untergeordnetsten Diener des sich bewegenden reinen Gedankens. Aber hartnäckiges, hirnzersprengendes Nachdenken erheischt mehr Kraft als der ausdauernste Fleifs. Wenn ich daher durch stete Übung dieses Nachdenkens einige Kraft darin gewonnen habe, so glaube man nicht, es sei mir leicht geworden, durch irgend eine glückliche Naturgabe etwa. Saure, saure Arbeit hab' ich zu bestehen, und die Angst des Nachdenkens hat oft mächtig an meiner Gesundheit gerüttelt. Das Bewufstsein freilich der erlangten Kraft giebt den schönsten Lohn der Arbeit, so wie wiederum die Ermuthigung, fortzufahren und nicht zu erschlaffen. Gedankenlose Menschen, denen jene Arbeit und jenes Bewufstsein also auch ein ganz fremdes ist, suchen diesen Trost, der doch allein machen kann, dafs man auf der schwierigen Bahn den Muth nicht sinken läfst, dadurch zu verkümmern, dafs sie das Bewufstsein ein eignes, freies zu sein — denn nur in der Bewegung des Gedankens ist der Mensch frei und bei sich — unter dem Namen Eigendünkel oder Anmaafsung gebässig machen. Jeder der die Idee einer Wissenschaft in sich trägt, kann nicht anders als die Dinge darnach abschätzen, wie sich der menschliche Geist in ihnen offenbart: nach diesem grofsen Maafsstabe mufs ihm daher Manches als geringfügig vorkommen, was den Andern ziemlich preiswürdig erscheinen kann. So hat man auch mir oft Anmaafsung vorgeworfen, oder, wie man mich am schönsten gelobt hat, indem man einen Tadel auszusprechen meinte, ich sei stolz gegen alles Niedere und nur demüthig gegen das Höhere. Aber jener unendliche Maafsstab, den man an die Welt in sich und aufser sich legt, hindert vor aller Überschätzung seiner selbst, indem man immer das unendliche Ziel im Auge hat, und seine beschränkte Kraft. In jenem Stolze und jener Demuth will ich immer zu beharren streben, ja immer stolzer und immer demüthiger werden."

Dafs es bei *Jacobi* keine blofse Phrase war, wenn er von sich sagt, dafs er die Dinge danach abschätze, wie sich der menschliche Geist in ihnen offenbare, und dafs er wirklich Alles was die Welt der Gedanken nicht berühre, wenn nicht mit Gleichgültigkeit, doch mit Gleichmuth behandelte, hat

er in den schwierigsten Lagen seines Lebens gezeigt. Am bewundrungswürdigsten offenbarte sich dieser wahrhaft philosophische Gleichmuth als ihn das Unglück traf, sein ganzes, von seinem Vater ererbtes Vermögen zu verlieren: ein Verlust der ihm um so empfindlicher hätte sein können, als er, seit zehn Jahren verheirathet, für eine zahlreiche Familie zu sorgen hatte. Wer ihn damals sah, als er herbeigeeilt war, um seiner von ähnlichem Verluste betroffenen Mutter mit Rath und That beizustehen, konnte in seiner Stimmung nicht die geringste Veränderung wahrnehmen. Er sprach mit demselben Interesse wie immer von wissenschaftlichen Dingen, und klagte nur darüber, dafs die unerwartete Reise ihn aus einer Untersuchung gerissen habe, die ihn gerade lebhaft beschäftigte.

Wie *Jacobi's* Gedankencultus sich in der Anerkennung von *Abel's* grofser Entdeckung kund gab, habe ich schon früher erwähnt. Einen ähnlichen Sinn zeigte er für alles geistig Bedeutende; und auf ihn findet der Ausspruch eines alten Schriftstellers keine Anwendung, dafs die Menschen eigentlich nur Das bewundern, was sie selbst vollbringen zu können glauben. Seine Anerkennung umfafste das ganze geistige Gebiet, und in seiner Wissenschaft war *Jacobi's* Freude über eine fremde Erfindung um so lebhafter, je mehr sich diese durch ihr Gepräge von seinen eignen Schöpfungen unterschied. Es war eine ihm natürliche Bewegung, in solchem Falle den Ausdruck seines Beifalls durch das Geständnifs zu verstärken, dafs er *diesen* Gedanken nie gehabt haben würde.

Es bleibt mir nun noch übrig, Das was ich oben von *Jacobi's* äufsern Lebensverhältnissen erwähnt habe, mit wenigen Worten zu vervollständigen.

Als er seine Untersuchungen über die elliptischen Functionen bekannt zu machen anfing, war er noch Privatdocent; die Bewunderung, welche seine Entdeckungen bei allen Denen erregten, denen in solchen Dingen ein Urtheil zustand, hatte die Folge, dafs er sogleich zum aufserordentlichen, und bald darauf zum ordentlichen Professor befördert wurde.

Indem ich von der Aufnahme rede, welche *Abel's* und *Jacobi's* Entdeckungen — denn beider Namen sind hier unzertrennlich — bei allen Fachgenossen fanden, kann ich nicht umhin, des Mannes namentlich zu erwähnen, der durch seine vieljährigen Forschungen ganz besonders berufen war, den unerwarteten Fortschritt nach seiner ganzen Bedeutung zu würdigen. *Legendre,* der seine Zeitgenossen so oft der Theilnahmlosigkeit angeklagt und noch kurz vor jener Zeit das Bedauern ausgesprochen hatte, dafs seine Lieblingswissen-

schaft, von allen Andern verlassen, durch ihn allein erst nach 40jähriger Arbeit, wie er glaubte, zum Abschlufs gekommen sei, begrüfste ***Abel's*** und ***Jacobi's*** Entdeckungen, welche die Theorie weit über die Grenzen hinausführten, die ihm selbst durch die Natur des Gegenstandes gesetzt schienen, mit so warmer, ja enthusiastischer Anerkennung, dafs es schwer zu sagen ist, wen eine solche Anerkennung mehr ehrte: die jungen Mathematiker, welchen sie am Eingange ihrer Laufbahn zu Theil ward, oder den edlen Altmeister, der, fast am Ziele angelangt, sich solcher Gefühlswärme fähig zeigte.

Eine nicht minder ehrenvolle Auszeichnung war es, als bald darauf die Pariser Akademie, obgleich sie keine Preisbewerbung über die Theorie der ellipttschen Functionen eröffnet hatte, ***Abel's*** und ***Jacobi's*** Arbeiten, als der wichtigsten Entdeckung der Zeit, einen ihrer grofsen mathematischen Preise zuerkannte und zwischen ***Jacobi*** und ***Abel's*** Erben theilte.

Ich mufs mich darauf beschränken, hier die Beweise der Anerkennung zu erwähnen, welche ***Jacobi's*** Eintritt in die wissenschaftliche Laufbahn bezeichneten; die mir gesteckten Grenzen gestatten mir nicht, alle die Auszeichnungen anzuführen, die ihm auch später in so reichem Maafse zu Theil wurden, und deren Erwähnung in einer ausführlichen Biographie nicht fehlen dürfte.

Bald nachdem ***Jacobi*** im Jahre 1829 seine ***„Fundamenta nova theoriae funct. ellipt.",*** die nur einen Theil seiner Untersuchungen über diesen Gegenstand enthalten, veröffentlicht hatte, machte er die erste gröfsere Reise in's Ausland, schlug den Weg über Göttingen ein, um ***Gaufs*** persönlich kennen zu lernen, und wandte sich dann nach Paris, wo er mehrere Monate sich aufhielt und wo damals, aufser ***Legendre,*** mit dem er seit längerer Zeit in naher brieflicher Verbinduug stand und für den er immer eine grofse Pietät bewahrt hat, noch ***Fourier, Poisson*** und andere hervorragende Mathematiker, die ***Jacobi*** überlebt haben, vereinigt waren.

Eine zweite Reise ins Ausland unternahm ***Jacobi,*** der seit 1831 mit einer Frau von hervorragender Geistesbildung verheirathet war, erst wieder im Jahre 1842, in Gesellschaft seiner Frau. Die Veranlassung zu dieser Reise war für ihn zu ehrenvoll, als dafs ich sie unerwähnt lassen könnte. Dem erleuchteten Staatsmanne, welcher damals an der Spitze der Verwaltung in der Provinz Preufsen stand, schien es im Interesse der Wissenschaft wünschenswerth, dafs ***Bessel*** und ***Jacobi*** einmal der schon oft an sie ergangenen Aufforderung zur Theilnahme an der jährlich in England Statt findenden Gelehrtenversammlung Folge leisteten, und er stellte daher bei dem Könige den

Antrag auf Bewilligung der Kosten zu einer solchen Reise; welchem Antrage Sr. Majestät mit Königlicher Municenz zu willfahren geruhte.

Bald nach seiner Rückkehr von dieser Reise zeigten sich bei *Jacobi* die Symptome einer leider unheilbaren Krankheit. Er schwebte längere Zeit in der gröfsten Gefahr; und als diese endlich für den Augenblick beseitigt war, erklärten seine Ärzte zu seiner Kräftigung einen längeren Aufenthalt in einem südlichen Klima für nothwendig. Diese ärztliche Erklärung setzte *Jacobi* in nicht geringe Verlegenheit, aber diese Verlegenheit war nicht von langer Dauer, denn die Lage der Sache war nicht sobald durch unsern Collegen *Alex. von Humboldt*, dessen gewichtige Vermittelung nirgend fehlt, wo es die Ehre der Wissenschaft und das Wohl ihrer Vertreter gilt, zur Kenntnifs Sr. Majestät des Königs gelangt, als durch einen neuen Act Königlicher Grofsmuth eine ansehnliche Summe zu einer Reise nach Italien angewiesen wurde.

Das milde Klima von Rom, wo *Jacobi* den Winter zubrachte, wirkte so wohlthätig auf ihn, dafs Die welche ihn dort sahen, weit entfernt, in ihm einen Reconvalescenten zu erkennen, über seine wahrhaft aufserordentliche Thätigkeit erstaunen mufsten. Er schrieb nicht nur während der 5 Monate seines dortigen Aufenthalts, aufser mehreren kleinern Aufsätzen, welche in einer wissenschaftlichen Zeitschrift in Rom selbst erschienen, eine wichtige, sehr umfangreiche, für das *Crelle*sche Journal bestimmte Abhandlung, sondern unternahm auch die Vergleichung der im Vatican aufbewahrten Handschriften des *Diophantus*, mit welchem er sich seit längerer Zeit angelegentlich beschäftigt hatte.

In sein Vaterland zurückgekehrt, wurde er von Königsberg nach Berlin versetzt, wo das wenigstens relativ mildere Klima seine Gesundheit weniger zu bedrohen schien. Ohne hier der Universität anzugehören, hatte er nur die Verpflichtung Vorlesungen zu halten, so weit es mit der Schonung, deren sein Gesundheitszustand so sehr bedurfte, verträglich sein würde. Seine schriftstellerische Thätigkeit während seines hiesigen Aufenthalts stand gegen die der besten Königsberger Zeit, kaum zurück; wie es die hier in etwa 6 Jahren geschriebenen Abhandlungen bezeugen, welche zwei starke Quartbände füllen.

Zu Anfange des Jahres 1851 hatte er einen Anfall der Grippe zu bestehen; da er sich jedoch schnell erholte und wieder mit grofsem Eifer zu arbeiten anfing, durften seine Freunde sich der Hoffnung überlassen, dafs er ihnen und der Wissenschaft noch lange erhalten bleiben würde, als er

plötzlich am 11ten Februar von neuem erkrankte. Sein Zustand erregte sogleich die gröfsten Besorgnisse, und als man nach einigen Tagen erkannte, dafs er von den Blattern ergriffen sei, die auf dem durch das alte Übel unterwühlten Boden den bösartigsten Character zeigten, schwand jede Hoffnung. Den 18ten Februar Abends 11 Uhr acht Tage nach seiner Erkrankung erlag er ohne Kampf.

Jacobi's wissenschaftliche Laufbahn umfafst gerade ein Vierteljahrhundert, also einen weit kürzeren Zeitraum als die der meisten frühern Mathematiker ersten Ranges, und kaum die Hälfte der Zeit über welche sich *Euler's* Wirksamkeit erstreckt hat, mit dem er, wie durch Vielseitigkeit und Fruchtbarkeit, so auch darin die gröfste Ähnlichkeit hat, dafs ihm alle Hülfsmittel der Wissenschaft immer gegenwärtig waren und jeden Augenblick zu Gebote standen.

Der Tod, welcher ihn so früh und so plötzlich im Besitze seiner vollen Kraft von der Arbeit hinweggenommen, hat der Wissenschaft die grofsen Bereicherungen nicht gegönnt, die sie von *Jacobi's* nie ermüdender Thätigkeit noch erwarten durfte. Indem ich dies ausspreche, thue ich es nicht nur in der Voraussetzung, dafs in einem solchen Geiste die schöpferische Kraft nur mit der physischen zugleich erlöschen konnte, ich habe auch eine Reihe von fast vollendeten Arbeiten vor Augen, an die er selbst in kurzer Zeit — vielleicht während des Drucks, wie er es in der letzten Zeit so gern that — die letzte Hand hätte legen können und die jetzt durch seine Freunde als Bruchstücke, in unvollkommener Form ans Licht treten müssen. Noch während seiner Krankheit, kaum vier Tage vor seinem Tode, beklagte er das Mifsgeschick, welches über vielen seiner gröfsern Arbeiten gewaltet habe, die Krankheit oder häusliches Unglück unterbrochen habe. Wenn ich dann, setzte er wehmüthig hinzu, später an die Arbeit zurückkehrte, habe ich lieber etwas Neues anfangen, als Untersuchungen wieder aufnehmen wollen, die so traurige Erinnerungen in mir erweckten. Aber ich sehe ein, dafs ich nicht länger zögern darf, jene ältern Arbeiten, denen ich einen so grofsen Theil meiner besten Kraft gewidmet habe, der Öffentlichkeit zu übergeben, wenn sie noch erfolgreich in den Gang der Wissenschaft eingreifen sollen. Glücklicherweise bedarf es dazu nur sehr kurzer Zeit, die mir ja hoffentlich nicht fehlen wird.

14.
Über eine neue Verwandtschaft zwischen ebenen Figuren.

(Von dem Herrn Prof. *Möbius* zu Leipzig.)

(Aus den Berichten der Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften vom 5. Febr. 1853.)

In meinem letzten Berichte (Sitzung am 16. Oct. 1852, S. 41 bis 54) habe ich gezeigt, wie aus Sätzen der Longimetrie, auf einem durch das Gebiet des Imaginären führenden Wege, entsprechende Sätze der Planimetrie gefunden werden können, und habe am Schlusse jenes Berichts bemerkt, dafs ich auf diesem Wege, von der Collineationsverwandtschaft ausgehend, welche zwischen Systemen von Puncten in geraden Linien besteht, zu einer neuen Verwandtschaft zwischen ebenen Figuren gelangt bin. Dieses näher zu erörtern und das Wesen der neuen Verwandtschaft darzulegen, ist der Zweck des jetzigen Berichts.

1. Im „Baryc. Calcul" ist (S. 244), wenn A, B, C, D vier beliebig in einer Geraden liegende Puncte sind, das Verhältnifs zwischen den Verhältnissen, nach welchen der zwischen zweien der vier Puncte enthaltene Abschnitt der Geraden, etwa AB, in den beiden andern Puncten C und D getheilt wird, das Verhältnifs

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB},$$

ein *Doppelschnittsverhältnifs* genannt und (S. 251) bewiesen worden, dafs, wenn bei einem Systeme von n Puncten $A, B, C, D, E, \ldots$ in einer Geraden die $n-3$ Doppelschnittsverhältnisse

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}, \quad \frac{AC}{CB} : \frac{AE}{EB}, \text{ etc.},$$

welche gewisse drei Puncte A, B, C des Systems mit jedem der $n-3$ übrigen $D, E, \ldots$ bilden, gegeben sind, daraus alle übrigen aus den n Puncten zu bildenden Doppelschnittsverhältnisse unzweideutig gefunden werden können.

2. Betrachten wir jetzt ein System von n Puncten $A, B, C, D, E, \ldots$ in einer Ebene; bezeichnen, wie im vorigen Berichte S. 43, mit (AC) den complexen Werth der Strecke AC, und nennen

$$\frac{[AC]}{[CB]}:\frac{[AD]}{[DB]}$$

das *complexe Doppelverhältnifs* zwischen A, B, C, D, während

$$\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}$$

das *reelle Doppelverhältnifs* zwischen denselben vier Puncten heifsen soll: so wird sich nach den dort (S. 44) gemachten Schlüssen, aus den $n-3$ complexen Doppelschnittsverhältnissen zwischen A, B, C, D, zwischen A, B, C, E, u. s. w. jedes der übrigen complexen Doppelschnittsverhältnisse des Systems finden lassen; und Dies nach denselben Regeln, welche im baryc. Calcul, S. 249 und 250, für reelle Doppelschnittsverhältnisse bei einem Systeme von Puncten in einer Geraden aufgestellt worden.

Nun ist (vor. Ber. S. 52.)

$$\frac{[AC]}{[CB]}=\frac{AC}{CB}\varphi(CB^{\wedge}AC) \quad \text{und} \quad \frac{[AD]}{[DB]}=\frac{AD}{DB}\varphi(DB^{\wedge}AD),$$

$$\text{folglich} \quad \frac{[AC]}{[CB]}:\frac{[AD]}{[DB]} = a\varphi(\alpha); \quad \text{wo}$$

$$a=\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB} \quad \text{und} \quad \alpha=CB^{\wedge}AC-DB^{\wedge}AD.$$

Dabei bedeutet in der Gleichung für α, CB eine durch B und C zu legende Gerade, deren positive Richtung, ob sie von B nach C, oder von C nach B gehen soll, erst noch bestimmt werden mufs; und Dasselbe gilt von den drei übrigen Geraden AC, DB, AD. Man kann daher auch

$$\alpha = CB^{\wedge}CA-DB^{\wedge}DA$$

schreiben, und wenn man von jetzt an die durch CB, CA, DB und DA ausgedrückten Richtungen dieser Geraden als die positiven nimmt:

$$\alpha=BCA-BDA \text{ (v. B. S. 47)}, =ADB-ACB.$$

Auch wird bei dieser Annahme a eine positive Zahl.

Es ist aber die complexe Gröfse

$$a\varphi(\alpha), = a\cos\alpha+a\sqrt{-1}.\sin\alpha$$

gegeben, wenn a und α gegeben sind; und umgekehrt ist a sowohl als α gegeben, wenn es $a\varphi(\alpha)$ ist. Dies führt uns zu dem Schlusse, dafs, wenn

bei unserem Systeme von n Puncten in einer Ebene die $n-3$ Doppelschnittsverhältnisse

$$\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB},\ \frac{AC}{CB}:\frac{AE}{EB},\ \text{etc.}$$

und die $n-3$ Winkel-Unterschiede

$$ACB-ADB,\ ACB-AEB,\ \text{etc.}$$

gegeben sind, aus diesen $2n-6$ Gröfsen alle übrigen aus je vier Puncten des Systems zu bildenden Doppelschnittsverhältnisse und Winkelsummen unzweideutig gefunden werden können.

3. Hat man daher ein System von n Puncten $A, B, C, D, \ldots$ in einer Ebene, und construirt gleichfalls in einer Ebene ein zweites System von n Puncten $A', B', C', D', \ldots$, indem man A', B', C' willkührlich nimmt, jeden folgenden Punct aber, wie D', mit Hülfe des gleichnamigen Punctes D im erstern Systeme so bestimmt, dafs

$$(d)\qquad \frac{A'C'}{C'B'}:\frac{A'D'}{D'B'}=\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}\quad\text{und}$$

$$(\delta)\qquad A'C'B'-A'D'B'=ACB-ADB$$

ist, so wird auch jedes andere Doppelschnittsverhältnifs und jeder andere (in der vorigen Bedeutung genommene) Winkel-Unterschied des einen Systems dem entsprechenden Doppelschnittsverhältnisse und dem entsprechenden Winkel-Unterschied im andern Systeme gleich sein.

Diese Gleichheit der Doppelschnittsverhältnisse und der Winkel-Unterschiede zwischen je vier Puncten des einen Systems und den ihnen entsprechenden des andern, ist es nun, welche das Wesen der neuen Verwandtschaft ausmacht: eben so, wie bei zwei Systemen von Puncten, deren jedes in einer Geraden enthalten ist, durch die Gleichheit der Doppelschnittsverhältnisse zwischen entsprechenden Puncten die Collineationsverwandtschaft der beiden Systeme begründet wird. Bar. Calc. S. 317.

4. Zur weitern Erforschung der Eigenthümlichkeiten der neuen Verwandtschaft wollen wir zunächst die Construction etwas schärfer ins Auge fassen, durch welche, den Gleichungen (d) und (δ) gemäfs, der Punct D' in der Ebene $A'B'C'$ zu bestimmen ist. Aus (d) ergiebt sich unzweideutig der (stets positive) Werth des Verhältnisses $A'D':D'B'$, welchen ich $=d$ setze, und eben so unzweideutig aus (δ) der Werth des Winkels $A'D'B'$, den ich δ nenne, nachdem zuvor in jeder der beiden Ebenen ABC und

$A'B'C'$ der positive Sinn der Drehung festgesetzt worden. Wegen $A'D':D'B' = d:1$ liegt aber D' in einem Kreise, der die Strecke $A'B'$ nach den Verhältnissen $d:1$ und $-d:1$ rechtwinklig schneidet und daher den einen der beiden Puncte A' und B' ein-, den andern ausschliefst. Wegen $A'D'B' = \delta$ ziehe man eine Gerade $B'R$, so dafs der Winkel $A'B'R = \delta$, nicht $= 360^0 - \delta$, und es mufs D' in einem durch A' gehenden und $B'R$ in B' berührenden Kreise und dabei mit R auf verschiedenen Seiten von $A'B'$ liegen; nicht auf einerlei Seite; als wo $A'D'B' = 180^0 + \delta$ sein würde. Da dieser Kreis durch A' und B' zugleich geht, so schneidet er den vorigen in zwei, auf verschiedenen Seiten von $A'B'$ liegenden Puncten, und D' ist derjenige dieser zwei Durchschnitte, welcher mit R' nicht auf einerlei Seite von $A'B'$ fällt, also unzweideutig bestimmt wird.

5. Ist auf solche Weise der Punct D' mittels (d) und (δ), und eben so jeder der übrigen Puncte E', F', ... mittels Gleichungen, welche denen (d) und (δ) analog sind, und die ich mit (e) und (ε), (f) und (ζ), etc. bezeichnen will, bestimmt worden, so bestehen für die erhaltene Figur $A'B'C'D'E'$ ... die Winkelgleichungen (δ), (ε), (ζ), ... auch dann noch, wenn in jeder der beiden Ebenen der ursprünglich negative Sinn der Drehung zum positiven genommen wird; denn damit verwandelt sich jeder der in (δ), (ε), ... vorkommenden Winkel in sein Supplement zu 360^0. Dagegen werden durch die Figur A'... E'... die Winkelgleichungen nicht mehr erfüllt, und man mufs zum Bestehen derselben den Puncten D', E', ... andere Örter anweisen, sobald man nur in der einen der beiden Ebenen den Sinn umkehrt. Nachdem daher die Puncte A', B', C' willkührlich bestimmt worden, giebt es, nach der verschiedenen Annahme des Sinnes der Drehung in den beiden Ebenen, immer zwei Figuren $A'B'C'D'E'$ ... und $A'B'C'D''E''$ ..., und nicht mehr als zwei, deren jede mit der Figur $ABCDE$ ... in der neuen Verwandtschaft steht.

6. Zur Bestimmung von D' kann auch die Gleichung (δ) in Verbindung mit der ebenfalls die Gleichheit zweier einander entsprechenden Winkel-Unterschiede ausdrückenden Gleichung

$$(\delta') \qquad A'B'C' - A'D'C' = ABC - ADC$$

angewendet werden. Denn so wie der Punct D' in Folge von (δ) in einem bestimmten durch A' und B' gehenden Kreise liegt, so liegt er wegen (δ') in einem bestimmten durch A' und C' zu beschreibenden Kreise und ist folglich der andere Durchschnitt dieser zwei sich bereits in A' schneidenden Kreise.

Die neue Verwandtschaft wird daher schon dadurch hinreichend definirt, dafs jeder Winkel-Unterschied von der Form $ACB-ADB$ des einen Systems dem Winkel-Unterschiede zwischen den entsprechenden Puncten des andern Systems gleich ist.

Dafs übrigens auch hier mit denselben A', B', C, nach der verschiedenen Annahme des Sinnes der Drehung, zwei verschiedene mit $ABCDE$... verwandte Figuren construirt werden können, erhellet auf dieselbe Weise wie vorhin

7. Der Punct D' läfst sich auch noch dadurch bestimmen, dafs man die Gleichung (d) mit der Gleichung

$$(d') \quad \frac{A'B'}{B'C'} : \frac{A'D'}{D'C'} = \frac{AB}{BC} : \frac{AD}{DC}$$

verbindet, als welche, eben so wie (d), die Gleichheit zweier entsprechenden Doppelschnittsverhältnisse darstellt. Da aber diese zwei Gleichungen keine von der Drehung abhängigen Gröfsen enthalten, so wird man mit ihnen die zwei Örter von D', die sich nach der verschiedenen Annahme des Sinnes der Drehung ergaben, zugleich finden. In der That folgen aus (d) und (d') die Werthe der Verhältnisse $A'D' : D'B'$ und $A'D' : D'C'$, und man erhält damit als geometrische Örter von D' zwei Kreise. Die Construction des ersten derselben ist im Art. 4. bemerkt werden; und Analoges gilt von der Construction des zweiten, welcher den ersten in D' und D'' (Art. 5.) schneiden wird.

Ungeachtet dieser Zweideutigkeit bei der Bestimmung von D' durch entsprechende Doppelschnittsverhältnisse wird nichtsdestoweniger die Gleichheit dieser Verhältnisse von der einen Figur zur andern als genügendes Merkmal zur Definition der neuen Verwandtschaft dienen können: ganz eben so, wie die Ähnlichkeit zweier Figuren vollkommen genügend dadurch definirt werden kann, dafs die gegenseitigen Abstände je zweier Puncte der einen Figur in denselben Verhältnissen zu einander stehen, wie die Abstände der entsprechenden Puncte in der andern, obschon, wenn hiernach zu einer ebenen Figur ABC ... eine ihr ähnliche und daher gleichfalls ebene $A'B'C'$ ... construirt werden soll, nach willkührlicher Annahme von A' und B', für C' zwei Puncte gefunden werden, nämlich die gegenseitigen Durchschnitte der zwei Kreise, welche um A' und B', als Mittelpuncte, mit den Halbmessern $\frac{A'B'}{AB} \cdot AC$ und $\frac{A'B'}{AB} \cdot BC$ beschrieben werden.

Anmerkung. Ich kann nicht umhin, bei dieser Vergleichung der neuen Verwandtschaft mit der Ähnlichkeit noch auf eine zwischen beiden Verwandtschaften Statt findende Analogie aufmerksam zu machen, welcher zufolge die neue als eine in gewissem Sinne potentiirte Ähnlichkeit betrachtet werden kann. Bei zwei einander ähnlichen Figuren sind nämlich die geometrischen Verhältnisse zwischen je zwei Strecken der einen Figur den entsprechenden Verhältnissen in der andern gleich. Desgleichen sind die Winkel, die, wenn man will, sich als Unterschiede von Richtungen, und daher als arithmetische Verhältnisse betrachten lassen, von der einen Figur zur andern gleich grofs. Bei der neuen Verwandtschaft hingegen herrscht Gleichheit von der einen Figur zur andern erst zwischen geometrischen Verhältnissen jener geometrischen (d. i. Doppelschnittsverhältnissen) und zwischen arithmetischen dieser arithmetischen Verhältnisse (d. i. Winkel-Unterschieden). Und so wie bei zwei Figuren, wenn Gleichheit der einfachen geometrischen Verhältnisse zwischen Strecken Statt findet, daraus auf die Gleichheit der einfachen arithmetischen Verhältnisse zwischen Richtungen, und umgekehrt aus letzterer Gleichheit auf die erstere geschlossen werden kann, indem durch die eine, wie durch die andere, die Ähnlichkeit der beiden Figuren definirt wird: so kann auch (Art. 7.) aus der Gleichung der zusammengesetzten geometrischen Verhältnisse die Gleichheit der zusammengesetzten arithmetischen Verhältnisse, und (Art. 6.) umgekehrt aus der letztern die erstere gefolgert werden.

8. Liegen vier Puncte A, B, C, D einer Ebene in einem Kreise, so ist der Winkel-Unterschied $ACB - ADB$ entweder $= 0$, oder $= 180^0$, und zwar $= 0$, wenn C und D auf einerlei und $= 180^0$, wenn sie auf verschiedenen Seiten der Geraden AB liegen. Auch gilt dieser Satz umgekehrt. In Folge der Gleichung (δ) (Art. 3.) sind daher, wenn von zwei in der neuen Verwandtschaft stehenden Figuren vier Puncte der einen in einem Kreise liegen, auch die ihnen entsprechenden der andern in einem Kreise, und dieses in derselben Aufeinanderfolge, enthalten. Aber auch umgekehrt läfst sich darthun, dafs, wenn von zwei Ebenen jedem Puncte der einen ein Punct in der andern dergestalt entspricht, dafs von je vier Puncten der einen, welche in einem Kreise begriffen sind, die entsprechenden vier der andern gleichfalls in einem Kreise liegen: dafs dann auch die Doppelschnittsverhältnisse, so wie die Winkel-Unterschiede zwischen je vier Puncten der einen und den vier entsprechenden der andern Ebene gleiche Werthe haben. Nach diesem Satze, dessen Beweis ich mir für eine andere Gelegen-

heit vorbehalte, kann die neue Verwandtschaft auch dadurch definirt werden, dafs von je vier Puncten der einen Ebene, welche in einem Kreise liegen, die entsprechenden in der andern gleichfalls durch einen Kreis verbunden werden können, und dafs somit jedem Kreise der einen ein Kreis in der andern entspricht. Ich will hiernach die neue Verwandtschaft *Kreisverwandtschaft* nennen.

9. Liegen A, B, C, D nicht in einem Kreise, so ist der Winkel-Unterschied $ACB-ADB$, abgesehen vom Zeichen, dem Winkel gleich, unter welchem sich die zwei durch A, C, B und A, D, B zu beschreibenden Kreise in A und B schneiden. Wegen der Formel (δ) werden daher bei zwei kreisverwandten Figuren, wenn zwei Kreise der einen sich schneiden, auch die entsprechenden Kreise der andern Figur einander schneiden; und dieses unter demselben Winkel, wie die zwei erstern.

10. Eine unmittelbare Folge hiervon ist, dafs zwei kreisverwandte Figuren in ihren kleinsten Theilen einander ähnlich sind. Denn ist in der einen Figur FGH ein unendlich kleines Dreieck und K ein von ihm in endlicher Entfernung liegender Punct, und sind F', G', H', K' die entsprechenden Puncte der andern Figur, so wird, wenigstens im Allgemeinen, auch das Dreieck $F'G'H'$ unendlich klein sein, und K' in endlicher Entfernung von ihm liegen. Hiernach ist aber der Winkel GFH gleich dem Winkel, unter welchem sich die Kreise FGK und FHK schneiden, gleich dem Winkel, unter welchem sich die jenen entsprechenden Kreise $F'G'K'$ und $F'H'K'$ schneiden, gleich dem Winkel $G'F'H'$; und eben so wird auch die Gleichheit der Winkel HGF und $H'G'F'$ bewiesen. Je zwei einander entsprechende, unendlich kleine Dreiecke, wie FGH und $F'G'H'$, sind mithin einander ähnlich.

11. Eine Gerade kann als ein unendlich kleiner Theil eines unendlich grofsen Kreises betrachtet werden. Bei zwei kreisverwandten Figuren (wir wollen die Ebene derselben im Folgenden mit p und p' bezeichnen) wird daher einer Geraden a in p, in p' ein Kreis a' entsprechen; auch kann wohl a' selbst eine Gerade sein. Dabei entspricht jedem Puncte in a ein Punct in a', und so auch dem unendlich entfernten Puncte der Geraden a, welcher N heifse, ein bestimmter Punct N' des Kreises a'. Sind ferner A, B irgend zwei, in p aufserhalb a liegende Puncte, und A', B' die ihnen entsprechenden in p', so entspricht dem Kreise ABN der Kreis $A'B'N'$. Erster Kreis ist aber, wegen der unendlichen Entfernung des N, von der Geraden AB nicht zu unterscheiden, und es entspricht daher nicht blofs der a,

sondern auch jeder andern in p gezogenen Geraden, in p' ein durch N' gehender Kreis. Eben so zeigt sich, dafs auch umgekehrt jedem in p' durch N' beschriebenen Kreise, so wie jeder in p' durch N' gelegten Geraden, in p stets eine Gerade entspricht.

Man hat hiernach den Punct N' in p' als einen nicht blofs dem in a, sondern auch dem in jeder andern Geraden der Ebene p unendlich entfernt liegenden Puncte entsprechenden Punct anzusehen; und auf gleiche Art mufs es auch in p einen Punct M geben, dessen entsprechender Punct M' in p' unendlich entfernt nach einer unbestimmt bleibenden Richtung liegt. Jeder in p' durch N' gelegten Geraden, wie $N'A'$, wird alsdann, da man sie auch als den Kreis $M'N'A'$ betrachten kann, in p der Kreis MNA, d. i. die Gerade MA, und eben so umgekehrt jeder Geraden durch M eine Gerade durch N' entsprechen.

12. Sind in p und p' die Puncte M und N', welche den unendlich entfernten Puncten in p' und p entsprechen, und noch zwei endlich gelegene einander entsprechende Puncte A und A' gegeben, so kann man, nach Festsetzung des positiven Sinnes der Drehung in p und p', für jeden andern Punct B in p den ihm in p' entsprechenden Punct B' durch eine sehr einfache Construction finden. Denn zwischen den vier Paaren entsprechender Puncte A und A', B und B', M und M', N und N' bestehen nach Art. 3. die zwei Gleichungen:

$$\frac{A'M'}{M'B'} : \frac{A'N'}{N'B'} = \frac{AM}{MB} : \frac{AN}{NB},$$

$$A'M'B' - A'N'B' = AMB - ANB.$$

Wegen der unendlichen Entfernung der Puncte M' und N ist aber $A'M' : M'B' = AN : NB = 1 : 1$, und der Winkel $A'M'B' = ANB = 0$. Damit reduciren sich die zwei Gleichungen auf

$$A'N' : N'B' = BM : MA \quad \text{und} \quad A'N'B' = BMA,$$

und der Punct B' ist hiernach in p' so zu bestimmen, dafs das Dreieck $A'N'B'$ dem Dreiecke BMA ähnlich wird und mit ihm einerlei Zeichen des Sinnes erhält. Übrigens folgt die Gleichheit der Winkel $A'N'B'$ und AMB auch aus dem Satze in Art. 9., indem die Schenkel des einen den Schenkeln des andern entsprechende Linien sind.

13. Aus der im vor. Artikel zur Bestimmung von B' entwickelten Construction läfst sich unmittelbar die Folgerung ziehen: Sind A und A',

B und ***B'***, ***C*** und ***C'***, etc. Paare einander entsprechender Puncte zweier kreisverwandten Figuren, und sind ***M*** und ***N'*** diejenigen Puncte der Ebenen ***AB***... und ***A'B'***..., welche den unendlich entfernten Puncten der Ebenen ***A'B'***... und ***AB***... entsprechen: so machen je zwei der Richtungen ***N'A'***, ***N'B'***, ***N'C'***, ... dieselben Winkel mit einander, wie die entsprechenden zwei unter den Richtungen ***MA***, ***MB***, ***MC***, ...; die Strecken ***N'A'***, ***N'B'***, ***N'C'***, ... aber sind den Strecken ***MA***, ***MB***, ***MC***, ... umgekehrt proportional, oder, was dasselbe sagt, die mittlern Proportionallinien zwischen ***MA*** und ***N'A'***, zwischen ***MB*** und ***N'B'***, etc. sind von gleicher Länge.

Diese einfache Beziehung, die zwischen zwei kreisverwandten Figuren rücksichtlich der Puncte ***M*** und ***N'*** Statt findet, führt weiter zu einer Construction, welche auf die Verwandtschaft ein unerwartetes Licht wirft, indem sie die Theorie derselben mit einer andern schon längst bekannten Theorie in Verbindung setzt. Man bringe nämlich die Ebenen der beiden Figuren in eine solche Lage gegen einander, dafs die Strecke von ***M*** bis ***N'*** der constanten Länge jener mittlern Proportionallinien gleich wird, und die zwei Ebenen auf der Linie ***MN'*** normal, also einander parallel werden, und dafs, wie es wegen der gleichen Winkel bei ***M*** und ***N'*** möglich sein mufs, ***N'A'*** mit ***MA***, ***N'B'*** mit ***MB***, u. s. w. einerlei Richtung erhält. Die zwei Dreiecke ***AMN'*** und ***MN'A'*** liegen alsdann in einer Ebene, sind bei ***M*** und ***N'*** rechtwinklig und sind deshalb, und weil ***MN'*** die mittlere Proportionallinie zwischen ***AM*** und ***N'A'*** ist, einander ähnlich; woraus leicht weiter folgt, dafs sich die Hypotenusen ***AN'*** und ***MA'*** dieser Dreiecke rechtwinklig schneiden, welches in A_1 geschehe. Aus ähnlichem Grunde schneiden sich ***BN'*** und ***MB'*** rechtwinklig in einem Puncte, welcher B_1 heifse; ***CN'*** und ***MC'*** rechtwinklig in einem Puncte C_1; u. s. w. Die Puncte A_1, B_1, C_1, ... liegen hiernach in einer Kugelfläche, von welcher ***MN'*** ein Durchmesser ist, und die Figuren ***ABC***... und ***A'B'C'***... erscheinen somit als die stereographischen Projectionen einer und derselben sphärischen Figur $A_1B_1C_1$... von den Augenpuncten ***N'*** und ***M*** aus auf zwei Ebenen, welche die Kugel in ***M*** und ***N'*** berühren.

Aus dieser Ansicht der Sache folgen aber sogleich die zwei Haupt-Eigenschaften der Kreisverwandtschaft, dafs nämlich Kreisen Kreise entsprechen, und dafs einander entsprechende Winkel von gleicher Gröfse sind. Denn, wie man weifs, haben dieselben Beziehungen auch zwischen jeder sphärischen Figur und ihrer stereographischen Projection Statt, und es werden daher je

zwei stereographische Projectionen einer und derselben sphärischen Figur, auch wenn die zwei Augenpuncte nicht, wie vorhin, Gegenpuncte von einander sind, einander kreisverwandt sein.

Übrigens läfst sich leicht darthun, dafs

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1} : \frac{A_1D_1}{D_1B_1} = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB},$$

und dafs daher bei einer sphärischen Figur und ihrer stereographischen Projection auch Gleichheit zwischen entsprechenden Doppelschnittsverhältnissen obwaltet.

14. Jede der im „barycentrischen Calcul" behandelten Verwandtschaften führt, wie dort gezeigt worden, zu einer besondern Classe geometrischer Aufgaben, und eben so gehört auch der jetzt betrachteten Kreisverwandtschaft eine solche Classe zu. In der That ist bereits im Art. 2. bemerkt worden, dafs bei einem System von n Puncten in einer Ebene aus den $n-3$ Doppelschnittsverhältnissen und den $n-3$ Winkel-Unterschieden, welche gewisse 3 Puncte des Systems mit den $n-3$ übrigen bilden, alle übrigen im System vorkommenden Doppelschnittsverhältnisse und Winkel-Unterschiede gefunden, d. i. als Functionen jener $2n-6$ Gröfsen dargestellt werden können. Wir wollen nun der Kürze willen Doppelschnittsverhältnisse und Winkel-Unterschiede, als Gröfsen, deren jede durch vier Puncte (und dieses nach der im Art. 2. angegebenen Form) bestimmt wird, unter dem gemeinsamen Namen *Quaternionen* begreifen. Indem wir alsdann von den $2n-6$ vorhin gedachten alle übrigen Quaternionen des Systems als Functionen darstellen, können wir, durch Elimination jener $2n-6$, auch von irgend $2n-6$ von einander unabhängigen andern Quaternionen des Systems alle übrigen als Functionen ausdrücken; welches den Satz giebt:

Bei einem System von n Puncten in einer Ebene können aus irgend 2n — 6 von einander unabhängigen Quaternionen desselben alle übrigen Quaternionen gefunden werden, und es besteht mithin zwischen irgend 2n — 5 Quaternionen des Systems wenigstens Eine Relation.

Bei einem System von vier Puncten lassen sich demnach aus je zwei von einander unabhängigen Quaternionen alle übrigen finden. Dafs und wie dieses möglich ist, erhellet aus den im vorigen Berichte auf S. 49 bemerkten Sätzen.

Um ein Beispiel für ein System von fünf Puncten $A, \ldots E$ hinzuzufügen, als wo zwischen je fünf Quaternionen wenigstens Eine Gleichung besteht, so habe ich gefunden, dafs zwischen den fünf Winkel-Unterschieden $BCD - BED$, $CDE - CAE$, $DEA - DBA$, $EAB - ECB$, $ABC - ADC$,

wenn man sie der Reihe nach mit α, β, γ, δ, ε bezeichnet, die Gleichung

$$\begin{aligned} &\sin(\alpha+\beta+\gamma-\delta-\varepsilon) + \sin(\beta+\gamma+\delta-\varepsilon-\alpha) \\ &+\sin(\gamma+\delta+\varepsilon-\alpha-\beta) + \sin(\delta+\varepsilon+\alpha-\beta-\gamma) \\ &+\sin(\varepsilon+\alpha+\beta-\gamma-\delta) = \sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon) \end{aligned}$$

Statt hat, die, wie sich erwarten liefs, vollkommen symmetrisch ist.

Zum Schlusse noch die Bemerkung, dafs zu der Kreisverwandtschaft ebener Figuren als Analogon für den Raum von drei Dimensionen eine Verwandtschaft aufgestellt werden kann, bei welcher jeder Kugelfläche des einen Raums eine Kugelfläche im andern entspricht.

15.

Über eine Methode, um von Relationen, welche der Longimetrie angehören, zu entsprechenden Sätzen der Planimetrie zu gelangen.

(Vom Herrn Prof. Dr. *Möbius* zu Leipzig.)

(Aus den Berichten der Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften von 1853.)

Unter den drei Theilen, in welche man die Geometrie, der Natur des Raumes gemäfs, getheilt hat, ist die Longimetrie der bei weitem einfachste. Denn hier kommen blofs ein System von Puncten in einer Geraden und Relationen zwischen den gegenseitigen Entfernungen der Puncte in Betracht. Alle diese Relationen aber ergeben sich durch wiederholte Anwendung der einfachsten unter ihnen, welche besagt, dafs, wenn zwei Abschnitte einer Geraden einen Grenzpunct gemein haben, und auf verschiedenen Seiten desselben die beiden andern Grenzpuncte liegen, der zwischen diesen andern begriffene Abschnitt der Summe der zwei ersten Abschnitte gleich ist. Oder allgemeiner, und in Zeichen ausgedrückt: Sind A, B, C drei Puncte einer Geraden, so ist immer, in welcher Ordnung auch die drei Puncte in der Geraden auf einander folgen mögen:

$$AB + BC = AC,$$

dafern nur auf die durch die Stellung der Buchstaben in den Ausdrücken der Abschnitte bestimmten Richtungen und auf die dadurch bedingten Vorzeichen der Abschnitte gehörige Rücksicht genommen wird.

Ungeachtet dieser grofsen Einfachheit der Longimetrie sind doch bereits mehrere sehr merkwürdige in ihr Gebiet gehörige Untersuchungen geführt worden. Schon in den mathematischen Sammlungen des Pappus (7. Buch) findet sich eine lange Reihe von Sätzen, Relationen zwischen Abschnitten einer Geraden betreffend, und die neueren Geometer haben theils diese Sätze erweitert, theils neue hinzugefügt.

In der letztvergangenen Zeit ist es mir glungen, diesen Sätzen eine noch gröfsere Erweiterung zu geben, indem ich auf eine Methode gekommen

bin, durch welche zu jedem auf ein System von Puncten in einer Geraden sich beziehenden Satze ein entsprechender Satz für ein System von Puncten in einer Ebene gefunden werden kann. Ich gelangte hierzu durch die Betrachtung, dafs, wenn zwischen mehrern Abschnitten einer Geraden eine Gleichung bestehen soll, und wenn die Grenzpuncte aller Abschnitte bis auf einen unmittelbar gegeben sind, dieser eine Punct durch die Gleichung bestimmt, deshalb aber nicht immer construirbar ist, indem es geschehen kann, dafs sein Abstand von einem der gegebenen Puncte, und somit auch von allen übrigen, von complexer Form, und er selbst folglich in der Geraden imaginär wird. Man weifs aber jetzt, dafs ein solcher Punct zwar nicht in der Geraden, in welcher er eigentlich liegen soll, aber doch in einer durch die Gerade zu legenden Ebene als ein reeller Punct construirt werden kann. Ist nämlich A einer der in der Geraden gegebenen Puncte, P der gesuchte, und findet sich der Abschnitt $AP = x + y\sqrt{-1}$, so ist P derjenige Punct der Ebene, dessen rechtwinklige Coordinaten $=x$ und y in Bezug auf die Gerade, als Axe der Abscissen, und den Punct A, als Anfangspunct, sind.

Man kann hierdurch veranlafst werden, gleich von vorn herein die Grenzpuncte aller in der Gleichung vorkommenden Abschnitte als imaginäre Puncte der Geraden und somit als reelle Puncte der Ebene zu betrachten. Die Gleichung selbst wird bei dieser Ansicht eine, oder vielmehr zwei Relationen ausdrücken, welche einer ebenen Figur zukommen und derjenigen Relation entsprechen, welche dieselbe Gleichung ursprünglich in Bezug auf ein System von Puncten in einer Geraden darstellt.

Um diese zwei Relationen für die Ebene zu erhalten, könnte man die Abstände der Grenzpuncte der Abschnitte von einem und demselben Puncte der Geraden, als Anfangspuncte, $= x + y\sqrt{-1}$, $x' + y'\sqrt{-1}$, u. s. w. setzen, wodurch die Abschnitte selbst, als Differenzen je zweier dieser Abstände gleichfalls von complexer Form würden. Die Substitution dieser complexen Ausdrücke für die Abschnitte in der Gleichung zwischen letztern gäbe alsdann ein Resultat von der Form: $X + Y\sqrt{-1} = 0$, wo X, so wie Y, eine reelle Function der Coordinaten x und y, x' und y', u. s. w. der Puncte der ebenen Figur ist. Die zwei Relationen selbst aber würden $X = 0$ und $Y = 0$ sein. — Indessen kann man einen für die Mehrzahl der hierher gehörenden Relationen ungleich geeigneteren Weg einschlagen, um *von der Geraden durch das Gebiet des Imaginären zu der Ebene* zu gelangen. Folgendes ist eine nähere Bezeichnung dieses Weges.

Sind A und B zwei Puncte einer Ebene, so unterscheide man den reellen und den complexen Werth der Strecke AB.

Zur Angabe des reellen Werthes ist zuvor eine Linien-Einheit festzusetzen, und von den zwei Richtungen, nach denen die durch A und B zu legende gerade Linie durchgangen werden kann, zu bestimmen, welche die positive sein soll. Der reelle Werth von AB ist alsdann die Zahl, nach welcher AB von der Linien-Einheit gemessen wird, und diese Zahl ist positiv oder negativ zu nehmen, jenachdem die Richtung von A nach B die positive oder die negative Richtung der Linie ist.

Um den complexen Werth der Strecke angeben zu können, mufs nächst den vorigen zwei Stücken eine beliebige Richtung in der Ebene als Normalrichtung, und von dem doppelten Sinne, nach welchem eine Linie in der Ebene gedreht werden kann, der eine als der positive vorher noch festgesetzt werden. Nach diesen Bestimmungen ist der complexe Werth von AB gleich dem reellen Werthe von AB, multiplicirt in eine gewisse Function des Winkels der Linie AB mit der Normalrichtung, d. i. des Winkels, um welchen eine Linie, welche die Normalrichtung hat, in positivem Sinne gedreht werden mufs, bis ihre Richtung mit der positiven Richtung der Linie AB identisch wird. Die Winkelfunction aber ist, wenn α den Winkel bezeichnet, die bekannte: $\cos\alpha+\sqrt{-1}.\sin\alpha$, die im Folgenden kurz durch $\varphi(\alpha)$ ausgedrückt werde. — Bezeichnen wir daher den reellen Werth der Strecke AB einfach mit AB, ihren complexen Werth aber mit $[AB]$, und eine Linie, welche die Normalrichtung hat, mit x, so ist

$$[AB] = AB.\varphi(x'AB).$$

Hieraus ist zunächst leicht ersichtlich, dafs für je drei beliebige Puncte A, B, C der Ebene

$$[AB]+[BC] = [AC]$$

ist. Denn in Folge der Natur der Function φ drückt diese Gleichung nichts Anderes aus, als dafs, wenn man die Puncte A, B, C das einemal auf die Linie x, das anderemal auf eine in der Ebene auf x perpendiculare Linie rechtwinklig projicirt, in dem einen, wie im andern Falle die Summe der Projectionen von AB und von BC der Projection von AC gleich ist. Zwischen den complexen Werthen der gegenseitigen Abstände irgend dreier Puncte in einer Ebene besteht demnach dieselbe einfache Relation, als wie zwischen den reellen Werthen der Abstände, wenn die drei Puncte in einer Geraden liegen.

Da nun, wie schon im Eingange bemerkt worden, jede zusammengesetztere Relation zwischen Abschnitten einer Geraden als das Resultat der Verbindung solcher einfachen Gleichungen zwischen den gegenseitigen Abständen dreier Puncte anzusehen ist, und da dieselben einfachen Gleichungen auch zwischen je drei Puncten der Ebene Statt finden, nur dafs hier die complexen Werthe der Abstände statt der dortigen reellen zu setzen sind: so mufs jede identische Gleichung zwischen den gegenseitigen Abständen von Puncten in einer Geraden auch dann noch bestehen, wenn man die Puncte in einer Ebene beliebig liegend annimmt, die Abstände aber nicht mehr in reeller, sondern in complexer Bedeutung gelten läfst. Durch weitere Entwickelung der also aufgefafsten Gleichung, was insbesondere mit Anwendung der bekannten Eigenschaften der Function φ:

$$\varphi(\alpha).\varphi(\beta) = \varphi(\alpha+\beta) \text{ und } \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\beta)} = \varphi(\alpha-\beta)$$

zu bewerkstelligen sein wird, reducirt sich die Gleichung, wie im Obigen, auf die Form $X + Y\sqrt{-1} = 0$, und die Gleichungen $X = 0$, $Y = 0$ liefern die gesuchten Beziehungen.

Nachstehende zwei Beispiele werden den Gegenstand in ein noch helleres Licht setzen. Dabei werde ich zugleich Gelegenheit nehmen, den Gebrauch eines Algorithmus für Winkel zu zeigen, der demjenigen entspricht, dessen ich mich zuerst in meinem „barycentrischen Calcul" für Linien, Dreiecksflächen und Tetraëder bedient habe, eines Algorithmus, der mit Anwendung von Zeichen für Dinge, denen keine Gröfse, blofs Lage zukommt, die arithmetischen Beziehungen zwischen den Theilen der Figur durch Formeln darstellt, welche für alle denkbaren Lagen der Theile Gültigkeit haben. Baryc. Calc. S. XIV.

Reduction eines Vierecks auf ein Dreieck.

Sind A, B, C, D vier beliebige Puncte einer Geraden, so ist

$$BC = BD - CD, \quad CA = CD - AD, \quad AB = AD - BD.$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen resp. mit AD, BD, CD, und addirt sie hierauf, so kommt

$$AD.BC + BD.CA + CD.AB = 0.$$

Es mufs daher auch, wenn vier Puncte $A, .. D$ irgendwie in einer Ebene liegen, die Relation bestehen:

$$(1) \quad [AD][BC] + [BD][CA] + [CD][AB] = 0.$$

Nun ist

$$[AD] = AD.\varphi(x^{\wedge}AD) \quad \text{und} \quad [BC] = BC.\varphi(x^{\wedge}BC),$$

folglich

$$[AD][BC] = AD.BC.\varphi(x^{\wedge}AD + x^{\wedge}BC);$$

und ähnlicher Weise lassen sich die beiden andern Glieder in (1) umformen, setzt man daher der Kürze willen

$$(2) \quad AD.BC = p, \quad BD.CA = q, \quad CD.AB = r \quad \text{und}$$

$$(3) \quad x^{\wedge}AD + x^{\wedge}BC = \alpha, \quad x^{\wedge}BD + x^{\wedge}CA = \beta, \quad x^{\wedge}CD + x^{\wedge}AB = \gamma,$$

so verwandelt sich (1) in

$$p.\varphi(\alpha) + q.\varphi(\beta) + r.\varphi(\gamma) = 0,$$

eine Gleichung, die durch Trennung ihres reellen Theils vom imaginären in die zwei zerfällt:

$$(4) \quad \begin{cases} p\cos\alpha + q\cos\beta + r\cos\gamma = 0, \\ p\sin\alpha + q\sin\beta + r\sin\gamma = 0. \end{cases}$$

Seien nun, um dieses Resultat anschaulich auszudrücken, f, g, h drei in einer Ebene liegende und sich nicht in einem Puncte schneidende Gerade, welche mit einer vierten Geraden v der Ebene Winkel bilden, die resp. $= \alpha$, β, γ sind. Man nenne die Durchschnitte von g mit h, von h mit f, von f mit g resp. F, G, H, so ist

$$(5) \quad v^{\wedge}GH = \alpha, \quad v^{\wedge}HF = \beta, \quad v^{\wedge}FG = \gamma.$$

Nächstdem hat man $[GH] + [HF] + [FG] = 0$, d. i., wenn man v zur Normalrichtung nimmt:

$$GH.\varphi(\alpha) + HF.\varphi(\beta) + FG.\varphi(\gamma) = 0,$$

eine Gleichung, die sich, wie die vorige $p.\varphi(\alpha) + \cdots = 0$, in die zwei spaltet:

$$GH\cos\alpha + HF\cos\beta + FG\cos\gamma = 0,$$
$$GH\sin\alpha + HF\sin\beta + FG\sin\gamma = 0.$$

Hieraus aber und aus (4) folgt $GH:HF:FG = \sin(\gamma-\beta):\sin(\alpha-\gamma):\sin(\beta-\alpha) = p:q:r$, also

$$(6) \quad GH:HF:FG = AD.BC:BD.CA:CD.AB.$$

Ferner ist nach (5) und (3) zu schliefsen:

$$v^{\wedge}FG - v^{\wedge}HF = x^{\wedge}CD + x^{\wedge}AB - x^{\wedge}BD - x^{\wedge}CA.$$

Sowie aber allgemein, wenn a, b, c drei in einer Geraden liegende Puncte bedeuten, $ac - ab = bc$ ist, *so ist mit gleicher Allgemeinheit, wenn*

a, b, c drei in einer Ebene enthaltene Gerade vorstellen:

$$a^\wedge c - a^\wedge b = b^\wedge c.$$

Hiermit reducirt sich die vorige Gleichung auf

$$(7)\quad \begin{cases} HF^\wedge FG = BD^\wedge CD + CA^\wedge AB = CA^\wedge CD + BD^\wedge AB, \\ \text{und eben so hat man nach (5) und (3) noch} \\ FG^\wedge GH = CD^\wedge AD + AB^\wedge BC = AB^\wedge AD + CD^\wedge BC, \\ GH^\wedge HF = AD^\wedge BD + BC^\wedge CA = BC^\wedge BD + AD^\wedge CA. \end{cases}$$

Construirt man daher zu einem Viereck $ABCD$ ein Dreieck FGH, dessen Seiten die aus den Winkeln im Viereck durch (7) bestimmten Winkel mit einander machen, so verhalten sich nach (6) die Seiten des Dreiecks wie die Producte p, q, r aus den Seiten und Diagonalen des Vierecks. Es wird daher auch umgekehrt von diesen drei Producten bei einem Viereck ein jedes, absolut genommen, kleiner als die Summe der beiden übrigen sein, so dafs man mit Linien, die ihnen proportional sind, ein Dreieck beschreiben kann; und in diesem Dreieck werden die Winkel die in (7) angegebenen Werthe haben, oder auch, nach dem Sinne, in welchem das Dreieck verzeichnet worden, den Ergänzungen dieser Werthe zu 360^0 gleich sein.

Immer aber sind bei den Formeln (6) und (7), wenn sie allgemeine Gültigkeit haben sollen, die positiven Richtungen der in ihnen vorkommenden Linien gehörig zu berücksichtigen. Ursprünglich können die positiven Richtungen der sechs je zwei der vier Puncte A, B, C, D verbindenden Geraden, ingleichen die von einer der Seiten des Dreiecks, es sei von GH, nach Belieben gewählt werden. Hiernach bestimmen sich die Vorzeichen der sieben Abschnitte AD, BD, ... AB und GH, und damit nach (6) die Vorzeichen, also auch die positiven Richtungen von HF und FG. Hiermit aber sind, wenn wir noch den positiven Sinn der Drehung in den Ebenen des Vierecks und des Dreiecks festgesetzt haben, die in (7) enthaltenen Winkel vollkommen bestimmt. Es bedeutet nämlich $HF^\wedge FG$ den Winkel, um welchen die durch H und F zu legende Gerade in positivem Sinne gedreht werden mufs, bis ihre positive Richtung mit der positiven Richtung der durch F und G zu legenden Geraden einerlei wird; und Analoges gilt von den übrigen Winkel-Ausdrücken. — Bemerken wir noch, dafs hiernach bei allen den Ausdrücken AD, BD, ... FG die Aufeinanderfolge der zwei Buchstaben eines jeden in der Proportion (6) wohl zu beachten ist, nicht mehr aber in den Gleichungen (7). Denn in (6) haben die Strecken GH und HG entgegenge-

setzte Werthe; dagegen wird in (7) durch GH eben so gut, als durch HG, eine durch G und H zu legende Gerade ausgedrückt.

Am einfachsten ist es nun, die positiven Richtungen der sieben Geraden AD, BD, ... AB und GH so zu bestimmen, dafs die gleichnamigen Ausdrücke ihrer Abschnitte in (6) positiv werden, also die positive Richtung in AD von A nach D gehend, u. s. w. anzunehmen. Damit werden auch die Abschnitte HF und FG positiv, folglich die Richtungen von H nach F und von F nach G positiv.

Da auf solche Weise in den Winkelgleichungen, wie sie in (7) geschrieben worden, die durch die Aufeinanderfolge der Buchstaben ausgedrückten Richtungen insgesammt positiv genommen werden können, so können wir, den Begriff der *positiven* Richtung ganz beseitigend, die Winkel-Ausdrücke in diesen Gleichungen auch also deuten, dafs wir $PQ^{\wedge}RS$ als den Winkel nehmen, um welchen die Linie PQ in positivem Sinne gedreht werden mufs, bis ihre durch die Stellung ihrer Buchstaben ausgedrückte Richtung von P nach Q mit der durch die Stellung der Buchstaben der andern Linie ausgedrückten Richtung von R nach S identisch wird.

Hiernach aber sind wir zugleich in den Stand gesetzt, den Winkelgleichungen eine leichter aufzufassende Form zu geben. Berücksichtigen wir nämlich, dafs $PQ^{\wedge}QP$ nach voriger Erklärung $=180^0$ ist, und drücken wir den Winkel $PQ^{\wedge}PR$ einfach, und wie es gewöhnlich ist, durch QPR aus, so wird

$$HF^{\wedge}FG = HF^{\wedge}FH + FH^{\wedge}FG = 180^0 + HFG,$$
$$BD^{\wedge}CD = 180^0 + DB^{\wedge}CD = 2.180^0 + DB^{\wedge}DC = BDC,$$
$$CA^{\wedge}AB = 180^0 + AC^{\wedge}AB = 180^0 + CAB, \text{ u. s. w.}$$

und die Gleichungen (7) reduciren sich damit auf

$$(8)\quad \begin{cases} HFG = BDC + CAB = ACD + DBA, \\ FGH = CDA + ABC = BAD + DCB, \\ GHF = ADB + BCA = CBD + DAC; \end{cases}$$

wofür wir auch, weil $CAB + BAC = AC^{\wedge}AB + AB^{\wedge}AC = AC^{\wedge}AC = 0$, u. s. w. ist, schreiben können:

$$(8^*)\quad \begin{cases} HFG = BDC - BAC = DBA - DCA, \\ FGH = CDA - CBA = DCB - DAB, \\ GHF = ADB - ACB = DAC - DBC. \end{cases}$$

Während wir also die Aufeinanderfolge der Buchstaben bei deren paarweisen Verbindungen anfänglich nur in der Gleichung (6) zwischen Abschnitten, nicht mehr aber in den Winkelgleichungen (7) zu beachten hatten, kommt jetzt, umgekehrt, die Stellung der Buchstaben blofs bei letztern Gleichungen in Betracht und kann bei erstern ganz vernachlässigt werden, indem es bei der Construction des Dreiecks FGH mittels der Seiten desselben blofs auf die absoluten Werthe der Producte p, q, r ankommt, denen die Seiten proportional sein sollen; und wir sind somit, ohne dafs die allgemeine Anwendbarkeit der Gleichungen in Etwas beeinträchtigt würde, einer vorläufigen Bestimmung der positiven Richtungen der Linien ganz überhoben.

Übrigens müssen die Gleichungen (8) und (8*), die wir unter der Hypothese entwickelten, dafs die sieben durch AD, ... AB und GH ausgedrückten Richtungen insgesammt positiv seien, auch unter jeder andern Hypothese über diese Richtungen sich wieder finden. Nehmen wir z. B. von jenen sieben Richtungen CA negativ an und lassen die sechs übrigen positiv, so wird nach (6) HF negativ, FG aber bleibt positiv. Damit ist in den Gleichungen (7), um die zuletzt gegebene Definition eines Winkel-Ausdrucks auf sie anwendbar zu machen, AC und FH statt CA und HF zu schreiben. Die erste und die dritte derselben, denn nur hierin kommen diese Richtungen vor, verwandeln sich dadurch in

$$FH^{\wedge}FG = BD^{\wedge}CD + AC^{\wedge}AB = \cdots,$$
$$GH^{\wedge}FH = AD^{\wedge}BD + BC^{\wedge}AC = \cdots,$$

und man sieht von selbst, wie diese Gleichungen mit den entsprechenden in (8) übeinstimmen.

Das Resultat endlich, das durch (6) und (8) oder (8*) ausgedrückt wird, liefse sich etwa also in Worte fassen:

Hat man in einer Ebene vier Puncte (A, B, C, D) *und multiplicirt den gegenseitigen Abstand je zweier derselben mit dem gegenseitigen Abstande der jedesmal zwei übrigen, so kann man mit Linien, welche den drei erhaltenen Producten proportional sind, ein Dreieck* (FGH) *construiren. Jeder Winkel* (wie F) *dieses Dreiecks aber ist dem Unterschiede der Winkel gleich, unter welchen von den zwei Abständen* (DA und BC), *deren Product der dem Winkel gegenüberliegenden Dreiecksseite* (GH) *proportional ist, der eine Abstand von den Endpuncten*

des andern aus (*BC* von *D* und *A* aus oder, welches gleichviel ist, *DA* von *B* und *C* aus betrachtet) ***erscheint.***

Hieran knüpft sich unmittelbar die merkwürdige Folgerung: ***Sind bei einem ebenen Viereck von den drei Verhältnissen zwischen den gedachten drei Producten und von den gedachten drei Winkeldifferenzen, sind von diesen sechs Stücken irgend zwei gegeben, so kann man daraus die vier übrigen finden,*** — ganz eben so, wie man bei einem Dreieck aus irgend zweien der sechs Stücke, nämlich der drei Verhältnisse zwischen den Seiten und der drei Winkel, die vier übrigen bestimmen kann.

Eine besondere Erwähnung dürften noch die nachstehenden zwei speciellen Fälle verdienen.

1. Sind drei der vier Puncte $A, \dots D$, etwa A, B, C gleichweit von einander entfernt, ist also D irgend ein Punct in der Ebene eines gleichseitigen Dreiecks ABC, so verhalten sich die Producte p, q, r wie AD, BD, CD. Man kann folglich alsdann mit AD, BD, CD selbst ein Dreieck construiren, und die Winkel dieses Dreiecks werden resp. $= BDC - BAC$, u. s. w. sein.

2. Sind P, Q, R, S vier Puncte eines Kreises, so ist, jenachdem R und S auf einerlei, oder verschiedenen Seiten der Geraden PQ liegen, der Winkel-Unterschied $PRQ - PSQ$ entweder $= 0$, oder $= 180^0$, — vorausgesetzt immer, dafs alle in derselben Ebene enthaltenen Winkel nach einerlei Sinne gerechnet werden.

Liegen daher die vier Puncte A, B, C, D in einem Kreise, und zwar C und D auf verschiedenen Seiten von AB, so ist $BDC - BAC = 0$, $CDA - CBA = 0$, $ADB - ACB = 180^0$; folglich nach (8*)

$$1)\ HFG = 0, \qquad 2)\ FGH = 0, \qquad 3)\ GHF = 180^0.$$

Wegen 1) haben FH und FG einerlei Richtung, desgleichen GF und GH wegen 2). Mithin, und wie auch schon aus 3) allein folgt, liegen jetzt F, G, H in gerader Linie, H zwischen F und G; und es ist daher in absolutem Sinne, d. h. abgesehen von der durch die Stellung der Buchstaben angedeuteten Richtung: $GH + HF = FG$. Hieraus aber folgt nach (6) die allbekannte Gleichung zwischen den Seiten und Diagonalen eines in einen Kreis beschriebenen Vierecks:

$$AD.BC + BD.CA = CD.AB.$$

Harmonische Lage von vier Puncten in einer Ebene.

Wenn wir in der zu Anfange des vorigen Artikels aufgestellten zwischen je vier Puncten einer Geraden gültigen Gleichung zwei der drei Producte, deren Summe null war, etwa die zwei ersten, einander gleich setzen, also

$$(1)\quad AD.BC = BD.CA$$

annehmen, so reducirt sich jene Gleichung auf

$$(2)\quad 2BD.CA = BA.CD.$$

Bezeichnet ferner M den Mittelpunct von AB, also einen dergestalt in der Geraden liegenden Punct, dafs

$$(3)\quad MA + MB = 0$$

ist, so hat man

$$AD = MD - MA,\ BC = MC - MB = MC + MA,$$
$$BD = MD - MB = MD + MA,\ CA = MA - MC.$$

Mit diesen Werthen für AD, BC, u. s. w. geht (1) über in

$$(4)\quad MA^2 = MC.MD.$$

Eine andere Form, die man der Gleichung (1) geben kann, ist

$$(CA - CD)CB = (CD - CB)CA,$$

d. i.

$$2CA.CB = CD(CA + CB),$$

oder, weil $CA + CB = CM + MA + CM + MB = 2CM$ ist,

$$(5)\quad CA.CB = CD.CM;$$

und solcher Umwandlungen von (1) liefsen sich noch verschiedene andere bewerkstelligen.

Wenden wir auf die jetzt gemachten die im Obigen erörterte Methode an, so wird, wenn man zu drei nicht in einer Geraden liegenden Puncten A, B, C einen in ihrer Ebene begriffenen Punct D so bestimmt, dafs

$$[1]\quad [AD][BC] = [BD][CA]$$

ist, — so wird dann auch

$$[2]\quad 2[BD][CA] = [BA][CD]$$



sein; und wenn man einen Punct M hinzufügt, so dafs

$$[3] \quad [MA] + [MB] = 0,$$

so wird man noch

$$[4] \quad [MA]^2 = [MC][MD]$$

und
$$[5] \quad [CA][CB] = [CD][CM] \text{ haben.}$$

Nun wird durch die Gleichung (1), die man auch in Form der Proportion

$$CA : CB = -DA : DB$$

schreiben kann, ausgedrückt, dafs die Linie AB in C und D nach Verhältnissen getheilt wird, deren Exponenten einander gleich und entgegengesetzt sind. Bekanntlich ist dieses die Definition der harmonischen Theilung von AB in C und D, sowie von CD in A und B. Man wird daher auch sagen können, dafs zwei in einer Ebene enthaltene Paare von Puncten, A und B, C und D, eine harmonische Lage gegen einander haben, wenn zwischen den complexen Werthen der Abstände der Puncte des einen Paares von denen des andern die Gleichung [1] besteht. Und so wie die aus (1) fliefsenden Gleichungen (2), (4), (5) noch andere Eigenschaften zweier in einer Geraden harmonisch liegenden Paare von Puncten ausdrücken, so werden durch [2], [4], [5] die entsprechenden Eigenschaften zweier harmonischen Paare in einer Ebene dargestellt werden.

Es ist jetzt noch übrig die reelle Bedeutung von [1]...[5] zu entwickeln. — Die Gleichung [1] ist identisch mit

$$(a) \quad \frac{[CB][DA]}{[CA][DB]} = -1.$$

Es ist aber

$$\frac{[CB]}{[CA]} = \frac{CB.\varphi(x^\wedge CB)}{CA.\varphi(x^\wedge CA)} = \frac{CB}{CA}\cdot\varphi(CA^\wedge CB), \text{ und eben so}$$

$$\frac{[DA]}{[DB]} = \frac{DA}{DB}\varphi(DB^\wedge DA). \text{ Damit verwandelt sich } (a) \text{ in}$$

$$(b) \quad \frac{CB}{CA}\cdot\frac{DA}{DB}\varphi(\alpha) = -1, \text{ wo}$$

$$\alpha = CA^\wedge CB + DB^\wedge DA = CA^\wedge CB - DA^\wedge DB.$$

Die Gleichung (b) kann aber nicht anders bestehen, als wenn $\varphi\alpha$ einen reellen Werth hat, also entweder $= 1$ oder -1, und damit α entweder $= 0$, oder $= 180^0$ ist. Beide Hypothesen führen zu demselben Resultate.

Nehmen wir die letztere an, so wird

$$(c)\quad CB.DA = CA.DB \quad \text{und} \quad (d)\quad CA^{\wedge}CB - DA^{\wedge}DB = 180^0.$$

In Folge von (c) können wir die Richtungen von CA, CB, DA, DB sämmtlich positiv sein lassen und alsdann, den im vorigen Artikel gegebenen Erörterungen gemäfs, statt (d) auch schreiben:

$$(e)\quad ACB - ADB = 180^0.$$

Die harmonische Lage der Punctenpaare A und B, C und D in einer Ebene wird hiernach durch die zwei Gleichungen (c) und (e) bedingt. Wegen (e) *müssen die vier Puncte in einem Kreise liegen, und zwar* C und D auf verschiedenen Seiten von AB, also *in der Folge* A, C, B, D. Wegen (c) *müssen die zwei Producte der gegenüberliegenden Seiten des Vierecks ACBD einander gleich sein.* Auch kann statt (c) die leicht aufzufassende Proportion

$$CA : CB = DA : DB \quad \text{oder} \quad AC : AD = BC : BD$$

gesetzt werden.

Was nun die übrigen Eigenschaften der harmonischen Lage betrifft, so folgt zunächst aus der Gleichung [2], wenn man sie ähnlicherweise wie [1] behandelt, aufser der Gleichheit der Winkel ABD und ACD und der daraus fliefsenden Kreislage der vier Puncte, dafs die Gleichung (2) auch für die Ebene gilt, und dafs somit das Product aus den Diagonalen des Vierecks $ACBD$ doppelt so grofs als das Product des einen oder des andern Paars gegenüberliegender Seiten ist, — was auch unmittelbar aus der eben aufgestellten Definition der harmonischen Lage in Verbindung mit dem Satze am Ende des vorigen Artikels hervorgeht.

Aus [3] ersieht man leicht, dafs M auch jetzt noch der Mittelpunct der Linie AB ist. — Die Gleichung [4] wird nach dem bei [1] gezeigten Verfahren:

$$\frac{MA}{MC} \cdot \frac{MA}{MD} \varphi(\alpha) = 1, \quad \text{wo } \alpha = MC^{\wedge}MA + MD^{\wedge}MA.$$

Nehmen wir hierin die Richtungen MA, MC, MD positiv, so mufs $\varphi(\alpha) = 1$, also $\alpha = 0$ sein. Dies giebt die Winkelgleichung $CMA = AMD$ und die Proportion $MC : MA = MA : MD$. Aus beiden in Verbindung folgt die Ähnlichkeit und ähnliche Lage der Dreiecke CMA und AMD; und dasselbe mufs auch von den Dreiecken CMB und BMD gelten.

Auf gleiche Weise folgt endlich aus [5], dafs auch die Dreiecke CMB und CAD, sowie CMA und CBD einander ähnlich und in ähnlicher Lage sind.

Bei zwei in einer Ebene harmonisch liegenden Paaren von Puncten A und B, C und D sind demnach, wenn M den Mittelpunct des einen Paares AB bezeichnet,

die Dreiecke CMA, AMD, CBD, ingleichen
die Dreiecke CMB, BMD, CAD

einander ähnlich und in ähnlicher Lage.

Noch läfst sich aus der Gleichheit der Winkel CMA und AMD eine sehr einfache Construction folgern, um, wenn von zwei harmonischen Paaren von Puncten das eine Paar A und B, und der eine Punct C des andern Paares gegeben sind, den andern Punct D des letztern zu finden. Man beschreibe nämlich durch A, B, C einen Kreis, trage auf diesen von B aus einen Bogen BE, gleich und in gleichem Sinne mit dem Bogen CA, und lege durch E und den Mittelpunct M der Linie AB eine Gerade, so wird der zweite Durchschnitt derselben mit dem Kreise der gesuchte Punct D sein.

Man kann den Punct D auch dadurch finden, dafs man in A und B an den Kreis zwei Tangenten legt und den gegenseitigen Durchschnitt derselben, welcher F heifse, mit C durch eine Gerade verbindet; denn diese wird den Kreis zum zweitenmale in D schneiden. — In der That sind nach dieser Construction die Dreiecke AFC und DFA, sowie die Dreiecke BFC und DFB einander ähnlich; mithin

$$AC:DA = FC:FA \quad \text{und} \quad BC:DB = FC:FB,$$

woraus, wegen $FA = FB$, die Fundamentalproportion

$$AC:DA = BC:DB$$

folgt.

Je zwei Puncte C und D eines Kreises, so schliefsen wir hieraus noch, *welche mit zwei bestimmten Puncten A und B des Kreises in Harmonie sind, liegen* demnach *mit einem bestimmten Puncte F in gerader Linie.* — Rückt C unendlich nahe an A oder an B, so thut dasselbe, in Folge der Fundamentalproportion, auch D, und es mufs daher, wie wir bereits wissen, auch jede der beiden an A und B gelegten Tangenten den Punct F treffen.

Auf ähnliche Art, wie die harmonische Theilung einer Linie, habe ich auch die Eigenschaften der Involution von sechs Puncten in einer Geraden auf die Ebene überzutragen gesucht. Die sehr merkwürdigen Resultate, die ich hierbei gefunden, so wie eine neue Art von Verwandtschaft zwischen ebenen Figuren, eine Verwandtschaft, die sich mir durch Übertragung collinear verwandter Systeme von Puncten in einer Geraden auf die Ebene ergab, gedenke ich später mitzutheilen und will hier nur noch bemerken, dafs aus dieser neuen Verwandtschaft eben so, wie aus jeder der schon bekannten, eine besondere Classe von Aufgaben entspringt, und dafs die einfachste dieser Aufgaben die bereits im vorigen Artikel erwähnte ist, wonach bei einem Viereck aus irgend zweien gewisser sechs Stücke jedes der vier übrigen gefunden werden kann.

16.

Die Eigenschaften der Wellenflächen der zwei-axigen Krystalle, mittels der höhern Geometrie abgeleitet.

(Von Herrn *Paul Zech* zu Tübingen.)

Wenn die analytische Geometrie durch verwickelte Formeln zu einem im Verhältnifs einfachen Resultat kommt, so deutet das an, dafs man durch rein geometrische Betrachtungen leichter zum Ziel gelangt; und dabei hat dieser zweite Weg den Vortheil der *Anschauung:* ein Vortheil, der um so gröfser ist, wenn es sich um die Vorstellung einer *Fläche* handelt. In wie weit dieser Satz richtig sei, mag die folgende rein geometrische Untersuchung der *Wellenfläche der zwei-axigen Krystalle* als Beispiel zeigen.

Um Zweideutigkeiten zu vermeiden, sende ich zwei Bemerkungen voraus:

Stellt man sich in einem Punct eines zwei-axigen Krystalls das Elasticitäts-Ellipsoïd construirt vor, und eine ebene Welle durch denselben Punct, so schneidet diese Welle das Ellipsoïd in einer Ellipse, deren Axen die Richtung und Fortpflanzung der Schwingungen in der ebenen Welle bestimmen. *Fresnel* giebt jeder Schwingung eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit, gleich dem reciproken Werth der ihr parallelen Axe; die Theorie der Elasticität setzt die auf der Schwingung *senkrechte* Axe an die Stelle der *parallelen;* die Erfahrung hat bis jetzt darüber nicht entschieden: die Theorie ist kein Grund, von der gewöhnlicheren *ersten* Anschauung abzugehen, ich bleibe daher bei *Fresnel's* Vorstellung.

Der Name *„optische Axen"* wird verschieden gebraucht: entweder für die Senkrechten auf den Kreisschnitten des Elasticitäts-Ellipsoïds, oder für die Axen der konischen Refraction. Bei geometrischen Betrachtungen könnte man den Namen ganz umgehen; allein da er sich durch seine Kürze empfiehlt, wende ich ihn an; und zwar für beide Paare von Axen, da das eine Paar die gleiche geometrische Bedeutung für das Elasticitäts-Ellipsoïd hat, wie das andere für dessen Polar-Ellipsoïd: ich unterscheide daher *„optische Axen des Elasticitäts-Ellipsoïds"* und *„optische Axen seines Polar-Ellipsoïds."*

1.

Wir gehen aus von folgenden Gesetzen der Physik: Innerhalb eines zwei-axigen Krystalls finden die Lichtschwingungen einer gegebenen ebenen Welle in zwei Ebenen von bestimmter Lage Statt. Stellt man sich nemlich durch einen Punct der ebenen Welle drei auf einander senkrechte Gerade vor, deren Richtung die der Haupt-Elasticitätskräfte des Krystalls und deren Länge (von dem Puncte aus) den Quadratwurzeln dieser Kräfte beziehungsweise proportional ist, und construirt über diesen drei Strecken, als Halb-Axen, ein Ellipsoïd, so geben die Halb-Axen der Ellipse, in der das Ellipsoïd von der ebenen Welle geschnitten wird, die Richtungen der der Welle zugehörenden Schwingungen (die somit in die Wellen-Ebene fallen), und ihre reciproken Werthe sind die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der ihnen parallelen Schwingungen in einer zur ebenen Welle senkrechten Richtung. Die Schwingungen bleiben sich parallel bei der Fortpflanzung.

Der Kürze wegen bezeichne man mit E das Elasticitäts-Ellipsoïd, mit O seinen Mittelpunct, mit W eine ebene Welle durch O, mit ON die Senkrechte zu W in O, wobei N auf dem Ellipsoïd E liegt.

Das Ellipsoïd E wird von zwei zur Ebene der mittlern und kleinsten Axe gleich geneigten Ebenen in Kreisen geschnitten, die auf einer concentrischen Kugel mit einem Halbmesser gleich der mittlern Axe liegen. Die auf diesen Kreisschnitten senkrechten Durchmesser nenne man „optische Axen des Ellipsoïds E" und bezeichne ihre Endpuncte mit AA' und BB', wobei A, B und A', B' symmetrisch zur kleinsten Axe liegen.

2.

W schneidet das Ellipsoïd E in einer Ellipse, deren Axen die Schwingungsrichtungen in W bezeichnen. Zwei Radien dieser Ellipse von gleicher Gröfse liegen in den beiden Kreisschnitten von E; und da sie gleich sind, so werden ihre Winkel durch die Axen der Ellipse halbirt. Zwei Ebenen senkrecht zu diesen zwei Radien in O gehen durch die optischen Axen und schneiden sich in der Senkrechten ON zu W: die Winkel dieser zwei Ebenen werden halbirt durch die zwei Ebenen, deren jede die Senkrechte ON und eine Ellipsen-Axe enthält, oder durch die zwei Schwingungs-Ebenen der ebenen Welle W. Die Schwingungs-Ebenen einer ebenen Welle halbiren also die Winkel der zwei Ebenen durch die Senkrechte zur Wellen-Ebene und durch die beiden optischen Axen.

Construirt man durch die Senkrechte *ON* einen Kegel, der die optischen Axen zu Focal-Linien hat, so halbiren die Berührungs- und Normal-Ebene längs *ON* die Winkel der zwei Ebenen durch *ON* und die optischen Axen. Mit andern Worten: *die Schwingungs-Ebenen einer ebenen Welle W sind die Berührungs- und Normal-Ebene an den Kegel durch die Senkrechte ON, der die optischen Axen zu Focal-Linien hat, längs dieser Senkrechten.*

Durch die Senkrechte *ON* giebt es zwei Kegel, die die optischen Axen zu Focal-Linien haben. Da sie homofocal sind, so schneiden sie sich unter rechten Winkeln; die Berührungs-Ebene des einen, längs *ON*, ist Normal-Ebene des andern. Umschliefst der eine Kegel K_1 mit einem und demselben Mantel die optischen Halb-Axen *OA* und *OB*, so umschliefst der andere K_2 mit Einem Mantel die optischen Halb-Axen *OA'* und *OB*, oder *OA* und *OB'*. Die Normal-Ebene längs *ON* an K_1 enthält die eine, die Normal-Ebene längs *ON* an K_2 die andere der Ellipsen-Axen, denen die Schwingungen parallel sind. Die Schwingungen sind, die eine normal zu K_1 tangentiell zu K_2, die andere tangentiell zu K_1 und normal zu K_2.

Construirt man den Ergänzungskegel C_1 von K_1, welcher durch die auf den Kanten von K_1 in *O* senkrechten Ebenen eingehüllt wird, oder, was dasselbe ist, die in *O* auf den Berührungs-Ebenen von K_1 senkrechten Geraden zu Kanten hat, und nennt man *„entsprechende Kanten"* beider Kegel zwei Kanten, von denen jede auf der Berührungs-Ebene längs der andern senkrecht steht, so folgt, dafs eine Ebene durch zwei entsprechende Kanten Normal-Ebene zu beiden Kegeln ist. Stellt man sich die Kanten des Kegels C_1 begränzt durch das Ellipsoïd *E* vor, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der zu einer Kante des Kegels K_1 normalen Schwingung die reciproke Länge der entsprechenden Kante des Kegels C_1; denn diese Kante ist nichts Anderes, als die Ellipsen-Axe, welcher die Schwingung parallel ist.

3.

Der Kegel K_1 hat die optischen Axen zu Focal-Linien; der Ergänzungskegel C_1 wird daher in Kreisen geschnitten, von Ebenen die senkrecht sind zu den optischen Axen, d. h. von denselben Ebenen, die das Ellipsoïd *E* in Kreisen schneiden. Und daraus folgt, dafs sich C_1 *und E in einer Curve schneiden, die auf einer concentrischen Kugel liegt, d. h. in einem sphärischen Kegelschnitt.*

Denn schneidet man ein Ellipsoïd durch eine concentrische Kugel, so liegt die Schnittcurve auf einem concentrischen Kegel, weil Ellipsoïd und Kugel die unendlich ferne Ebene als gemeinschaftliche Polar-Ebene ihres Mittelpuncts haben. Diese drei Flächen vom zweiten Grade gehen durch dieselbe Curve, folglich haben ihre Schnitte durch eine beliebige Ebene vier Puncte gemein. Das Ellipsoïd und die Kugel werden von einer Ebene durch den Mittelpunct, die das Ellipsoïd in einem Kreise schneidet, in zwei concentrischen Kreisen geschnitten, also der Kegel in einem Kegelschnitt, welcher zwei gemeinschaftliche Sehnen mit diesen zwei concentrischen Kreisen hat, ihnen also ähnlich und concentrisch, d. h. ebenfalls ein concentrischer Kreis ist (der sich hier auf einen Punct reducirt). Hat man also einen Kegel, der von denselben Ebenen wie ein Ellipsoïd in Kreisen geschnitten wird und ihm concentrisch ist, so kann man ihn sich dadurch entstanden vorstellen, dafs man durch die Schnittlinie des Ellipsoïds und einer bestimmten concentrischen Kugel einen concentrischen Kegel legt.

Alle Kanten des Kegels C_1 sind also, soweit sie innerhalb des Ellipsoïds fallen, gleich lang; oder alle zu K_1 normalen Schwingungen pflanzen sich mit derselben Geschwindigkeit fort. Dasselbe gilt vom Kegel K_2 und seinem Ergänzungskegel C_2

4.

Stellt man sich in einem Punct eines zwei-axigen Krystalls ebene Wellen von allen möglichen Stellungen vor, so finden in jeder zwei auf einander senkrechte Schwingungen in bekannten Richtungen Statt. Bei der Fortpflanzung trennt sich jede ebene Welle W in zwei neue W_1 und W_2, deren jede nur Eine Schwingung enthält. Nach einer bestimmten Zeit haben W_1 und W_2 bekannte Stellungen eingenommen, und die von allen diesen Ebenen eingehüllte Fläche heifst „*Wellenfläche der zwei-axigen Krystalle.*"

Die Wellenfläche ist damit vollkommen bestimmt. Um jedoch ein anschauliches Bild von ihr zu bekommen, suche man sie durch ***Puncte*** zu bestimmen, indem man für eine beliebige Berührungs-Ebene den Berührungspunct sucht.

Wir setzen in der Nähe der Normale ON zu W eine Normale ON' zu einer andern Welle W', so dafs ON und ON' auf demselben Kegel K liegen, der die optischen Axen zu Focal-Linien hat. W und W' rücken in einer bestimmten Zeit um dieselbe Länge vor, wenn man nur die Schwin-

gungen senkrecht zu K betrachtet; nemlich um die reciproke Länge der Kanten des Ergänzungskegels von K. Ihre Spuren auf ON und ON' seien M und M', ihre Spuren in der Ebene NON' seien MM'' und $M''M'$: dann ist $OMM''M'$ ein bei M und M' rechtwinkliges Viereck mit zwei Paaren gleicher in O und M'' zusammenstofsender Seiten; und die Schnittlinie der neuen Wellenlagen ist senkrecht zur Ebene NON' in M''. Rückt ON' näher an ON, so bleibt dieser Satz richtig; und fällt ON' und ON zusammen, so ist NON' Berührungs-Ebene an K längs ON, M'' fällt mit M zusammen und die Senkrechte in M'', als Schnittlinie zweier unendlich nahen Berührungs-Ebenen an die Wellenfläche, enthält den Berührungspunct: *es liegt daher dieser in der Normal-Ebene zu K längs ON, und daher auf der W für den Kegel K zukommenden Schwingungsrichtung.*

Um auf dieser Geraden den Berührungspunct zu finden, führe man ein Ellipsoïd $\mathfrak{E}$ ein, welches durch die Polar-Ebenen aller Puncte des Ellipsoïds E in Beziehung auf eine concentrische Kugel vom Halbmesser, gleich der Längen-Einheit, eingehüllt wird. Der Pol einer Berührungs-Ebene an E ist der Punct, wo die Polar-Ebene des Berührungspuncts das Ellipsoïd $\mathfrak{E}$ berührt, und liegt auf der Senkrechten von O auf die Berührungs-Ebene an E. Man wende diesen Satz an.

Wir stellen uns den Schnitt des Ellipsoïds E und der Normal-Ebene zu K durch ON und die entsprechende Kante OS vor, S liege auf dem Ellipsoïd E, T' sei seine Polar-Ebene. Da OS Axe einer auf ON senkrechten Ellipse ist, so steht die Tangente an diese Ellipse in S senkrecht auf der Ebene NOS, also die Berührungs-Ebene an E in S senkrecht auf derselben Ebene, folglich liegt die Senkrechte von O auf diese Berührungs-Ebene, in der Ebene NOS, also der Berührungspunct R' der Polar-Ebene T' von S und des Ellipsoïds $\mathfrak{E}$ ebenfalls in der Ebene NOS. T' schneide OS in M': so ist OM' die reciproke Länge von OS, also T', eben so weit vom Ursprung entfernt als die auf ON senkrechte Berührungs-Ebene T an die Wellenfläche, welche ihre Schwingung in der Ebene NOS hat. Schneidet T die Senkrechte ON zu W in M, so fällt, wenn man das Dreieck $OM'R'$ in seiner Ebene um O um einen rechten Winkel dreht (in der Richtung gegen die OS entsprechende Kante ON), M' auf M und R' auf einen Punct R, welcher der Berührungspunct der Ebene T mit der Wellenfläche ist.

Denn es sei ON' in der Ebene NOS eine Wellennormale in der Nähe von ON, OS' ihre entsprechende Kante, die im Allgemeinen nicht in

NOS liegt. Die Polar-Ebene T' von S' schneide $M'R'$ in Q', die auf ON' senkrechte Berührungs-Ebene T an die Wellenfläche schneide MR, die Senkrechte auf ON in M, im Puncte Q. T und T' haben denselben Abstand vom Mittelpunct O, aber T' ist nicht senkrecht auf NOS, daher ist MQ verschieden von $M'Q'$. Je mehr aber ON' sich ON nähert, um so mehr nähert sich der Winkel von T' und NOS einem Rechten, und es streben daher $M'Q'$ und MQ derselben Länge zu. Fällt ON' mit ON zusammen, so ist Q' der Berührungspunct R' von T' mit $\mathfrak{E}$, und Q der Berührungspunct R von T mit der Wellenfläche; die Dreiecke $OM'R'$ und OMR sind congruent.

Nun ist aber die Berührungs-Ebene T' an $\mathfrak{E}$ in R' senkrecht zu OS (als Polar-Ebene von S), also senkrecht zur Ebene NOS, mithin ist die Tangente in R' an eine auf NOS senkrechte Ellipse des Ellipsoïds $\mathfrak{E}$ senkrecht auf OR', oder OR' ist eine Axe dieser Ellipse, die auf OR senkrecht steht.

Zieht man also einen beliebigen Radius und schneidet auf ihm die Länge einer Axe der auf dem Radius in O senkrechten Ellipse des Polar-Ellipsoïds ab, so hat man einen Punct der Wellenfläche.

5.

Aus dem Polar-Ellipsoïd $\mathfrak{E}$ läfst sich daher die Wellenfläche punctweise finden, und es leuchtet ein, dafs sie die drei Haupt-Ebenen der beiden Ellipsoïde zu Symmetral-Ebenen hat und mit beiden concentrisch ist.

Es seien $a > b > c$ die drei Halb-Axen des Polar-Ellipsoïds $\mathfrak{E}$. Von einer concentrischen Kugel vom Halbmesser b wird $\mathfrak{E}$ in zwei Kreisen geschnitten. Die Senkrechten auf diese Kreisschnitte in O nenne man „*optische Axen* des Ellipsoïds $\mathfrak{E}$." Man stelle sich die zwei Reihen von Kegeln vor, die diese Axen zu Focal-Linien haben und die sich senkrecht durchschneiden. Die erste Reihe von Kegeln k_1 schliefsen mit einem und demselben Mantel zwei optische Halb-Axen des Ellipsoïds $\mathfrak{E}$ ein, welche symmetrisch zur Axe c liegen; die zweite Reihe von Kegeln k_2 zwei optische Halb-Axen, welche symmetrisch zur Axe a liegen. Oder anders ausgedrückt: die erste Reihe hat ihre eingeschlossene Axe in der Axe c, die zweite in der Axe a. Die erste Reihe schneidet die Ellipse (a, c) zwischen einer grofsen Halb-Axe a und einer optischen Halb-Axe, die zweite Reihe schneidet dieselbe Ellipse zwischen einer optischen Halb-Axe und einer kleinsten Halb-Axe c.

Die Ergänzungskegel der ersten Reihe k_1 haben daher eine Kantenlänge $> c$ und $< b$, die der zweiten $k_2 > b$ und $< a$; mit andern Worten:

die Puncte der Wellenfläche auf der ersten Reihe von Kegeln k_1 haben eine Entfernung vom Mittelpunct zwischen c und b, die auf der zweiten Reihe von Kegeln k_2 zwischen b und a. Die Puncte auf jedem Kegel sind gleich weit vom Mittelpunct entfernt, liegen also auf einem sphärischen Kegelschnitt.

Um ein ganz bestimmtes Bild zu gewinnen, betrachte man eine Hälfte des Polar-Ellipsoïds $\mathfrak{E}$ mit dem Hauptschnitt (a, b) als horizontale Basis, die Halb-Axe c vertical nach oben. Man bezeichne durch OX, OY, OZ die Richtungen der Halb-Axen a, b, c.

Der weiteste Kegel der ersten Reihe k_1 ist die Basis selbst, die Kantenlänge des Ergänzungskegels ist c; die Wellenfläche beginnt also mit einem Kreise vom Halbmesser c in der Basis. Die folgenden Kegel k_1 bewegen sich, langsamer in der Richtung OX, schneller in der Richtung OY. Die sphärischen Kegelschnitte, die auf ihnen und zugleich auf der Wellenfläche liegen, haben zwei Scheitel in XOZ auf einer Ellipse, mit den Axen c längs OX, a längs OZ, die zwei andern in YOZ auf einer Ellipse, mit den Axen c längs OY, b längs OZ; wie es sich leicht aus der Betrachtung der Kanten ergiebt, die den in XOZ und YOZ liegenden Kanten der Kegel k_1 entsprechen.

Die sphärischen Kegelschnitte bauen sich also, von dem Kreise mit dem Halbmesser c in der Basis aus, in der Art auf, dafs die beiden Scheitel in XOZ auf der Ellipse (c, a) langsamer in die Höhe rücken, als die zwei Scheitel in YOZ auf der Ellipse (c, b), so dafs zuletzt, wenn die zwei letzten Scheitel in YOZ schon bis zum Scheitel ihrer Ellipse gekommen sind, wo sie zusammenfallen, die beiden andern Scheitel in XOZ erst die optischen Axen des Ellipsoïds $\mathfrak{E}$ erreicht haben. Damit ist man bis zum letzten Kegel der ersten Reihe gekommen; der ihm entsprechende sphärische Kegelschnitt ist ein begränzter Kreisbogen vom Halbmesser b in XOZ, begränzt durch die optischen Axen, und die kleinste Halb-Axe schneidend. Dieser Bogen ist der Schlufsstein des Gewölbes, das der ersten Reihe von Kegeln entspricht.

Nun schliefsen sich die Kegel der zweiten Reihe an. Sie umschliefsen mit Einem Mantel zwei optische Halb-Axen des Ellipsoïds $\mathfrak{E}$, von denen nur Eine in dem Halb-Ellipsoïd liegt. Man nehme also, um bei demselben Halb-Ellipsoïd zu bleiben, zwei Hälften der zwei sphärischen Curven an, die jedem Kegel zukommen. Dann erhält man zwei hyperbolische Äste, deren jeder mit einem Puncte in XOZ zwischen den optischen Axen beginnt und zu beiden Seiten von XOZ symmetrisch gegen die Ebene XOY herabläuft.

Der erste sphärische Kegelschnitt dieser Reihe wird von den zwei begränzten Kreisbogen vom Halbmesser b gebildet, die von den optischen Axen zu den beiden gröfsten Halb-Axen herablaufen. Diese sphärische Curve hat zwei Puncte, welche auf den optischen Axen liegen, mit der letzten der ersten Reihe gemein. Die folgenden sphärischen Curven der zweiten Reihe haben, jeder Ast, einen Scheitel in XOZ zwischen den optischen Halb-Axen auf einer Ellipse mit den Axen c längs OX, a längs OZ, und zwei Endpuncte (Scheitel für die vollständige Curve) in XOY, symmetrisch zu XOZ auf einer Ellipse mit den Axen b längs OX, a längs OY. Der Scheitel bewegt sich langsamer als die Endpuncte, die Curven dehnen sich in der Richtung OY aus, so dafs, wenn der Scheitel in seinem höchsten Punct in der Entfernung a vom Mittelpunct auf OZ angekommen ist, die beiden Endpuncte sich in YOZ in derselben Entfernung a vom Mittelpunct befinden. Der letzte Kegel dieser Reihe ist die Ebene YOZ; der entsprechende sphärische Kegelschnitt ein Halbkreis vom Halbmesser a. Dieser Halbkreis ist der Schlufsstein des Gewölbes, das der zweiten Reihe von Kegeln entspricht.

Die auf Kugeln von immer gröfserem Halbmesser liegenden sphärischen Kegelschnitte der ersten Reihe bilden also einen innern Mantel, der mit einem begränzten Kreisbogen schliefst. An den Endpuncten dieses Kreisbogens schliefst sich ein äufserer Mantel an, beginnend mit den Resten dieses Kreisbogens, schliefsend mit einem Halbkreise in einer zur Ebene desselben Kreisbogens senkrechten Ebene. Die zwei Mäntel haben nur zwei Puncte gemein; denn es giebt nur zwei sphärische Kegelschnitte, die auf derselben Kugel liegen, und diese zwei haben nur zwei Puncte gemein. In diesen zwei Puncten geht der eine Mantel in den andern über. (Die vollständige Fläche hat also vier ausgezeichnete Puncte.)

6.

Die erste Reihe von Kegeln schneidet auch den äufsern, die zweite Reihe den innern Mantel. Man suche die Natur dieser Curven.

Man ziehe irgend einen Radius, der das Ellipsoïd E in N schneidet. Die zwei Puncte auf dem Radius, die der Wellenfläche angehören, sind in Abständen α und β vom Mittelpunct gegeben durch die Axen der auf dem Radius senkrechten Ellipse des Ellipsoïds $\mathfrak{E}$. Die Berührungs-Ebene an $\mathfrak{E}$, welche auf dem Radius senkrecht steht und der Ebene jener Ellipse parallel

ist, hat den Abstand $\frac{1}{ON}$ vom Mittelpunct. Das Product:

$$\alpha . \beta . \frac{1}{ON}$$

ist also der Inhalt eines über drei conjugirten Halbmessern des Ellipsoïds $\mathfrak{E}$ beschriebenen Parallelepipeds: also constant, welche Richtung auch der Radius haben mag. Liegt der Radius beständig auf einem Kegel, der die optischen Axen von $\mathfrak{E}$ zu Focallinien hat, so ist auch eine der Ellipsen-Axe, z. B. α, constant, also ist $\beta . \frac{1}{ON}$ constant, d. h. der um β vom Mittelpunct entfernte Punct der Wellenfläche auf ON liegt auf einem dem Ellipsoïd E ähnlichen Ellipsoïd.

Schneidet also ein Kegel einen der Mäntel der Wellenfläche in einem sphärischen Kegelschnitt, so schneidet er den andern in einem ellipsoïdischen Kegelschnitt, der auf einem dem Ellipsoïd E ähnlichen Ellipsoïd liegt.

Durch jeden Punct der Wellenfläche gehen also zwei Curven, die auf zwei sich senkrecht schneidenden Kegeln liegen: die Tangente an die sphärische Curve ist senkrecht zur gemeinschaftlichen Kante, also senkrecht zur Berührungs-Ebene des Kegels, der die ellipsoïdische Curve enthält, und daher senkrecht auf der Tangente an diese Curve; d. h. *die sphärischen und ellipsoïdischen Kegelschnitte durchschneiden sich senkrecht.*

Die Schwingung in jedem Punct der Wellenfläche ist senkrecht zum sphärischen Kegelschnitt durch diesen Punct (3.), also tangentiell zum ellipsoïdischen Kegelschnitt. Man kann sich also die Schwingungen in der Art zur Anschauung bringen, dafs man sich die sphärischen Kegelschnitte vollkommen *biegsam* vorstellt und sich um Weniges (da die Schwingungen sehr klein sind) zusammenziehen und wieder ausdehnen läfst; und zwar so, dafs in allen Puncten der Curve Zusammenziehung und Ausdehnung zu gleicher Zeit beginnen und aufhören, weil die Puncte alle gleich weit vom Mittelpunct abstehen und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, der durch sie gehenden Strahlen dieselbe ist, also die Schwingungen gleiche Phasen haben.

7.

Es bleibt noch übrig, die Verhältnisse zu untersuchen, die sich an die Puncte der Wellenfläche knüpfen, wo beide Mäntel zusammenstofsen.

Es sei OA eine optische Halb-Axe des Ellipsoïds E, der darauf senkrechte Diametralschnitt ist ein Kreis; man erhält also unendlich viele auf OA

senkrechte Berührungs-Ebenen der Wellenfläche, die aber alle in Einer Ebene zusammenfallen. Suchen wir die Berührungspuncte.

Die Polar-Ebenen der Puncte des Kreisschnitts von E, der senkrecht auf OA steht, umhüllen einen geraden Cylinder, der das Ellipsoïd 𝕰 längs einer Ellipse berührt und dessen senkrechter Schnitt einen Halbmesser b hat, gleich der mittlern Halb-Axe des Ellipsoïds 𝕰. Es sei γ die Neigung der Ebene jener Berührungs-Ellipse gegen die Ebene des Kreisschnitts von E, und φ die Neigung irgend einer Ebene durch die optische Axe OA gegen die Ebene beider optischen Axen. Dann ist der Abstand des Puncts der Berührungs-Ellipse, der in der Ebene mit der Neigung φ liegt, von der Ebene des Kreisschnitts

$$= b.\cos\varphi.\operatorname{tg}\gamma.$$

Dreht man die Ebene mit der Neigung φ um O in sich selbst um einen rechten Winkel, so fällt dieser Punct der Berührungs-Ellipse in den Abstand $b\cos\varphi\operatorname{tg}\gamma$ von der optischen Axe und ist ein Berührungspunct der auf der optischen Axe OA senkrechten Berührungs-Ebene an die Wellenfläche. Ist $\varphi=0$, so erhält man einen Punct auf dem Durchmesser von E, der dessen Kreisschnitt conjugirt ist, als Punct der Wellenfläche, und der Abstand dieses Puncts von der optischen Axe ist $b\operatorname{tg}\gamma$. Die Gerade $b\operatorname{tg}\gamma$ und alle Geraden $b\operatorname{tg}\gamma\cos\varphi$ liegen in einer und derselben auf OA senkrechten Ebene und bilden mit einander den veränderlichen Winkel φ, dessen Spitze in der optischen Axe liegt. Die Endpuncte der Geraden liegen also auf einem über $b\operatorname{tg}\gamma$ als Durchmesser beschriebenen Kreise. *Die gesuchten Berührungspuncte liegen mithin alle auf einem zur Ebene der optischen Axen senkrechten und symmetrischen Kreise, der durch die optische Axe OA und den dem entsprechenden Kreisschnitt conjugirten Durchmesser geht, und dessen Ebene zur optischen Axe senkrecht ist.*

8.

Es sei $O\alpha$ eine optische Halb-Axe des Ellipsoïds 𝕰. Der darauf senkrechte Diametralschnitt von E ist ein Kreis; daher liegen auf $O\alpha$ unendlich viele Puncte der Wellenfläche, die aber alle in Einem zusammenfallen. Man suche die Berührungs-Ebenen in diesen Puncten.

Die Berührungs-Ebenen an 𝕰 längs des Kreisschnitts umhüllen einen Cylinder, und ihre Pole liegen auf E, in einer Ellipse, deren Ebene senkrecht zur Cylinder-Axe ist. Es sei δ der Winkel der Ebene dieser Ellipse



mit dem Kreisschnitt von 𝔈, φ der Winkel einer beliebigen Ebene durch die optische Axe $O\alpha$ und der Ebene beider optischen Axen. Die Berührungs-Ebene an 𝔈 in dem in der Ebene mit der Neigung φ liegenden Punct des Kreisschnitts enthält eine Tangente des Kreisschnitts, ist also senkrecht zur Ebene mit der Neigung φ, also auch zu der Geraden, wo diese Ebene die Ebene der Ellipse auf E schneidet. Diese Gerade macht mit dem Halbmesser des Kreisschnitts von 𝔈, der in der Ebene mit der Neigung φ liegt, einen Winkel ψ, der durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}\psi = \cos\varphi \operatorname{tang}\gamma$$

bestimmt wird. Ist $\varphi = 0$, so erhält man, nachdem man die Ebene mit der Neigung φ um O in sich selbst um einen rechten Winkel gedreht hat, die dem Kreisschnitt von 𝔈 conjugirten Durchmesser; und der Winkel dieses Durchmessers mit der optischen Axe $O\alpha$ ist $\psi = \gamma$. Ist φ nicht $= 0$, so erhält man eine Reihe von Geraden, die nach der Drehung um einen rechten Winkel den Winkel ψ mit der optischen Axe machen. Daraus folgt, dafs diese Geraden, oder die Senkrechten auf den verschiedenen Berührungs-Ebenen, die Durchschnitte zweier auf einander senkrechten Ebenen sind, von denen die eine durch die optische Axe $O\alpha$ von 𝔈, die andere durch die dem Kreisschnitt von 𝔈 conjugirten Durchmesser geht; oder die Kanten eines Kegels, dessen Kreisschnitte zu diesen beiden Geraden senkrecht sind und der zugleich durch diese Geraden geht. *Daher bilden die Berührungs-Ebenen einen Kegel, der jene Gerade zu Focallinien hat und von dem zwei Berührungs-Ebenen senkrecht zu denselben Geraden sind.*

Tübingen, im Juli 1855.

17.

Die lineale Erzeugung von Curven dritter Ordnung.

(Von dem Herrn Professor Dr. *Grafsmann*, Oberlehrer am Gymnasio zu Stettin.)

Im 31. Bande (S. 123 ff.) und im 36. Bande dieses Journals (S. 178 ff.) habe ich drei möglichst einfache Methoden angegeben, um sämmtliche Curven dritter Ordnung durch Bewegung gerader Linien um feste oder geradlinige bewegliche Puncte zu erzeugen. Es wurden diese Methoden durch die drei Gleichungen:

$$(1.)\quad xaBcDxD_1c_1B_1a_1x = 0,$$

$$(2.)\quad xaAa_1.xbBb_1.xc = 0,$$

$$(3.)\quad xaA.xbB.xcC = 0,$$

dargestellt, in welchen die kleinen Buchstaben Puncte, die grofsen gerade Linien, x den die Curve construirenden Punct bezeichnen, und in welchen die Multiplication *planimetrisch* ist. Ich habe dort streng und ausführlich nachgewiesen, dafs die *beiden ersten* Methoden *allgemein* sind, d. h. dafs sich *jede* Curve dritter Ordnung durch *jede* dieser Methoden erzeugen lasse; und zwar die erste auch dann, wenn man B und B_1 zusammenfallen läfst, wogegen ich für die dritte Methode dort den Beweis nur mehr andeutete als ausführte (Bd. 36. S. 180).

Hr. Prof. *Bellavitis* behauptet nun in einem Aufsatze (unter dem Titel: Sopra un algoritmo proposto per esprimere gli allineamenti etc. Venezia 1855), welchen er mir zuzuschicken die Güte gehabt hat, es sei *keine* jener Methoden *allgemein*, sondern es liefsen sich durch jede derselben nur ganz *specielle* Curven dritter Ordnung erzeugen; nämlich nur solche, die durch 7 oder gar durch 6 Puncte bestimmt werden, und die daher von noch speciellerer Natur seien, als die durch 8 Puncte bestimmte Doppelpunctscurve; dagegen sei *Chasles* der erste, welcher (Compte rendu, 30 mai 1853) ein solches Problem gelöset habe. Dies, und die freie Darstellung des Algorithmus, wie ich ihn in Band 31, 36, 42, 44 dieses Journals entwickelt, so wie der Rechnungsregeln, welche ich dort für diesen Algorithmus mitgetheilt habe, bildet den Inhalt des genannten Aufsatzes. Der Einwurf mufste für mich um so bedeutender sein, da Hr. *Bellavitis* diesen Algorithmus selbständig behandelt

und damit Resultate erzielt. Ich glaube es daher mir und dem Gegenstande schuldig zu sein, denselben noch einmal aufzunehmen, und namentlich auch die Allgemeinheit der dritten Methode streng nachzuweisen. Zugleich werde ich zeigen, dafs sich nicht nur jede beliebige lineale Erzeugung der Curven dritter Ordnung auf die zweite Methode direct zurückführen läfst, sondern dafs sich auch aus 9 beliebig gegebenen Puncten die Constanten der Gleichung (2.) so bestimmen lassen, dafs die durch diese Gleichung dargestellte Curve durch jene 9 Puncte geht; d. h. ich werde die linealen Eigenschaften eines *Zehnecks,* welches einer Curve dritter Ordnung eingeschrieben ist, aus einer Gleichung von jener Form ableiten. Gelegentlich werde ich dann auch die Fehlschlüsse angeben, auf welchen der Einwurf des Hrn. *Bellavitis* beruht.

§. 1.

Die wichtigsten Rechnungsregeln der planimetrischen Multiplication.

Im folgenden, wie in den früheren Aufsätzen, sollen stets die *Puncte* mit *kleinen,* die *geraden Linien* mit *grofsen* Buchstaben bezeichnet werden, und jene „Elemente erster Stufe," diese „Elemente zweiter Stufe" heifsen, während ich die *Zahlen „Gröfsen nullter* Stufe" nennen werde. Ich werde vorzugsweise solche Gleichungen betrachten, deren eine Seite Null, und deren andere Seite ein Product ist, in welchem die Summe der Stufenzahlen aller darin enthaltener Factoren durch *drei* theilbar ist, und in welchem überhaupt keine andere Verknüpfung vorkommt, als nur planimetrische Multiplication. Eine solche Gleichung drückt, wenn nicht einer der Factoren Null ist, stets aus, dafs ein bestimmter Punct in einer bestimmten geraden Linie liegt. So z. B. drückt die Gleichung

$$Ab = 0$$

aus, dafs der Punct b in der geraden Linie A liegt. Hr. *Bellavitis* braucht hiefür das Wort *Congruenz;* was aber nicht ganz angemessen sein dürfte, da ein Punct nicht mit einer geraden Linie *congruent* genannt werden kann. Ich werde mich, wo es auf einen kurzen Namen ankommt, des entsprechenden Wortes *Incidenz* bedienen, so dafs also die obige Gleichung, welche ausdrückt, dafs b in A fällt, oder b mit A *incident* ist, eine *Incidenz* heifsen soll, während ich für das Zusammenfallen *zweier Puncte* oder *zweier gerader Linien* das Wort *Congruenz* beibehalte, für welches Hr. *Bellavitis* ohne Noth *Coincidenz* setzt. Dafs Hr. *Bellavitis* jene Gleichung überdies in der Form

$$Ab \parallel 0$$

schreibt, ist eine Veränderung der Bezeichnung, welche nicht blofs überflüssig, sondern auch, wenn das Zeichen || nicht denselben Sinn haben soll wie jedes Gleichheitszeichen, unrichtig genannt werden mufs. (Man sehe meine Ausdehnungslehre, wo sich die Gleichheit planimetrischer Producte, so wie ihre Addition u. s. w. im weitesten Sinne behandelt findet.)

Die wichtigsten Rechnungsregeln, deren ich mich im Folgenden bedienen will, und bei deren Anwendung ein Product sich selbst congruent bleibt, werde ich hier kurz zusammenstellen, indem ich mich dabei auf meine früheren Aufsätze berufe.

Regel 1. Die Stufenzahl eines *planimetrischen* Products ist der Summe der Stufenzahlen seiner Factoren congruent, in Bezug auf den Modul 3. (Man sehe den entsprechenden Satz für das *stereometrische* Product in diesem Journal Bd. 49. S. 12.)

Regel 2. Zwei Elemente von gleicher Stufe, welche entweder die ersten Factoren eines Products sind, oder auf einen ersten Factor derselben Stufe folgen, können unter sich vertauscht werden, und geben Null, wenn sie einander congruent sind (Bd. 42. S. 194), z. B.

$$ab \equiv ba,\ AB \equiv BA,\ abc \equiv acb,\ ABC \equiv ACB,$$
$$aa = AA = abb = ABB = 0.$$

Regel 3. In einem Product nullter Stufe (s. Regel 1) kann man eine schliefsende Klammer weglassen, wenn man zugleich die Ordnung sämmtlicher, frei in der Klammer stehenden (d. h. nicht von einer neuen Klammer umschlossenen) Factoren umkehrt; oder, anders ausgedrückt: Man kann in einem Product nullter Stufe eine Schlufsklammer setzen, wenn man die Ordnung sämmtlicher, frei in die Klammer tretender Factoren umkehrt (Bd. 44. S. 5), z. B.

$$abCdEfg \equiv a(gfEdCb).$$

Zusatz. Man kann auch die Ordnung sämmtlicher Factoren eines Products nullter Stufe umkehren (ebend.), z. B.

$$abCdEfg \equiv gfEdCba.$$

Regel 4. Zwei einander *incidente* Factoren, welche auf einander folgen, können vertauscht werden (Bd. 42. S. 194), z. B.

$$abC \equiv aCb, \text{ wenn } bC = 0.$$

Regel 5. Ein Factor nullter Stufe (s. Regel 1) kann, wenn er nicht Null ist, weggelassen werden (Bd. 42. S. 194), z. B. (s. Regel 4)

$$aCb \equiv b, \text{ wenn } aC \gtrless 0 \text{ ist.}$$

Regel 6. Wenn in einem Producte zwischen zwei congruenten Elementen ein Element von anderer Stufe steht, so kann man es mit einem der beiden andern zusammen weglassen, falls nicht Incidenz zwischen ihnen Statt findet. Z. B.

$$abCb \equiv ab, \text{ wenn } Cb \gtrless 0 \text{ ist.}$$

Beweis. $abCb \equiv C(ab)b$ (Regel 2) $\equiv Cb(ab)$ (Regel 4) $\equiv ab$ (Regel 5), wenn $Cb \gtrless 0$.

Regel 7. Wenn ein Product mit 4 Factoren gleicher Stufe beginnt, von denen die zwei letzten von einer Klammer umschlossen sind, und einer der zwei letzten congruent ist mit einem der zwei ersten, so kann man statt aller 4 Factoren einen der beiden congruenten setzen, falls nicht das Product der 3 übrigen Null ist (Ausdehnungslehre. Leipzig 1844. §. 133), z. B.

$$ab(ac) \equiv a, \text{ wenn } abc \gtrless 0.$$

Denn $ab(ac) \equiv ba(ac)$ (Reg. 2) $\equiv b(ac)a$ (Reg. 4) $\equiv a$ (Reg. 5), wenn $acb \gtrless 0$ ist.

Regel 8. Wenn das Product zweier Elemente, deren eines wieder aus zwei Factoren besteht, gleich Null gesetzt ist, so ist diese Gleichung gleichbedeutend mit dem Vereine zweier anderer Gleichungen, die man aus jenen erhält, wenn man von den letztgenannten Factoren, einmal den einen, dann den andern ausläfst; z. B. die Gleichung

$$abC = 0$$

ist, wenn ab ein Element (also nicht Null) ist, gleichbedeutend mit dem Vereine der beiden Gleichungen

$$aC = 0, \quad bC = 0.$$

Regel 9. Eine *Incidenz,* welche in Bezug auf x vom $n$ten Grade ist, bestimmt als geometrischen Ort von x eine Linie $n$ter Ordnung (Bd. 31. S. 119).

§. 2.

Deutung der Gleichung (3.).

Die Gleichung (3.)

$$xaA.xbB.xcC = 0$$

ist in Bezug auf x vom dritten Grade; also ist (Reg. 9) der geometrische Ort von x eine *Linie dritter Ordnung.* Der Ausdruck xaA stellt den Durchschnittspunct der geraden Linien xa und A dar, und da das Product dreier

Puncte dann, und nur dann Null ist, wenn die drei Puncte in gerader Linie liegen, so enthält obige Gleichung folgenden, schon (Bd. 36.) mitgetheilten, Satz:

„Der geometrische Ort eines Puncts, dessen Verbindungslinien mit drei festen Puncten drei feste gerade Linien so schneiden, dafs die 3 Durchschnittspuncte in gerader Linie liegen, ist eine *Curve dritter Ordnung.*"

Die Curve geht, wie ich (Bd. 31. S. 125) nachgewiesen habe, durch folgende 9 Puncte:

$$a, b, c, BC, CA, AB, bcA, caB, abC,$$

die ich beziehlich mit

$$a, b, c, a_1, b_1, c_1, \alpha, \beta, \gamma$$

bezeichne. Es haben also die beiden Dreiecke abc und $a_1b_1c_1$ die Eigenschaft, dafs sich ihre entsprechenden Seiten in den Puncten α, β, γ treffen; nämlich bc trifft die Seite b_1c_1 oder A in dem Puncte α; ca die Seite c_1a_1 oder B in β, und ab die Seite a_1b_1 oder C in γ. Folglich ist es, damit sich eine Curve dritter Ordnung mittels der Gleichung (3.) darstellen lasse, nothwendig, dafs man ihr zwei Dreiecke abc und $a_1b_1c_1$ einschreiben könne, deren entsprechende Seiten sich in 3 Curvenpuncten α, β, γ schneiden. Um auf rein geometrische Weise zu zeigen, dafs dies bei jeder Curve dritter Ordnung möglich sei, will ich einige Sätze über diese Curven voranschicken.

§. 3.

Über den Gang der Curven überhaupt, und der Curven dritter Ordnung insbesondere.

Satz 1. Definition. Ich sage, ein Punct, welcher sich in einer Ebene bewegt, bewege sich *stetig,* wenn die gerade Linie, welche von irgend einem Puncte aufserhalb der Ebene nach ihm gezogen wird, bei jener Bewegung niemals aus einer Lage unmittelbar in eine andere übergeht, welche mit jener einen *endlichen Winkel* bildet.

Bemerkung. So lange der Punct in endlicher Entfernung bleibt, läfst sich seine stetige Bewegung auch dadurch bestimmen, dafs er bei jener Bewegung niemals aus einer Lage in eine andere übergeht, welche um eine *endliche Strecke* von jener entfernt liegt.

Satz 2. Definition. Wenn ein Punct von einer beliebigen Lage aus sich *stetig* so bewegt, dafs er keinen Punct seiner früheren Bahn berührt, bis er wieder in seine ursprüngliche Lage zurückkommt, so nenne ich diese Bahn einen *Zug,* und sage, der Punct habe diesen *Zug* einmal durchlaufen.

Bemerkung. In diesem Sinne wird man z. B. sagen können, dafs jeder Kegelschnitt, der nicht in zwei gerade Linien zerfällt, aus *Einem* Zuge bestehe.

Satz 3. Jede Projection eines Zuges ist wieder ein *Zug.*

Satz 4. Jede Curve dritter Ordnung besteht entweder aus zwei Zügen, oder aus nur einem Zuge, oder aus einem Zuge und einem isolirten Punct, und zwar sind die drei reellen Wendepuncte jedesmal in *einem* Zuge enthalten.

Beweis. Es geht dies am deutlichsten aus den 5 von *Newton* aufgestellten divergirenden *Parabeln* hervor, durch deren Projection alle Curven dritter Ordnung erzeugt werden können (*Newt.* Enumeratio linearum tertii ordinis pag. 92, 93). Die Curve mit einem Kreuzpuncte mufs nach der aufgestellten Definition als aus zwei Zügen bestehend angesehen werden, welche in dem Kreuzpuncte zusammenstofsen. Eine in gerade Linien zerfallende Linie höherer Ordnung rechne ich nicht zu den *Curven.*

Satz 5. Wenn eine gerade Linie, die sich um einen festen Punct stetig bewegt, eine algebraische Curve schneidet, so kann die stetige Fortbewegung der Durchschnittspuncte nur gleichzeitig bei zweien dieser Puncte aufhören.

Bemerkung. Alle diese Sätze sind entweder bekannt, oder unmittelbar einleuchtend.

Satz 6. Zieht man von irgend einem festen Puncte einer Curve dritter Ordnung, der aber nicht ein Doppelpunct ist, eine Gerade nach einem beweglichen Puncte, welcher einen Zug der Curve einmal durchläuft, so durchläuft auch der dritte Punct, in welchem jene Gerade die Curve trifft, einen *Zug* derselben einmal.

Beweis. Es sei a der *feste* Punct, p der *bewegliche,* welcher einen Zug der Curve einmal durchläuft, und q der dritte *Durchschnittspunct* von ap mit der Curve. Zu zeigen ist, dafs auch q einen Zug der Curve einmal durchläuft. *Erstens* kann während jener Bewegung q nicht unbeweglich bleiben, weil sonst a ein Doppelpunct wäre; *zweitens* kann aber q nie aufhören sich stetig zu bewegen, weil sonst, nach (Satz 5), auch einer der beiden andern Puncte p oder a aufhören müfste, sich stetig zu bewegen. Für p ist dies gegen die Annahme; für a ist es gleichfalls nicht möglich, da sich a nach der Annahme gar nicht bewegt. *Drittens* kann aber auch q nicht einen früheren Punct seiner Bahn, etwa den Punct q', wieder berühren; denn es sei

p' der Punct, in welchem aq' die Curve aufser a und q' trifft, so ist p' der Punct, in welchem sich beidemale p befunden haben müfste, während q sich in q' befindet; also müfste auch p und p' wieder einen Punct seiner früheren Bahn berührt haben; gegen die Annahme. Endlich, wenn p wieder zu seiner Anfangslage zurückkehrt, so kehrt auch q zu ihr zurück; also durchläuft q während jener Bewegung die Curve einmal.

Satz 7. Die Anzahl der Puncte, in welchen eine algebraische Curve den Umfang einer geschlossenen Figur schneidet, ist stets eine *gerade*.

Beweis. Da jeder Zweig einer algebraischen Curve entweder in sich geschlossen ist, oder nach beiden Seiten ins Unendliche hin sich erstreckt, so mufs jeder Zweig der in das Innere der Figur hineingeht, auch wieder aus demselben herausgelangen; mithin mufs die Anzahl der Curvenstücke, welche den Umfang schneiden, *gerade* sein; folglich auch die Anzahl der Puncte, in welchen die Curve den Umfang schneidet, indem, wenn m Curvenzweige durch denselben Punct des Umfangs gehen, dieser als ein $m$facher Punct gerechnet wird.

§. 4.

Entsprechende Dreiecke, welche einer Curve dritter Ordnung eingeschrieben sind.

Wenn die Richtung, in welcher eine gerade Linie in einer Ebene durchlaufen wird, bekannt ist, so ist dadurch auch ihre *rechte* oder *linke Seite* bestimmt. Ich sage, ein Punct c liege von der geraden Linie ab aus nach *rechts,* wenn man, um auf zwei geradlinigen Wegen von a über b nach c zu gelangen, nach *rechts* hin abbiegen mufs.

Satz 8. Wenn eine gerade Linie (pq) sich um einen festen Punct c dreht, und zwei Puncte in ihr (p und q) sich in zwei festen Geraden (A und B) bewegen, welche während der Bewegung nie mit jener beweglichen geraden Linie (pq) zusammenfallen: so bewegen sich beide Puncte (p und q), von der beweglichen Linie aus, nach *derselben* Seite, wenn der Drehpunct (c) *aufserhalb* dieser Puncte liegt, und nach entgegengesetzter, wenn *innerhalb*.

Satz 9. Wenn die Schenkel eines Winkels (cqa) sich um zwei feste Puncte (c und a) drehen, und der Scheitelpunct desselben (q) sich in einer festen geraden Linie (B) bewegt, welche während der Bewegung mit keinem der Schenkel zusammenfällt: so bewegt sich der Scheitelpunct (q), von den beiden Schenkeln (cq und aq) aus, nach *derselben* Seite, wenn die *gerade*

Linie (B) nicht in den Winkel hineingeht, und nach *entgegengesetzter* Seite, wenn sie hineingeht.

Nach diesen vorbereitenden Sätzen, von welchen die beiden letzten keines Beweises bedürfen, schreite ich nun zu dem Hauptsatze:

Satz 10. Zu jedem Dreiecke abc, welches einer Curve dritter Ordnung eingeschrieben ist, und dessen Seiten nicht *Tangenten* sind, giebt es ein, aber auch *nur ein* entsprechendes Dreieck $a_1b_1c_1$, dessen Seiten die entsprechenden des ersteren in Puncten der Curve schneiden, und von dessen Ecken jede mit der entsprechenden in demselben Curvenzuge liegt.

Beweis. Es seien α, β, γ die Puncte, in welchen die Seiten bc, ca, ab, beziehlich, die Curve zum drittenmale schneiden, und A, B, C seien die Tangenten der Curve in den Puncten a, b, c. Nun bewege sich von a aus ein Punct p auf der Curve, also von a aus in der Richtung der Tangente A. Man ziehe die gerade Linie γp, welche die Curve zum drittenmale in q treffen mag, so bewegt sich q von b aus in der Richtung der Tangente B. Ferner ziehe man die gerade Linie αq, welche die Curve zum drittenmale in r treffen mag, so bewegt sich r, von c aus in der Richtung der Tangente C. Endlich ziehe man die gerade Linie βr, welche die Curve zum drittenmale in p_1 treffen mag, so bewegt sich p_1 von a aus in der Richtung der Tangente A. Auch p bewegte sich von demselben Puncte a aus in der Richtung derselben Tangente A. Es läfst sich aber leicht zeigen, dafs p und p_1 von a aus nach entgegengesetzten Seiten sich bewegen. In der That mögen m von den drei Puncten α, β, γ innerhalb der Seiten des Dreiecks abc liegen, und n von den 3 Tangenten A, B, C nicht in das Dreieck abc hineingehen, so werden, da der Annahme gemäfs die Seiten des Dreiecks abc keine Tangenten sind, $3-n$ von den Tangenten A, B, C in das Dreieck hineingehen; ebenso aber diejenigen m Curventheile, welche die (unverlängerten) Seiten des Dreiecks treffen. Also wird, nach (Satz 7), $m+3-n$ eine *gerade* Zahl sein, folglich $m-n$ eine *ungerade*, mithin auch $m+n$ eine ungerade Zahl sein.

Betrachtet man nun der Reihe nach die Seiten (rechte oder linke), nach welchen sich p und q von ab aus, q und r von bc aus, r und p_1 von ca aus und p_1 von ab aus bewegen, zeigt sich klar, nach (Satz 8), dafs p und q von ab aus dann, und nur dann, nach entgegengesetzten Seiten sich bewegen, wenn γ innerhalb der Seite ab liegt; dasselbe gilt für die Bewegung von q und r von bc aus, und für die von r und p_1 von ca aus. Ferner wird q (nach Satz 9) von ab und bc aus sich dann, und nur dann, nach

entgegengesetzten Seiten bewegen, wenn die Tangente B nicht in das Dreieck hineingeht; und dasselbe gilt für die Bewegung des Punctes r von bc und ca aus, so wie des Punctes p_1 von ca und ab aus. Folglich wird sich die Seite, nach welcher die Bewegung in den 7 oben genannten Fällen erfolgt, $m+n$ mal umkehren, also, da $m+n$ *ungerade* ist, im siebenten Falle *entgegengesetzt* sein, wie im ersten; d. h. p_1 bewegt sich von ab aus nach entgegengesetzter Seite wie p.

Läfst man nun den Punct p von a aus den ganzen Curven-Zug, in welchem a liegt, einmal durchlaufen, so durchläuft, nach (Satz 6) der Punct q gleichfalls einen Zug der Curve einmal, und weil q, so auch r, und weil r, so auch p_1. Folglich durchlaufen p und p_1 von a aus nach entgegengesetzten Seiten den Zug, in welchem a liegt, einmal, müssen sich also in einem zweiten Puncte dieses Zuges begegnen, aber auch in keinem dritten. Es sei a_1 dieser Punct, und mögen q und r, während p in a_1 übergeht, in b_1 und c_1 übergehen, so ist $a_1 b_1 c_1$ das entsprechende Dreieck, dessen Seiten die entsprechenden des Dreiecks abc in den Curvenpuncten α, β, γ schneiden, und dessen Ecken mit den entsprechenden in denselben Curvenzügen liegen. Aufser ihm giebt es kein anderes Dreieck dieser Art, q. d. e.

Zusatz. Wenn die drei Puncte (α, β, γ), in welchen die Seiten eines Dreiecks (abc) die Curve zum drittenmale schneiden, in gerader Linie liegen, und jeder dieser Puncte mit der gegenüberliegenden Ecke (α mit a, β mit b, γ mit c) in demselben Curvenzuge liegt, so streckt sich das, jenem Dreieck entsprechende in die gerade Linie, welche jene drei Puncte (α, β, γ) verbindet, aus; und es giebt dann aufserdem kein Dreieck, welches dem gegebenen (abc) in der genannten Weise entspricht.

§. 5.

Allgemeinheit der Curven dritter Ordnung, welche durch die Gleichung (3.) dargestellt werden.

Es sei eine beliebige Curve dritter Ordnung gegeben. Um sie auf die Gleichung (3.) zurückzuführen, zeichne man in demjenigen Zuge derselben, der die Wendepuncte enthält, ein beliebiges Dreieck, dessen Seiten jedoch nicht Tangenten sind; dann müssen die dritten Durchschnittspuncte der Seiten und der Curve in *demselben* Zuge liegen. Sollten diese 3 Durchschnittspuncte etwa in gerader Linie liegen, so ist nach obigem Zusatze das angenommene Dreieck das einzige demselben Zuge eingeschriebene, dessen Seiten

durch jene 3 Durchschnittspuncte gehen. Verändert man also in dem genannten Zuge das Dreieck auf beliebige Weise, jedoch so, dafs zwei seiner Seiten durch zwei jener Durchschnittspuncte gehen, so kann die dritte Seite nicht den dritten Durchschnittspunct treffen.

Hat man nun das Dreieck so angenommen, dafs seine Seiten nicht Tangenten sind, so hat man in jedem Falle ein Dreieck abc erlangt, dessen Seiten, ohne Tangenten zu sein, die Curve zum drittenmale in drei Puncten α, β, γ schneiden, welche nicht in gerader Linie liegen.

Jetzt construire man das entsprechende Dreieck $a_1 b_1 c_1$, dessen Seiten sich mit den entsprechenden des Dreiecks abc in den Curvenpuncten α, β, γ schneiden. Dies ist nach (§. 4.) stets möglich. Man setze $b_1 c_1 \equiv A$, $c_1 a_1 \equiv B$, $a_1 b_1 \equiv C$, so ist der geometrische Ort eines Punctes x, welcher der Gleichung

$$(3.)\qquad xaA.xbB.xcC = 0$$

genügt, eine Curve dritter Ordnung, welche mit der gegebenen die 9 Puncte a, b, c, a_1, b_1, c_1, α, β, γ gemein hat. Es bleibt also nur noch zu zeigen, dafs diese 9 Puncte von der Art sind, dafs durch sie eine Curve dritter Ordnung vollkommen bestimmt wird, d. h. dafs zwei Curven dritter Ordnung, deren jede durch diese 9 Puncte geht, mit einander zusammenfallen.

Zu dem Ende berufe ich mich auf folgenden allgemein bekannten Satz:
„Wenn zwei Linien 3ter ($n$ter) Ordnung sich in 9 (in n^2) aber auch „nicht in mehr Puncten treffen, und man nimmt zu 8 (zu $\frac{1}{2}n(n+3)-1$) „derselben einen Punct hinzu, welcher nicht jenen beiden Linien dritter „($n$ter) Ordnung gemein ist, so wird durch diese 9 (durch diese $\frac{1}{2}n(n+3)$) „Puncte eine Linie dritter ($n$ter) Ordnung unter allen Umständen voll„kommen bestimmt."

Legt man nun durch die drei Puncte b, c, α eine Gerade, ferner eine zweite Gerade durch die 3 Puncte c_1, a_1, β, und eine dritte Gerade durch die 3 Puncte a, γ, b, so bildet der Verein dieser 3 Geraden, eine Linie dritter Ordnung, welche mit der gegebenen Curve dritter Ordnung, aufser den genannten Puncten, unter denen b, als Doppelpunct der einen, zweimal gerechnet werden mufs, keinen Punct weiter gemein hat, weil jede Curve dritter Ordnung von einer geraden Linie in nicht mehr als 3 Puncten getroffen werden kann. Der Punct b_1 kann nun in keiner jener drei Geraden liegen, weil sonst diese Gerade die Curve in 4 Puncten treffen würde: also ist b_1 nicht beiden Linien dritter Ordnung gemein, während die übrigen 8 Puncte

a, b, c, a_1, c_1, *α, β, γ* beiden gemein sind. Somit wird nach dem angeführten Satze durch die 9 Puncte *a, b, c*, a_1, b_1, c_1, *α, β, γ* eine Linie dritter Ordnung vollkommen bestimmt; d. h. zwei Linien dritter Ordnung, welche diese 9 Puncte gemein haben, sind *identisch;* also ist die gegebene Curve mit dem durch die obige Gleichung (3.) bestimmten geometrischen Orte des Puncts *x identisch;* folglich läfst sich jede Curve dritter Ordnung durch eine Gleichung von der Form (3.) darstellen. D. h.

Jede Curve dritter Ordnung läfst sich als geometrischer Ort eines Punctes erzeugen, dessen Verbindungslinien mit drei festen Puncten drei feste gerade Linien in drei Puncten schneiden, die in gerader Linie liegen; und zwar kommt es zu dem Ende nur darauf an, das Dreieck der festen Puncte und das der festen Geraden so anzunehmen, dafs sie der Curve eingeschrieben sind, und dafs die entsprechenden Seiten beider auf der Curve sich begegnen.

Bemerkung. Hr. *Bellavitis* behauptet, dafs sich durch die Gleichung (3.) nur solche Curven dritter Ordnung darstellen lassen, welche schon durch 6 beliebige Puncte bestimmt sind, d. h. welche schon bestimmt sind, wenn nur 6 Puncte gegeben sind, durch welche sie gehen sollen. An diesem Resultate hätte Hr. *Bellavitis* schon um deswillen sich stofsen sollen, weil es keine Curve dritter Ordnung giebt, die durch 6 Puncte auf lineale Weise bestimmt wird.

Die Art, wie er zu seinem Resultate gelangt, ist im Wesentlichen folgende: Wenn nämlich 6 Puncte *a, b, c* und a_1, b_1, c_1 gegeben sind, so sind auch die Linien *A, B, C* als Seiten des Dreiecks *a, b, c,* also alle constanten Elemente der Gleichung (3.); mithin auch die durch sie dargestellte Curve dritter Ordnung bestimmt, und folglich (so schliefst Hr. *Bellavitis* weiter) ist diese Curve dritter Ordnung schon bestimmt, wenn 6 Puncte *a, b, c*, a_1, b_1, c_1 gegeben sind, welche in ihr liegen sollen; und dies ist der Fehlschlufs. Nicht *dadurch* schon ist jene Curve bestimmt, dafs die genannten 6 Puncte in ihr liegen sollen, sondern erst dadurch, dafs die 6 Puncte *auch in der verlangten Weise* in ihr liegen sollen, nämlich in der Weise, dafs die entsprechen Dreiecke *abc* und $a_1b_1c_1$ sich auf der Curve begegnen; wie ich dies auch schon in der oben angeführten Abhandlung (Bd. 36. S. 180) bemerkt habe. Also, so wenig man daraus, dafs ein Kreis durch die Endpuncte eines Durchmessers bestimmt wird, schliefsen darf, dafs der Kreis schon durch zwei beliebige Puncte bestimmt werde, ebenso wenig kann jener Schlufs Geltung

haben. Ganz dieselben Fehlschlüsse wendet Hr. *Bellavitis* an, um die Allgemeingültigkeit der beiden andern Constructionsmethoden zu bestreiten; wobei er auf die von mir gegebenen Beweise der Allgemeinheit keine Rücksicht nimmt.

§. 6.

Zusammenhang zwischen den verschiedenen linealen Erzeugungsweisen einer Curve dritter Ordnung.

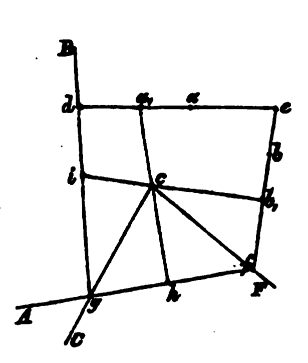
Es wird dieser Zusammenhang am klarsten sich ergeben, wenn ich zeige, wie sich alle andern linealen Erzeugungsweisen auf eine derselben, zu welcher ich die durch die Gleichung (2.) dargestellte nehme, direct zurückführen lassen; nämlich in der Art, dafs man, wenn man die gegebene Erzeugungsweise gleichfalls durch eine lineale Gleichung darstellt, aus den constanten Elementen dieser Gleichung stets solche Elemente ableiten kann, welche in die Gleichung (2.) gesetzt, diese der gegebenen gleichbedeutend machen. Nun habe ich in dem angeführten Aufsatze (Bd. 36. S. 178) folgenden Satz bewiesen:

„Der geometrische Ort des Punctes x, der durch die Gleichung

$$xaAa_1.xbBb_1.xc = 0$$

bestimmt wird, ist eine Linie dritter Ordnung, welche durch folgende 9 Puncte geht: *erstens* durch a, b, c, *zweitens* durch die Ecken eines Vierecks, von welchem zwei einander gegenüberliegende Seiten in den geraden Linien aa_1 und A, und die beiden andern in den geraden Linien bb_1 und B liegen, und *endlich* durch die beiden Puncte, in welchen a_1c die Seite A, und b_1c die Seite B schneiden,"

und den umgekehrten Satz:



„Werden in einer Seite eines Vierecks zwei beliebige Puncte a und a_1 angenommen, während die gegenüberliegende Seite in der geraden Linie A liegt; sind ferner in einer dritten Seite zwei beliebige Puncte b und b_1 angenommen, während die gegenüberliegende Seite in der geraden Linie B liegt, und ist c ein beliebiger Punct, der nicht in den Vierecksseiten liegt, so ist

$$xaAa_1.xbBb_1.xc = 0$$

die Gleichung derjenigen Curve dritter Ordnung, welche durch die Ecken

des Vierecks und durch den Punct c geht, und die Vierecksseiten aufserdem in den Puncten a, b und in denjenigen zwei Puncten trifft, in welchen die Geraden $a_1 c$ und $b_1 c$ die gegenüberliegenden Seiten A und B schneiden; und zwar giebt es aufser dieser Curve keine andere Curve dritter Ordnung, welche durch die bezeichneten 9 Puncte ginge." (S. Fig.)

Jede lineale Erzeugung einer Curve dritter Ordnung läfst sich nun (s. Bd. 42. S. 190) durch ein gleich Null gesetztes Product darstellen, welches mit dem construirenden Puncte x beginnt und schliefst und aufserdem eine Reihe abwechselnder Puncte und gerader Linien als Factoren enthält, die mit einem Puncte beginnt und schliefst, während einer der übrigen Factoren der Reihe von dem Puncte x im ersten Grade abhangt, also in der Form

$$(4.)\qquad xd\mathrm{A}fx = 0,$$

wo A eine Reihe abwechselnder gerader Linien und Puncte ist, von denen einer noch den Punct x als Factor enthält.

Es seien e und g zwei beliebige Puncte der Curve (4.), von der Art, dafs keine 3 der 4 Puncte d, e, f, g in gerader Linie liegen. Durch Construction läfst sich leicht der dritte Punct finden, in welchem jede Seite des Vierecks $defg$ die Curve schneiden mufs. Wird z. B. der dritte Punct x gesucht, in welchem die Seite ed die Curve schneidet, so fällt die Gerade xd mit ed zusammen und die Gleichung (4.) verwandelt sich in

$$(5.)\qquad ed\mathrm{A}fx = 0.$$

Da dieselben nur noch vom *zweiten* Grade in Bezug auf x ist, so ist der geometrische Ort von x ein *Kegelschnitt.* In diesem Kegelschnitte liegt (nach Regel 2) der Punct f; ferner aber auch der Punct e, indem e der Annahme zufolge ein Punct der Curve (4.) ist, also, statt x gesetzt, der Gleichung (4.), und mithin auch der Gleichung (5.) genügt.

Es lassen sich nun beliebig viele neue Puncte dieses Kegelschnittes lineal construiren. Es seien k, l, m drei neue Puncte desselben. Bildet man das Sechseck $xeklmf$, so liegen, nach dem *Pascal*'schen Satze, die Puncte $xe.lm$, $ek.mf$, $kl.fx$ in einer geraden Linie, d. h. es ist

$$(6.)\qquad xe(lm)(ek.mf)(kl)fx = 0$$

die Gleichung des Kegelschnitts, der durch die 5 Puncte e, k, l, m, f geht, also mit dem Kegelschnitte (5.) identisch ist. Es ist demnach der gesuchte Punct x derjenige, in welchem die Gerade ed den Kegelschnitt aufser e noch

trifft. Da x in ed liegt, und nicht mit e identisch ist; so ist die Gerade xe mit de identisch, und die Gleichung (6.) verwandelt sich in

$$de(lm)(ek.mf)(kl)fx = 0;$$

d. h. der Punct x liegt in der Geraden $de(lm)(ek.mf)(kl)f$; er liegt aber auch in der Geraden de, also im Durchschnitt beider, d. h. wenn man diesen Punct jetzt mit a bezeichnet, so ist

$$(7.) \quad a \equiv de(lm)(ek.mf)(kl)f(de).$$

Ganz auf dieselbe Weise finden sich die dritten Puncte, in welchen die Seiten ef, fg, gd die Curve (4.) schneiden. Sie mögen beziehlich durch b, h, i bezeichnet werden (s. Fig.). Dann ist, wie bekannt, auch der Durchschnitt von ah und bi ein Punct der Curve. Endlich sei c ein beliebiger zehnter Punct der Curve (4.), und es werde fg durch A, dg durch B, der Durchschnitt von hc und de durch a_1 und der Durchschnitt von ic und ef durch b_1 bezeichnet; dann ist nach dem obigen Satze die Gleichung

$$(8.) \quad xaAa_1.xbBb_1.xc = 0$$

die einer Curve dritter Ordnung, welche durch die 9 Puncte $a \ldots i$ geht; und zwar ist diese Curve, nach jenem Satze, die *einzige* dritter Ordnung, welche durch die 9 Puncte geht. Aber auch die Curve (4.) geht durch diese 9 Puncte, also ist die Curve (4.) mit der (8.) *identisch;* mithin ist auch die Gleichung (4.) mit der Gleichung (8.) gleichbedeutend; und die Aufgabe der Umwandlung ist gelöset.

Als Beispiel der Umwandlung nehme ich die von Hrn. *Bellavitis* aufgestellte Gleichung,

$$(9.) \quad xeDpEdF(xfB).xdC = 0,$$

an, in welcher noch Ff und Bd gleich Null gesetzt sind (s. Fig.), und welche nach ihm die erste allgemeine Auflösung des Problems der linealen Erzeugung der Curven dritter Ordnung darstellen soll; und zwar diejenige, welche *Chasles* in dem angeführten Aufsatze angegeben hat.

Es läfst sich diese Gleichung (Regel 3) wie folgt schreiben:

$$xeDpEdF(xdC)Bfx = 0;$$

wobei sich annehmen läfst, dafs von den constanten Factoren keine zwei auf einander folgende *incident* sind, weil sonst (Bd. 42. S. 197) die Linie in eine gerade Linie und einen Kegelschnitt zerfallen würde. Puncte jener Curve sind (Regel 2) d, e, f. Ferner ist auch $g \equiv BC$ ein Punct derselben. Denn dann

ist g mit B und C *incident;* also verwandeln sich dann xdC und xfB, wenn sie nicht selbst Null sind (Regel 2, 4, 5), beide in g, folglich wird $xdC(xfB) = 0$ (Reg. 2). Um den dritten Punct a, in welchem de die Curve schneidet zu finden, mufs man in obige Gleichung a statt x und statt ae und ad das mit ihnen identische de setzen; dann wird $deDpEdF(deC)Bfa = 0$, also, da a auch in de liegt, zu

$$a \equiv deDpEdF(deC)Bf(de);$$

und eben so findet sich für den dritten Punct b, in welchem ef die Curve trifft:

$$b \equiv efDpEdF(efB)Cd(ef).$$

Es mögen jetzt die dritten Puncte h und i gesucht werden, in denen fg und gd die Curve treffen. Setzt man, um den dritten Durchschnittspunct h in fg zu finden, h in die Gleichung (9.) statt x, so erhält man, da h in fg liegt, $xf \equiv hf \equiv fg$; und da g mit B, wie mit C *incident* ist, so ergiebt sich $xfB \equiv fgB \equiv g$ (Reg. 4, 5) und $xdC(xfB) \equiv xdCg \equiv xdg.C$ (Reg. 4). Sollte xdg Null sein, so müfste x in dg, wie in fg, also in g liegen. Um also den dritten Durchschnittspunct zu finden, mufs man xdg *ungleich Null* annehmen; dann erhält man $xdC.(xfB) \equiv C$ (Reg. 5), und somit $heDpEdFC = 0$, oder umgekehrt (Reg. 3) $FCdEpDeh = 0$; folglich, da h auch in fg liegt,

$$h \equiv FCdEpDe(fg),$$

und ebenso

$$i \equiv BFdEpDe(gd).$$

Ferner ist auch CF ein Punct der Curve. Denn setzt man CF statt x, so wird $xdC \equiv FCdC \equiv FC$ (Reg. 6), und xfB wird $\equiv CFfB \equiv Cf.FB$ (Reg. 4), da f nach der Annahme mit F *incident* ist. Ist nun Cf nicht Null, so kann man es nach (Reg. 5) weglassen. Also wird xfB entweder zu Null oder zu $\equiv FB$; also $xfB.(xcD)$ entweder zu Null oder zu $\equiv FC(FB) \equiv F$ (Reg. 2, 4, 5). Somit erhält man dann

$$xeDpEdF(xfB).xcD \equiv xeDpEdFF = 0 \text{ (Reg. 2)},$$

also ist $x \equiv FC$ ein Punct der Curve. Dieser werde $\equiv c$ gesetzt. Wird nun, wie oben, $gf \equiv A$, $hc.de \equiv a_1$, $ic.ef = b_1$ gesetzt, so ist die Gleichung

$$xaAa_1.xbBb_1.xc = 0$$

gleichbedeutend mit der Gleichung (9.). Also folgt Nachstehendes:

„Die Gleichung

$$xeDpEdF(xfB).xdC = 0, \quad \text{mit} \quad Ff = Bd = 0,$$

ist gleichbedeutend mit der Gleichung

$$xaAa_1.xbBb_1.xc = 0,$$

wo $a \equiv deDpEdF(deC)Bf(de)$, $b \equiv efDpEdF(efB)Cd(ef)$, $c \equiv FC$, $A \equiv BCf$, $a_1 \equiv cdEpDeAc(de)$, $b_1 \equiv BFdEpDeBc(ef)$ ist."

§. 7.

Lineale Erzeugung einer Curve dritter Ordnung aus 9 beliebigen Puncten.

Entwurf der Auflösung. Jede lineale Erzeugung einer Curve dritter Ordnung kann durch eine Gleichung von der Form

$$PQR = 0$$

dargestellt werden, in welcher P, Q, R entweder 3 gerade Linien, oder 3 Puncte sind, die in beiden Fällen in Form von Producten vorkommen, deren jedes den construirenden Punct x einmal als Factor enthält.

Es seien nun $a, b, \dots i$ die 9 Puncte, durch welche die durch jene Gleichung darzustellende Curve gehen soll. Es giebt stets 3 Puncte, die statt x gesetzt ein solches Product PQ zu Null machen; und die constanten Factoren in P und Q lassen sich so annehmen, dafs a, b, c diese 3 Puncte sind. Ferner wird R durch den Punct d zu Null gemacht, wenn man dem R die Form $xd\dots$ giebt. Setzt man nun in PQ statt x nach und nach die Puncte $e\dots i$, und ebenso in xd, so stellt PQ nach und nach 5 Elemente dar, und xd einen Büschel von 5 Strahlen. Es lassen sich aber im Allgemeinen aus 5 gegebenen Elementen 5 gegebene Strahlen eines Strahlbüschels projectivisch, d. h. durch fortschreitende Multiplication mit einer Reihe abwechselnder Puncte und Linien ableiten; und zwar sind diese Puncte und Linien lineal construirbar. Es sei A diese Reihe fortschreitender Factoren, so stellt das Product PQA eine gerade Linie dar, welche mit der geraden Linie xd, sobald man statt x irgend einen der 5 Puncte $e\dots i$ setzt, zusammenfällt. Also ist für diese 5 Puncte:

$$(10.) \quad PQ\text{A}x = 0.$$

Aber auch für die 4 Puncte a, b, c, d wird diese Gleichung erfüllt: für a, b, c, da für sie das Product PQ Null ist, und für d, da PQA, wenn es nicht Null ist, eine durch d gehende gerade Linie darstellt, also $PQ\text{A}d$ stets Null ist. Die Gleichung (10.) stellt nun aber eine Curve dritter Ordnung

als *Ort* von x dar, und da die 9 Puncte $a \dots i$, statt x gesetzt, jener Gleichung genügen, so geht die Curve durch die gegebenen neun Puncte, und die Aufgabe ist gelöset.

§. 8.

Fortsetzung.

Um eine specielle Lösung der Aufgabe zu geben, will ich annehmen, es solle die lineale Construction der Curve die durch die 9 Puncte $a \dots i$ gehen soll, durch eine Gleichung von der Form (2.) ausgedrückt werden, zu welcher jedoch, um die Lösung zu vereinfachen, zunächst noch 2 Factoren k und C hinzugefügt werden mögen, so dafs sie die Form

$$(11.)\qquad xaAa_1.xbBkCb_1.xc = 0$$

annimmt. Die 3 Factoren können (Regel 2) beliebig umgeordnet werden. Setzt man

$$xaAa_1.xc \equiv p, \quad xbB \equiv q,$$

so nimmt die Gleichung die Form $p(qkCb_1) = 0$, oder (Reg. 3)

$$(12.)\qquad pb_1Ckq = 0$$

an. Der Ausdruck p wird Null für $x \equiv a$ und c, weil dann zwei auf einander folgende Factoren congruent werden (Reg. 2). Damit nun p auch noch für einen andern der Puncte $a \dots i$, z. B. für d zu Null werde, und für einen vierten und fünften Punct e und f sich möglichst vereinfache, setze man

$$A \equiv de, \qquad a_1 \equiv af.cd.$$

Und zwar nehme man die Puncte a, c, d, e, f so an, dafs keine 3 derselben in gerader Linie liegen. Dann wird erstens für $x \equiv d$ der Ausdruck $xaAa_1 \equiv da(de)a_1 \equiv da_1$ (Reg. 7) $\equiv a_1d \equiv af(cd)d \equiv cd$ (Reg. 4, 5); also $p \equiv xaAa_1.xc \equiv cd.cd = 0$ (Reg. 2). Ferner für $x \equiv e$ wird $p \equiv ea(de)a_1.ec$ $\equiv ea_1.ec$ (Reg. 7) $\equiv e$, weil nämlich ea_1c nicht Null sein kann. Endlich für $x \equiv f$, wird $p \equiv faA(af.cd).cf \equiv A(af)(af.cd).cf$ (Reg. 2) $\equiv af.cf$ (Reg. 4) $\equiv f$ (Reg. 7). Für $x \equiv g$, h oder i gehe p beziehlich in g_1, h_1 oder i_1 über, dann erhält man

$$\begin{array}{ccl} x & \equiv & a,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h,\ i, \\ p & \equiv & o,\ o,\ o,\ e,\ f,\ g_1,\ h_1,\ i_1. \end{array}$$

Ferner $q \equiv xbB$ wird zu Null für $x \equiv b$. Damit es auch für e und f sich vereinfache, setze man

$$B \equiv ef,$$



und nehme b so an, dafs es nicht in ef falle. Dann wird für $x \equiv e, f$ der Ausdruck q auch $\equiv e, f$ (Reg. 7); für $x \equiv g, h, i$ werde $q \equiv g_2, h_2, i_2$; dann erhält man

$$x \equiv b,\ e,\ f,\ g,\ h,\ i,$$
$$q \equiv o,\ e,\ f,\ g_2,\ h_2,\ i_2.$$

Es kommt also nur noch darauf an, die Gleichung (12.) für die 5 Fälle zu befriedigen, wo

$$p \equiv e,\ f,\ g_1,\ h_1,\ i_1, \text{ und gleichzeitig}$$
$$q \equiv e,\ f,\ g_2,\ h_2,\ i_2$$

ist.

Man nehme noch $C \equiv ei$ an; dann wird die genannte Gleichung für $p \equiv q \equiv e$ befriedigt, und für $p \equiv i_1$, $q \equiv i_2$ vereinfacht. Es ergiebt sich nämlich im ersteren Falle $pb_1Ckq \equiv eb_1 . ei_1 . ek$; was 3 gerade Linien, die durch einen Punct (e) gehen, als Factoren enthält, also Null ist. Ferner für $p \equiv i_1$, $q \equiv i_2$ erhält man $pb_1Ckp \equiv i_1b_1(ei_1)ki_2 \equiv i_1ki_2$ (Reg. 7), wenn nicht i_1b_1e Null ist; im letztern Falle würde hierdurch für k keine besondere Lage bedingt, im andern Falle mufs k in der Geraden i_1i_2 liegen; dies läfst sich daher auch im ersteren Falle annehmen.

Nun bleibt nur noch für die drei übrigen Werthpaare die Gleichung (12.) zu befriedigen; d. h. es mufs noch

$$fb_1Ckf = 0, \quad g_1b_1Ckg_2 = 0, \quad h_1b_1Ckh_2 = 0$$

sein; oder, anders geschrieben (Reg. 2, 3):

$$kfCfb_1 = 0, \quad kg_2Cg_1b_1 = 0, \quad kh_2Ch_1b_1 = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen giebt, wenn Cf nicht Null ist (nach Reg. 6), $kfb_1 = 0$; und es ergiebt sich dann, dafs die geraden Linien

$$kf, \quad kg_2Cg_1, \quad kh_2Ch_1$$

durch einen und denselben Punct gehen müssen, der dann gleich b_1 zu setzen ist. Sollte Cf zufällig Null sein, so würde jene erstere Bedingung wegfallen. Sollen nun jene 3 gerade Linien durch einen und denselben Punct gehen, so ist dazu nöthig und ausreichend, dafs ihr Product Null sei. Also hat man zur Bestimmung von k die Gleichung

$$(13.) \quad kf . kg_2Cg_1 . kh_2Ch_1 = 0.$$

Sie ist in Bezug auf k vom dritten Grade, also ist der geometrische Ort von k eine Linie dritter Ordnung. Aber diese zerfällt in 3 gerade Linien.

Nämlich, *erstens*, wenn k in der geraden Linie C liegt, wird $kg_2C \equiv k$ (Reg. 7); ebenso $kh_2C \equiv k$, also die linke Seite von (13.) in $kf.kg_1.kh_1$; was Null ist. *Ferner* da f, g_2, h_2 in der geraden Linie B liegen, so wird, wenn auch k in B liegt, $kf \equiv kg_2 \equiv kh_2 \equiv B$; also geht dann die linke Seite von (13.) in $B.BCg_1.BCh_1$ über, d. h. in ein Product dreier geraden Linien, die durch ein und denselben Punct (BC) gehen; also ist ihr Product Null. Es wird also jeder Punct k, der in B oder C fällt, der Gleichung (13.) genügen, und mithin mufs die Linie (13.) in 3 gerade Linien zerfallen. Um die dritte zu finden, suche man zwei ihrer Puncte. Ein solcher Punct ist aus der Gleichung (13.) leicht zu finden, wenn man sie in der Form $kf(kg_2Cg_1)h_1Ch_2x=0$ schreibt (Reg. 3), und den Punct so bestimmt, dafs $kf(kg_2Cg_1)h_1$ schon Null ist. Die Gleichung $kf(kg_2Cg_1)h_1 = 0$ sagt aus, dafs die geraden Linien kf und kg_2Cg_1 durch den Punct h_1 gehen, d. h. dafs $kfh_1=0$, $kgCg_1h_1=0$ ist; oder diese Gleichungen umgekehrt (Reg. 3), dafs $h_1fk=0$ und $h_1g_1Cgk=0$ ist; also liegt dann k in den beiden Geraden h_1f und h_1g_1Cg. Der so gefundene Punct werde mit α bezeichnet, also

$$\alpha \equiv h_1g_1Cg(h_1f)$$

gesetzt. Aus gleichem Grunde wird der Gleichung (13.) durch den Punct

$$\beta = h_1g_1Ch(g_1f)$$

genügt, und da diese Puncte im Allgemeinen nicht in den Geraden B und C liegen, so ist $\alpha\beta$ die dritte der Geraden, in welche die Linie (13.) zerfällt. Liegt nun k in dieser Geraden, so wird der Gleichung (13.) genügt; d. h. es gehen dann die 3 geraden Linien kf, kg_2Cg_1, kh_2Ch_1 durch einen und denselben Punct; derselbe heifse b_1, so wird nun die Gleichung

$$xaAa_1.xbBkCb_1.xc = 0$$

durch jeden der 9 Puncte $a \dots i$, wenn er statt x gesetzt wird, befriedigt. Denn dafs die Puncte a, b, c, d, e, i ihr genügen, ist oben bewiesen; aber auch f, g, h genügen ihr, denn da die geraden Linien kf, kg_2Cg_1, kh_2Ch_1 durch b_1 gehen, so hat man, wenn man noch für kf das ihm Gleiche $kfCf$ schreibt, die drei Gleichungen

$$kfCfb_1 = 0,\quad kg_2Cg_1b_1 = 0,\quad kh_2Ch_1b_1 = 0,$$

oder umgeordnet (Reg. 2, 3):

$$fb_1Ckf = 0,\quad g_1b_1Ckg_2 = 0,\quad h_1b_1Ckh_2 = 0.$$

Aber f, g_1, h_1 waren die Werthe von p, und f, g_2, h_2 die von q, wenn x beziehlich die Werthe f, g, h annahm, also wird die Gleichung (12.) auch für $x \equiv f, g, h$ erfüllt, mithin auch die mit (12.) identische Gleichung (11); und die Aufgabe ist gelöst. Da übrigens k in $\alpha\beta$ und in $i_1 i_2$ lag, so hat man $k \equiv \alpha\beta(i_1 i_2)$, und da b_1 in kf und in $kg_2 Cg_1$ lag, so hat man $b_1 \equiv kg_2 Cg_1(kf)$. Somit hat sich folgender Satz ergeben:

„Wenn $a, \ldots i$ neun beliebige Puncte sind, und

$$A \equiv de,\ a_1 \equiv af.cd,\ B \equiv ef,\ C \equiv ei_1,\ k \equiv \alpha\beta(i_1 i_2),\ b_1 \equiv kg_2 Cg_1(kf)$$

gesetzt wird, wo g_1, h_1, i_1 die Puncte sind, in welche sich $xaAa_1.xc$ verwandelt, wenn man statt x nach und nach die Puncte g, h, i substituirt, und g_2, i_2 die Puncte, in welche sich xbB verwandelt, wenn man statt x beziehlich die Puncte g und i setzt, und wo

$$\alpha \equiv h_1 g_1 Cg(h_1 f); \qquad \beta \equiv h_1 g_1 Ch(g_1 f)$$

ist: so ist

$$xaAa_1.xbBkCb_1.xc = 0$$

die Gleichung der Curve dritter Ordnung, welche durch die gegebenen 9 Puncte $a \ldots i$ geht."

Es läfst sich die gefundene Gleichung nach (§. 6.) nun auch auf die einfachere Form (2.) zurückführen; was ich jedoch nicht weiter verfolge.

Es drückt die oben gefundene Gleichung zugleich die lineale Beziehung aus, welche zwischen 10 Puncten $a, b, \ldots i, x$ herrschen mufs, damit sie in einer Curve dritter Ordnung liegen; also die lineale Eigenschaft des einer solchen eingeschriebenen *Zehnecks*.

Es ist dies die einfachste Eigenschaft dieses Zehnecks, die ich bisher bemerkt habe, obgleich die Gleichung (11.), welche dieselbe darstellt, nachdem man statt der darin vorkommenden Gröfsen die angegebenen Ausdrücke substituirt hat, bis nur noch die 10 Ecken des Zehnecks darin vorkommen, noch immer 351 Factoren enthält, indem nämlich a, c, d je 62mal, x, b, e, f, g, h, i beziehlich 3, 5, 44, 43, 24, 21, 25mal darin vorkommen.

§. 9.

Fernere Sätze über das Zehneck in einer Curve dritter Ordnung.

Ich theile zum Schlusse noch einige hierhergehörige Sätze mit, ohne den leicht sich ergebenden Beweis beizufügen.

I. Zwischen 10 Puncten $a \dots k$ einer Curve dritter Ordnung bestehen folgende Eigenschaften:

a) Wenn man durch 4 der Puncte (z. B. a, b, c, d) 6 Kegelschnitte legt, welche aufserdem beziehlich durch je einen der übrigen 6 Puncte ($e \dots k$) gehen, so läfst sich stets ein eilfter Punct (l) von der Art finden, dafs jene 6 Kegelschnitte mit den 6 Strahlen, die von dem eilften Puncte (b) nach diesen 6 Puncten ($e \dots k$) gehen, *projectivisch* sind.

b) Wenn man zwei von den Puncten (z. B. a, b) zu Mittelpuncten zweier Strahlbüschel von je 8 Strahlen macht, deren entsprechende Strahlen sich in den übrigen 8 Puncten ($c \dots k$) schneiden, so lassen sich stets zwei Gerade A und B finden, welche jenen Strahlbüscheln *projectivisch* sind, und welche die Beschaffenheit haben, dafs jede Verbindungslinie zweier entsprechender Puncte dieser Geraden durch den Punct geht, in welchem sich die diesen Puncten entsprechenden Strahlen jener Strahlbüschel schneiden.

c) Wenn man drei von den Puncten (z. B. a, b, c) zu Mittelpuncten dreier Strahlbüschel von je 7 Strahlen macht, deren entsprechende Strahlen sich in den 7 übrigen Puncten ($d \dots k$) treffen, so lassen sich allemal 3 siebenpunctige Gerade finden, die beziehlich den 3 Strahlenbüscheln *projectivisch* sind, und von deren Puncten je 3 entsprechende in gerader Linie liegen.

d) Wenn man, wie in *c*), drei der Puncte zu Mittelpuncten dreier Strahlenbüschel von je 7 Strahlen macht, deren entsprechende Strahlen sich in den 7 übrigen Puncten treffen, so lassen sich stets 3 andere Strahlbüschel von je 7 Strahlen finden, die den ersteren *projectivisch* sind, und von deren Strahlen je 3 entsprechende durch einen und denselben Punct gehen.

e) Legt man durch die 10 Puncte zwei gesonderte, (d. h. nicht ganz oder theilweise zusammenfallende) Linien *vierter* Ordnung, so schneiden sich diese aufserdem in 6 Puncten, durch welche sich ein Kegelschnitt legen läfst.

II. *Umgekehrt:* Wenn 10 Puncte eine der genannten 5 Eigenschaften besitzen, so liegen sie in einer Linie dritter Ordnung.

Von diesen 5 Eigenschaften habe ich die erste schon früher (Bd. 42. S. 208) in entsprechender Weise für Curven beliebiger Ordnung nachgewiesen, und namentlich auch auf Curven vierter Ordnung angewandt (Bd. 44. S. 21 ff.). Die folgenden 3 Eigenschaften gehen aus den 3 Hauptformen der linealen Gleichungen dritten Grades, wie sie an die Spitze dieses Aufsatzes gestellt sind,

hervor. Die fünfte Eigenschaft, welche sich am leichtesten durch Functionsverknüpfungen (vergl. Bd. 42. S. 204 ff.) ableiten läfst, erhält ein besonderes Interesse, wenn man als die betreffenden Curven vierter Ordnung 2 Vereine von je 2 Kegelschnitten annimmt, von denen jeder Kegelschnitt durch 5 der gegebenen Puncte geht, der demselben Vereine angehörige also durch die 5 übrigen Puncte. Es zeigt sich diese Eigenschaft der des *Sechsecks,* welches einem Kegelschnitte eingeschrieben ist, ganz entsprechend, indem sich der *Pascal*sche Satz zu folgendem Satze erweitern läfst.

„Wenn man durch 6 Puncte eines Kegelschnitts 2 gesonderte Linien dritter Ordnung legt, so treffen sich diese aufserdem in 3 Puncten, die in gerader Linie liegen. Und nimmt man hierbei als die betreffenden Curven 2 Vereine von je 3 Geraden an, so hat man den *Pascal*schen Satz in der gewöhnlichen Form."

Stettin, den 15. April 1855.

18.

Note sur une formule pour la reversion des séries.

(Par Mr. *A. Cayley* à Londres.)

Je me propose de développer dans cette note, pour le cas de trois variables (ce qui suffit pour faire voir la loi dans le cas d'un nombre quelconque de variables) une formule qui se trouve dans le mémoire remarquable de *Jacobi*, „de resolutione aequationum per series infinitas," *Crelle* t. VI. p. 257. Voici la formule dont il s'agit. Soit $f(x,y,z)$ une fonction rationnelle et entière des variables x, y, z et mettons $u = X$, $v = Y$, $w = Z$, où X, Y, Z sont des fonctions rationnelles et entières des variables x, y, z, telles que $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ ne contiennent que les puissances et les produits du deuxième ordre et des ordres supérieurs des variables. Cela étant on aura

$$f(x,y,z) = \left[f(x,y,z)\frac{\partial(X,Y,Z)}{\partial(x,y,z)}\cdot\frac{1}{(X-u)(Y-v)(Z-w)}\right]_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}},$$

où la notation $\frac{\partial(X,Y,Z)}{\partial(x,y,z)}$ dénote le déterminant fonctionel ou „*Jacobian*" de X, Y, Z par rapport à x, y, z et la notation $[\,]_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}}$ signifie le coefficient de $x^{-1}y^{-1}z^{-1}$ dans le développement de la fonction en dedans des $[\,]$; ce développement doit s'éffectuer d'une manière déterminée, savoir il faut d'abord développer les facteurs $\frac{1}{X-u}$ selon les puissances descendantes de x c. à d. dans la forme $\frac{1}{X}+\frac{u}{X^2}+\frac{u^2}{X^3}+$ etc., et puis écrivant $X = x+P$ (où P est fonction des trois variables) il faut développer les puissances de X selon les puissances descendantes du monome x c. à d. dans la forme $X^{-m} = x^{-m}-mx^{-m-1}P+\frac{1}{2}m(m+1)x^{-m-2}P^2-$ etc., ce qui est en effet un développement selon les puissances *ascendantes* des variables.

La formule donne

$$\text{Coeff. } u^a v^b w^c \text{ dans } f(x,y,z) = \left[f(x,y,z)\frac{\partial(X,Y,Z)}{\partial(x,y,z)}\cdot\frac{1}{X^{a+1}Y^{b+1}Z^{c+1}}\right]_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}},$$

ou ce qui est la même chose

$$\text{Coeff. } u^a v^b w^c \text{ dans } f(x,y,z)$$

$$= \left[f(x,y,z)\frac{\partial\left(-\frac{1}{a}X^{-a}, -\frac{1}{b}Y^{-b}, -\frac{1}{c}Z^{-c}\right)}{\partial(x,y,z)}\right]_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}}.$$

Soit à présent

$$X = x \ldots + A_{f,g,h}x^f y^g z^h + \text{etc.}$$
$$Y = y \ldots + B_{i,j,k}x^i y^j z^k + \text{etc.}$$
$$Z = z \ldots + C_{l,m,n}x^l y^m z^n + \text{etc.}$$

$$f(x,y,z) = \ \ldots\ \Theta_{P,Q,R}x^P y^Q z^R + \text{etc.}$$

Dans ces expressions et partout dans ce qui suit, les etc's se rapportent à des termes q'on obtient en affixant des accents en nombre quelconque aux symboles indéterminés.

En employant la notation de *Gaufs* $\Pi\alpha = 1.2.3\ldots\alpha$, on obtient pour le terme général de $-\frac{1}{\mathrm{a}}X^{-\mathrm{a}}$,

$$(-)^{r-1}\frac{\Pi(\mathrm{a}+r-1)}{\Pi\mathrm{a}\,\Pi\alpha\text{ etc.}}A^{\alpha}_{f,g,h}\text{ etc. } x^{-\mathrm{a}-r+F}y^G z^H,$$

où

$$\alpha + \text{etc.} = r,\quad f\alpha + \text{etc.} = F,\quad g\alpha + \text{etc.} = G,\quad h\alpha + \text{etc.} = H.$$

De même le terme général de $-\frac{1}{\mathrm{b}}Y^{-\mathrm{b}}$ est

$$(-)^{s-1}\frac{\Pi(\mathrm{b}+s-1)}{\Pi\mathrm{b}\,\Pi\beta\text{ etc.}}B^{\beta}_{i,j,k}\text{ etc. } x^I y^{-\mathrm{b}-s+J}z^K,$$

où

$$\beta + \text{etc.} = s,\quad i\beta + \text{etc.} = I,\quad j\beta + \text{etc.} = J,\quad k\beta + \text{etc.} = K,$$

et le terme général de $-\frac{1}{\mathrm{c}}Z^{-\mathrm{c}}$ est

$$(-)^{t-1}\frac{\Pi(\mathrm{c}+t-1)}{\Pi\mathrm{c}\,\Pi\gamma\text{ etc.}}C^{\gamma}_{l,m,n},\text{ etc. } x^L y^M z^{-\mathrm{c}-t+N},$$

où

$$\gamma + \text{etc.} = t,\quad l\gamma + \text{etc.} = L,\quad m\gamma + \text{etc.} = M,\quad n\gamma + \text{etc.} = N.$$

En formant de là le terme général du *Jacobian* et en multipliant par le terme général de $f(x,y,z)$ on obtient pour le terme général de l'expression en dedans des [ ], la valeur que voici,

$$(-)^{r+s+t}\frac{\Pi(\mathrm{a}+r-1)\,\Pi(\mathrm{b}+s-1)\,\Pi(\mathrm{c}+t-1)}{\Pi\mathrm{a}\,\Pi\mathrm{b}\,\Pi\mathrm{c}\,\Pi\alpha\text{ etc. }\Pi\beta\text{ etc. }\Pi\gamma\text{ etc.}}\times$$

$$A^{\alpha}_{f,g,h}\text{ etc. } B^{\beta}_{i,j,k}\text{ etc. } C^{\gamma}_{l,m,n}\text{ etc. } \Theta_{P,Q,R}\begin{vmatrix}\mathrm{a}+r-F, & -G, & -H\\ -I, & \mathrm{b}+s-J, & -K\\ -L, & -M, & \mathrm{c}+t-N\end{vmatrix}\times$$

$$x^{-\mathrm{a}-r+F+I+L+P-1}\,.\,y^{-\mathrm{b}-s+G+J+M+Q-1}\,.\,z^{-\mathrm{c}-t+H+K+N+R-1},$$

et pour trouver le terme qui contient $x^{-1}y^{-1}z^{-1}$ on n'a qu'à écrire dans cette expression

$$F+I+L+P=\mathrm{a}+r,\quad G+J+M+Q=\mathrm{b}+s,\quad H+K+N+R=\mathrm{c}+t,$$

le coefficient de $x^{-1}y^{-1}z^{-1}$ sera alors la valeur de l'expression $[\ \ ]_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}}$ qu'il s'agissait de trouver. En effectuant cela et en recapitulant les formules on obtient le théorème suivant: en posant

$$\begin{aligned} X &= x\ldots+A_{f,g,h}\,x^f y^g z^h+\text{etc.} = u, \\ Y &= y\ldots+B_{i,j,k}\,x^i y^j z^k+\text{etc.} = v, \\ Z &= z\ldots+C_{l,m,n}\,x^l y^m z^n+\text{etc.} = w, \end{aligned}$$

$$f(x,y,z) = \quad\ldots+\Theta_{P,Q,R}\,x^P y^Q z^R+\text{etc.}$$

on aura pour le terme général du coeff. $u^{\mathrm{a}}v^{\mathrm{b}}w^{\mathrm{c}}$ dans $f(x,y,z)$ la valeur que voici,

$$(-)^{r+s+t}\frac{\Pi(\mathrm{a}+r-1)\,\Pi(\mathrm{b}+s-1)\,\Pi(\mathrm{c}+t-1)}{\Pi\mathrm{a}\,\Pi\mathrm{b}\,\Pi\mathrm{c}\,\Pi\alpha\,\text{etc.}\;\Pi\beta\,\text{etc.}\;\Pi\gamma\,\text{etc.}}\times$$

$$A^{\alpha}_{f,g,h}\,\text{etc.}\;B^{\beta}_{i,j,k}\,\text{etc.}\;C^{\gamma}_{l,m,n}\,\text{etc.}\;\Theta_{P,Q,R}\begin{vmatrix} P+I+L, & -G, & -H \\ -I, & Q+G+M, & -K \\ -L, & -M, & R+H+K \end{vmatrix}$$

dans laquelle

$$\begin{array}{lll} \alpha+\text{etc.}=r, & \beta+\text{etc.}=s, & \gamma+\text{etc.}=t, \\ f\alpha+\text{etc.}=F, & g\alpha+\text{etc.}=G, & h\alpha+\text{etc.}=H, \\ i\beta+\text{etc.}=I, & j\beta+\text{etc.}=J, & k\beta+\text{etc.}=K, \\ l\gamma+\text{etc.}=L, & m\gamma+\text{etc.}=M, & n\gamma+\text{etc.}=N, \end{array}$$

$$P+F+I+L=\mathrm{a}+r,\quad Q+G+J+M=\mathrm{b}+s,\quad R+H+K+N=\mathrm{c}+t.$$

Les dernières équations peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{array}{lllll} P+ & (f-1)\alpha+\text{etc.}+ & i\beta+\text{etc.}+ & l\gamma+\text{etc.} & = \mathrm{a}. \\ Q+ & g\alpha+\text{etc.}+ & (j-1)\beta+\text{etc.}+ & m\gamma+\text{etc.} & = \mathrm{b}, \\ R+ & h\alpha+\text{etc.}+ & k\beta+\text{etc.}+ & (n-1)\gamma+\text{etc.} & = \mathrm{c}, \end{array}$$

qui sont les conditions auxquelles doivent satisfaire les valeures de P, Q, R, α etc., β etc., γ etc., f, g, h etc., i, j, k etc., l, m, n etc.; en ajoutant ces équations on obtient

$$\begin{aligned} P+Q+R+(f+g+h-1)\alpha+\text{etc.}+(i+j+k-1)\beta+\text{etc.} \\ +(l+m+n-1)\gamma+\text{etc.} = \mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c} \end{aligned}$$

et les nombres $f+g+h-1$ etc. $i+j+k-1$ etc. $l+m+n-1$ etc. sont positifs, il n'y a donc qu'un nombre fini (comme cela doit être) de solutions des équations indéterminées.

Il y a une manière assez simple pour calculer le déterminant qui entre dans la formule, pour cela je représente les termes P, 1 etc. par les notations symboliques $X\vartheta$, Xy etc. de manière que le déterminant devient

$$\begin{vmatrix} X\vartheta + Xy + Xz, & -Yx, & -Zx \\ -Xy, & Y\vartheta + Yx + Yz, & -Zy \\ -Xz, & -Yz, & Z\vartheta + Zx + Zy \end{vmatrix}$$

or ce déterminant est ce que devient le produit

$$(X\vartheta + Xy + Xz)(Y\vartheta + Yx + Yz)(Z\vartheta + Zx + Zy),$$

en omettant du développement tous les termes qui contiennent un cycle tel que $Xy.Yx$ ou $Xy.Yz.Zx$. Cela donne pour le déterminant la somme des seize termes

$$\begin{aligned} &X\vartheta.Y\vartheta.Z\vartheta + Y\vartheta.Z\vartheta(Xy+Xz) + Z\vartheta.X\vartheta(Yz+Yx) + X\vartheta.Y\vartheta(Zx+Zy) \\ &+ X\vartheta(Yx.Zx + Yx.Zy + Yz.Zx) + Y\vartheta(Zy.Xy + Zy.Xz + Zx.Xy) \\ &+ Z\vartheta(Xz.Yz + Xz.Yx + Xy.Yz) \end{aligned}$$

et la même chose est vraie quel que soit l'ordre du déterminant. C'est M. *Sylvester* qui m'a fait cette remarque.

Les formules de *Jacobi* s'appliquent aussi au cas où u, v, w etc. sont données en termes de x, y, z etc. au moyen d'équations et non pas explicitement comme auparavant, mais je ne chercherai pas à présent ce que deviennent les formules pour ce cas plus général.

On peut appliquer la formule au problème de la transformation des variables indépendantes dans le calcul différentiel. En effet, soient u, v, w des fonctions quelconques de x, y, z et prenons ξ, η, ζ pour les incréments de x, y, z respectivement et υ, ν, ω pour les incréments de u, v, w respectivement; on aura

$$\xi = \left\{\left(\upsilon\frac{d}{du} + \nu\frac{d}{dv} + \omega\frac{d}{dw}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\upsilon\frac{d}{du} + \nu\frac{d}{dv} + \omega\frac{d}{dw}\right)^2 + \text{etc.}\right\} x,$$

$$\eta = \left\{\left(\upsilon\frac{d}{du} + \nu\frac{d}{dv} + \omega\frac{d}{dw}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\upsilon\frac{d}{du} + \nu\frac{d}{dv} + \omega\frac{d}{dw}\right)^2 + \text{etc.}\right\} y,$$

$$\zeta = \left\{\left(\upsilon\frac{d}{du} + \nu\frac{d}{dv} + \omega\frac{d}{dw}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\upsilon\frac{d}{du} + \nu\frac{d}{dv} + \omega\frac{d}{dw}\right)^2 + \text{etc.}\right\} z.$$

Soit

$$\nabla = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$$

le *Jacobian* de x, y, z par rapport à u, v, w; et mettons

$$\left(\upsilon\frac{d}{du}+\nu\frac{d}{dv}+\omega\frac{d}{dw}\right)x = p,$$

$$\left(\upsilon\frac{d}{du}+\nu\frac{d}{dv}+\omega\frac{d}{dw}\right)y = q,$$

$$\left(\upsilon\frac{d}{du}+\nu\frac{d}{dv}+\omega\frac{d}{dw}\right)z = r,$$

υ, ν, ω seront des fonctions linéaires de p, q, r et en formant avec ces valeurs l'expression de $\upsilon\frac{d}{du}+\nu\frac{d}{dv}+\omega\frac{d}{dw}$, on trouve

$$\upsilon\frac{d}{du}+\nu\frac{d}{dv}+\omega\frac{d}{dw} = p\bar{x}+q\bar{y}+r\bar{z},$$

où $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ sont des opérations de la forme $L\frac{d}{du}+M\frac{d}{dv}+N\frac{d}{dw}$, qui peuvent être représentées symboliquement de cette manière,

$$\bar{x} = \frac{1}{\nabla}\begin{vmatrix} \frac{d}{du}, & \frac{d}{dv}, & \frac{d}{dw} \\ \frac{dy}{du}, & \frac{dy}{dv}, & \frac{dy}{dw} \\ \frac{dz}{du}, & \frac{dz}{dv}, & \frac{dz}{dw} \end{vmatrix}$$

et de même pour $\bar{y}$ et $\bar{z}$; il faut faire attention qu'en opérant avec ces symboles il faut traiter comme des constantes les fonctions de u, v, w qui entrent dans ces mêmes symboles.

Nous avons évidemment $\bar{x}x = 1$, $\bar{y}x = 0$, $\bar{z}x = 0$, et de même $\bar{x}y = 0$ etc., on obtient de là

$$\xi = p+\tfrac{1}{2}(p\bar{x}+q\bar{y}+r\bar{z})^2 x + \text{etc.},$$
$$\eta = q+\tfrac{1}{2}(p\bar{x}+q\bar{y}+r\bar{z})^2 y + \text{etc.},$$
$$\zeta = r+\tfrac{1}{2}(p\bar{x}+q\bar{y}+r\bar{z})^2 z + \text{etc.},$$

soit à présent ϑ une fonction quelconque de x, y, z ou de u, v, w. En envisageant ϑ comme fonction de x, y, z, on trouve l'incrément de cette

fonction en opérant sur ϑ avec le symbole

$$\left(\xi\frac{d}{dx}+\eta\frac{d}{dy}+\zeta\frac{d}{dz}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\xi\frac{d}{dx}+\eta\frac{d}{dy}+\zeta\frac{d}{dz}\right)^2+\text{ etc.},$$

mais en envisageant ϑ comme fonction de u, v, w et en faisant attention à l'équation $v\frac{d}{du}+\nu\frac{d}{dv}+\omega\frac{d}{dw} = p\bar{x}+q\bar{y}+r\bar{z}$, on trouve ce même incrément en opérant sur ϑ avec le symbole

$$(p\bar{x}+q\bar{y}+r\bar{z})+\tfrac{1}{2}(p\bar{x}+q\bar{y}+r\bar{z})^2+\text{ etc.}$$

et les deux résultats deviendront identiques en substituant pour p, q, r les valeurs de ces quantités en termes de ξ, η, ζ, valeurs qui se trouvent par la reversion des séries qui donnent ξ, η, ζ en termes de p, q, r. C'est à dire nous aurons,

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\mathrm{a}}\left(\frac{d}{dy}\right)^{\mathrm{b}}\left(\frac{d}{dz}\right)^{\mathrm{c}} = \Pi\mathrm{a}\,\Pi\mathrm{b}\,\Pi\mathrm{c}.\text{coeff.}\,\xi^{\mathrm{a}}\eta^{\mathrm{b}}\zeta^{\mathrm{c}} \text{ dans}$$

$$\{(p\bar{x}+q\bar{y}+r\bar{z})+\tfrac{1}{2}(p\bar{x}+q\bar{y}+r\bar{z})^2+\text{etc.}\},$$

où

$$\xi = p+\tfrac{1}{2}(p\bar{x}+q\bar{y}+r\bar{z})^2x+\text{ etc.},$$
$$\eta = q+\tfrac{1}{2}(p\bar{x}+q\bar{y}+r\bar{z})^2y+\text{ etc.},$$
$$\zeta = r+\tfrac{1}{2}(p\bar{x}+q\bar{y}+r\bar{z})^2z+\text{ etc.}$$

C'est là le problème de la reversion des séries qui vient d'être traité; et en substituant

$$\frac{1}{\Pi f\,\Pi g\,\Pi h}x^{-f}y^{-g}z^{-h}x,\quad \frac{1}{\Pi i\,\Pi j\,\Pi k}x^{-i}y^{-j}z^{-k}y,\quad \frac{1}{\Pi l\,\Pi m\,\Pi n}x^{-l}y^{-m}z^{-n}z,$$
$$\frac{1}{\Pi P\,\Pi Q\,\Pi R}x^{-P}y^{-Q}z^{-R}$$

au lieu de

$$A_{f,g,h},\quad B_{i,j,k},\quad C_{l,m,n},\quad \Theta_{P,Q,R},$$

on trouve le théorème suivant:

Théorème. Le terme général de $\left(\frac{d}{dx}\right)^{\mathrm{a}}\left(\frac{d}{dy}\right)^{\mathrm{b}}\left(\frac{d}{dz}\right)^{\mathrm{c}}$ est

$$K\Omega(x^{-f}y^{-g}z^{-h}x)^{\alpha}\text{ etc. }(x^{-i}y^{-j}z^{-k}y)^{\beta}\text{ etc. }(x^{-l}y^{-m}z^{-n}z)^{\gamma}\text{ etc. }x^{-P}y^{-Q}z^{-R}$$

expression dans laquelle

$$\begin{array}{lll} \alpha + \text{etc.} = r, & \beta + \text{etc.} = s, & \gamma + \text{etc.} = t, \\ f\alpha + \text{etc.} = F, & g\alpha + \text{etc.} = G, & h\alpha + \text{etc.} = H, \\ i\beta + \text{etc.} = I, & j\beta + \text{etc.} = J, & k\beta + \text{etc.} = K, \\ l\gamma + \text{etc.} = L, & m\gamma + \text{etc.} = M, & n\gamma + \text{etc.} = N, \end{array}$$

$$F + I + L + P = \mathrm{a} + r, \quad G + J + M + Q = \mathrm{b} + s, \quad H + K + N + R = \mathrm{c} + t,$$

$$K = (-)^{r+s+t} \times$$

$$\frac{\Pi(\mathrm{a}+r-1)\,\Pi(\mathrm{b}+s-1)\,\Pi(\mathrm{c}+t-1)}{\Pi\alpha\,\text{etc.}\,\Pi\beta\,\text{etc.}\,\Pi\gamma\,\text{etc.}\,(\Pi f\,\Pi g\,\Pi h)^{\alpha}\,\text{etc.}\,(\Pi i\,\Pi j\,\Pi k)^{\beta}\,\text{etc.}\,(\Pi l\,\Pi m\,\Pi n)^{\gamma}\,\text{etc}\;\Pi P\,\Pi Q\,\Pi R},$$

$$\Omega = \begin{vmatrix} P + I + L, & -G, & -H \\ -I, & Q + G + M, & -K \\ -L, & -M & R + H + K \end{vmatrix}$$

et où les nombres $f + g + h - 1$ etc., $i + j + k - 1$ etc., $l + m + n - 1$ etc. sont tous positifs comme auparavant.

La formule contient les symboles $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ qui sont chacun une fonction linéaire de $\frac{d}{du}, \frac{d}{dv}, \frac{d}{dw}$, on pourrait donc se proposer la question de trouver le terme général en developpant la formule de manière à ne contenir que des puissances et des produits de ces symboles $\frac{d}{du}, \frac{d}{dv}, \frac{d}{dw}$; c'est à quoi se rapportent les recherches très étendues que vient de faire M. *Sylvester* sur ce sujet et qui embrassent aussi bien le cas où les nouvelles variables sont données explicitement que celui où les deux systèmes de variables sont liés par des équations données.

Il y a une autre manière de traiter cette question de la transformation des variables indépendantes, savoir en écrivant

$$R = \xi\frac{d}{dx} + \eta\frac{d}{dy} + \zeta\frac{d}{dz},$$

$$\varrho = \xi\overline{x} + \eta\overline{y} + \zeta\overline{z},$$

on peut exprimer les puissances de R au moyen de ϱ et de cette autre quantité symbolique

$$\varDelta = x\overline{x} + y\overline{y} + z\overline{z}.$$

fonction en opérant sur ϑ avec le symbole

$$\left(\xi\frac{d}{dx}+\eta\frac{d}{dy}+\zeta\frac{d}{dz}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\xi\frac{d}{dx}+\eta\frac{d}{dy}+\zeta\frac{d}{dz}\right)^2+\text{ etc.},$$

mais en envisageant ϑ comme fonction de u, v, w et en faisant attention à l'équation $v\frac{d}{du}+\nu\frac{d}{dv}+\omega\frac{d}{dw} = p\bar{x}+q\bar{y}+r\bar{z}$, on trouve ce même incrément en opérant sur ϑ avec le symbole

$$(p\bar{x}+q\bar{y}+r\bar{z})+\tfrac{1}{2}(p\bar{x}+q\bar{y}+r\bar{z})^2+\text{ etc.}$$

et les deux résultats deviendront identiques en substituant pour p, q, r les valeurs de ces quantités en termes de ξ, η, ζ, valeurs qui se trouvent par la reversion des séries qui donnent ξ, η, ζ en termes de p, q, r. C'est à dire nous aurons,

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\mathrm{a}}\left(\frac{d}{dy}\right)^{\mathrm{b}}\left(\frac{d}{dz}\right)^{\mathrm{c}} = \Pi\mathrm{a}\,\Pi\mathrm{b}\,\Pi\mathrm{c}.\text{coeff.}\,\xi^{\mathrm{a}}\eta^{\mathrm{b}}\zeta^{\mathrm{c}}\text{ dans}$$

$$\{(p\bar{x}+q\bar{y}+r\bar{z})+\tfrac{1}{2}(p\bar{x}+q\bar{y}+r\bar{z})^2+\text{etc.}\},$$

où

$$\xi = p+\tfrac{1}{2}(p\bar{x}+q\bar{y}+r\bar{z})^2x+\text{ etc.},$$
$$\eta = q+\tfrac{1}{2}(p\bar{x}+q\bar{y}+r\bar{z})^2y+\text{ etc.},$$
$$\zeta = r+\tfrac{1}{2}(p\bar{x}+q\bar{y}+r\bar{z})^2z+\text{ etc.}$$

C'est là le problème de la reversion des séries qui vient d'être traité; et en substituant

$$\frac{1}{\Pi f\,\Pi g\,\Pi h}x^{-f}y^{-g}z^{-h}x,\quad \frac{1}{\Pi i\,\Pi j\,\Pi k}x^{-i}y^{-j}z^{-k}y,\quad \frac{1}{\Pi l\,\Pi m\,\Pi n}x^{-l}y^{-m}z^{-n}z,$$
$$\frac{1}{\Pi P\,\Pi Q\,\Pi R}x^{-P}y^{-Q}z^{-R}$$

au lieu de

$$A_{f,g,h},\quad B_{i,j,k},\quad C_{l,m,n},\quad \Theta_{P,Q,R},$$

on trouve le théorème suivant:

Théorème. Le terme général de $\left(\frac{d}{dx}\right)^{\mathrm{a}}\left(\frac{d}{dy}\right)^{\mathrm{b}}\left(\frac{d}{dz}\right)^{\mathrm{c}}$ est

$$K\Omega(x^{-f}y^{-g}z^{-h}x)^{\alpha}\text{ etc. }(x^{-i}y^{-j}z^{-k}y)^{\beta}\text{ etc. }(x^{-l}y^{-m}z^{-n}z)^{\gamma}\text{ etc. }x^{-P}y^{-Q}z^{-R}$$

expression dans laquelle

$$\begin{array}{lll} \alpha+\text{etc.}=r, & \beta+\text{etc.}=s, & \gamma+\text{etc.}=t, \\ f\alpha+\text{etc.}=F, & g\alpha+\text{etc.}=G, & h\alpha+\text{etc.}=H, \\ i\beta+\text{etc.}=I, & j\beta+\text{etc.}=J, & k\beta+\text{etc.}=K, \\ l\gamma+\text{etc.}=L, & m\gamma+\text{etc.}=M, & n\gamma+\text{etc.}=N, \end{array}$$

$$F+I+L+P=\mathrm{a}+r,\quad G+J+M+Q=\mathrm{b}+s,\quad H+K+N+R=\mathrm{c}+t,$$

$$K=(-)^{r+s+t}\times$$

$$\frac{\Pi(\mathrm{a}+r-1)\,\Pi(\mathrm{b}+s-1)\,\Pi(\mathrm{c}+t-1)}{\Pi\alpha\,\text{etc.}\,\Pi\beta\,\text{etc.}\,\Pi\gamma\,\text{etc.}\,(\Pi f\,\Pi g\,\Pi h)^{\alpha}\,\text{etc.}\,(\Pi i\,\Pi j\,\Pi k)^{\beta}\,\text{etc.}\,(\Pi l\,\Pi m\,\Pi n)^{\gamma}\,\text{etc}\,\Pi P\,\Pi Q\,\Pi R},$$

$$\Omega=\begin{vmatrix} P+I+L, & -G, & -H \\ -I, & Q+G+M, & -K \\ -L, & -M & R+H+K \end{vmatrix}$$

et où les nombres $f+g+h-1$ etc., $i+j+k-1$ etc., $l+m+n-1$ etc. sont tous positifs comme auparavant.

La formule contient les symboles $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ qui sont chacun une fonction linéaire de $\frac{d}{du}$, $\frac{d}{dv}$, $\frac{d}{dw}$, on pourrait donc se proposer la question de trouver le terme général en developpant la formule de manière à ne contenir que des puissances et des produits de ces symboles $\frac{d}{du}$, $\frac{d}{dv}$, $\frac{d}{dw}$; c'est à quoi se rapportent les recherches très étendues que vient de faire M. *Sylvester* sur ce sujet et qui embrassent aussi bien le cas où les nouvelles variables sont données explicitement que celui où les deux systèmes de variables sont liés par des équations données.

Il y a une autre manière de traiter cette question de la transformation des variables indépendantes, savoir en écrivant

$$R=\xi\frac{d}{dx}+\eta\frac{d}{dy}+\zeta\frac{d}{dz},$$

$$\varrho=\xi\bar{x}+\eta\bar{y}+\zeta\bar{z},$$

on peut exprimer les puissances de R au moyen de ϱ et de cette autre quantité symbolique

$$\varDelta=x\bar{x}+y\bar{y}+z\bar{z}.$$

En effet en mettant $\chi = p\bar{x} + q\bar{y} + r\bar{z}$ on a

$$R + \frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{2.3}R^3 + \text{etc.} = \chi + \frac{1}{2}\chi^2 + \frac{1}{2.3}\chi^3 + \text{etc.},$$

où

$$\xi = p + \frac{1}{2}\chi^2 x + \frac{1}{2.3}\chi^3 x + \text{etc.},$$

$$\eta = q + \frac{1}{2}\chi^2 y + \frac{1}{2.3}\chi^3 y + \text{etc.},$$

$$\zeta = r + \frac{1}{2}\chi^2 z + \frac{1}{2.3}\chi^3 z + \text{etc.}$$

En se servant de la méthode des approximations successives, on trouve comme première approximation

$$p = \xi, \qquad q = \eta, \qquad r = \zeta,$$

et de là

$$\chi = \varrho;$$

comme seconde approximation

$$p = \xi - \tfrac{1}{2}\varrho^2 x, \qquad q = \eta - \tfrac{1}{2}\varrho^2 y, \qquad r = \zeta - \tfrac{1}{2}\varrho^2 z,$$

et de là

$$\chi = \varrho - \tfrac{1}{2}\varrho^2 \varDelta;$$

comme troisième approximation

$$p = \xi - \tfrac{1}{2}(\varrho^2 - \varrho^2\varDelta\varrho)x - \tfrac{1}{6}\varrho^3 x,$$
$$q = \eta - \tfrac{1}{2}(\varrho^2 - \varrho^2\varDelta\varrho)y - \tfrac{1}{6}\varrho^3 y,$$
$$r = \zeta - \tfrac{1}{2}(\varrho^2 - \varrho^2\varDelta\varrho)z - \tfrac{1}{6}\varrho^3 z,$$

et de là

$$\chi = \varrho - \tfrac{1}{2}\varrho^2\varDelta + \tfrac{1}{2}\varrho^2\varDelta\varrho\varDelta - \tfrac{1}{6}\varrho^3\varDelta, \qquad \chi^2 = \varrho^2 - \varrho^2\varDelta\varrho, \qquad \chi^3 = \varrho^3$$

et ainsi de suite; donc en substituant

$$\begin{aligned} R + \tfrac{1}{2}R^2 + \tfrac{1}{6}R^3 + \text{etc.} = \varrho &- \tfrac{1}{2}\varrho^2\varDelta + \tfrac{1}{2}\varrho^2\varDelta\varrho\varDelta - \tfrac{1}{6}\varrho^3\varDelta \\ &+ \tfrac{1}{2}\varrho^2 \quad - \tfrac{1}{2}\varrho^2\varDelta\varrho \\ &\qquad\qquad + \tfrac{1}{6}\varrho^3 \quad + \text{etc. etc.} \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} R &= \varrho, \\ R^2 &= \varrho^2 - \varrho^2\varDelta, \\ R^3 &= \varrho^3 - 3\varrho^2\varDelta\varrho - (\varrho^3 - 3\varrho^2\varDelta\varrho)\varDelta, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

formules dans lesquelles un terme tel que $\varrho^2 A$ signifie $\varrho^2 x . \overline{x} + \varrho^2 y . \overline{y} + \varrho^2 z . \overline{z}$, c. à d. l'opération du symbole ϱ^2 s'arrête aux quantités x, y, z faisant partie du symbole A qui vient immédiatement après le ϱ^2; la même chose a lieu dans tous les cas semblables. L'équation générale est

$$R^n = \Pi - \Pi A,$$

mais pour expliquer la forme de la fonction Π il faudrait faire des développements assez longs, dans lesquels je n'entrerai pas à cette occasion; la découverte de cette équation générale est due à M. *Sylvester,* qui l'établie d'une autre manière.

Londres, 2 Stone Buildings, 16 Avril 1855.

19.

Theorie der *Abel*'schen Functionen.

(Von Herrn Dr. *C. Weierstrafs.*)

Einleitung.

Das *Abel*'sche Theorem über die hyperelliptischen Integrale bildet die Grundlage für die Theorie einer neuen Gattung analytischer Functionen, die deswegen passend ***Abel'sche Functionen*** genannt, und folgendermafsen definirt werden können.

Es bedeute

$$R(x) = A_0(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{2\varrho+1})$$

eine ganze Function $(2\varrho+1)$ten Grades von x, wobei angenommen werde, dafs unter den Gröfsen

$$a_1, \quad a_2, \quad \dots \quad a_{2\varrho+1}$$

keine zwei gleiche sich finden, während sie im Übrigen beliebige (reelle und imaginäre) Werthe haben können. Ferner seien $u_1, u_2, \dots, u_\varrho$ ϱ unbeschränkt veränderliche Gröfsen, und zwischen diesen und eben so vielen von ihnen abhängigen $x_1, x_2, \dots, x_\varrho$ die nachstehenden Differential-Gleichungen, in denen

$$P(x) \text{ das Product } (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\varrho)$$

bedeutet, gegeben:

$$du_1 = \tfrac{1}{2}\frac{P(x_1)}{x_1-a_1}\cdot\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}+\tfrac{1}{2}\frac{P(x_2)}{x_2-a_1}\cdot\frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}}+\dots+\tfrac{1}{2}\frac{P(x_\varrho)}{x_\varrho-a_1}\cdot\frac{dx_\varrho}{\sqrt{R(x_\varrho)}},$$

$$du_2 = \tfrac{1}{2}\frac{P(x_1)}{x_1-a_2}\cdot\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}+\tfrac{1}{2}\frac{P(x_2)}{x_2-a_2}\cdot\frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}}+\dots+\tfrac{1}{2}\frac{P(x_\varrho)}{x_\varrho-a_2}\cdot\frac{dx_\varrho}{\sqrt{R(x_\varrho)}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$du_\varrho = \tfrac{1}{2}\frac{P(x_1)}{x_1-a_\varrho}\cdot\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}+\tfrac{1}{2}\frac{P(x_2)}{x_2-a_\varrho}\cdot\frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}}+\dots+\tfrac{1}{2}\frac{P(x_\varrho)}{x_\varrho-a_\varrho}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R(x_\varrho)}};\text{*)}$$

*) Man kann diesen Differential-Gleichungen mancherlei verschiedene Formen geben; die hier gewählte vereinfacht die Rechnung nicht unwesentlich, ohne dafs, wie später soll gezeigt werden, der Allgemeinheit Abbruch geschieht.

mit der Bestimmung, dafs $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ die Werthe $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ annehmen sollen, wenn $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ sämmtlich verschwinden.

Alsdann sind $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ als die Wurzeln einer Gleichung von der Form

$$x^\varrho + P_1 x^{\varrho-1} + P_2 x^{\varrho-2} + \cdots + P_\varrho = 0$$

zu betrachten, wo $P_1, P_2, \ldots, P_\varrho$ eindeutige analytische Functionen von $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ bedeuten; während eine zweite ganze Function von x des $(\varrho - 1)$ten Grades

$$Q_1 x^{\varrho-1} + Q_2 x^{\varrho-2} + \cdots + Q_\varrho,$$

deren Coefficienten eben solche Functionen von $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ sind, wenn man $x = x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ setzt, die zugehörigen Werthe von

$$\sqrt{R(x_1)}, \quad \sqrt{R(x_2)}, \quad \ldots, \quad \sqrt{R(x_\varrho)}$$

giebt.*)

Hiernach ist jeder rational und symmetrisch aus

$$x_1, x_2, \ldots, x_\varrho \text{ und } \sqrt{R(x_1)}, \sqrt{R(x_2)}, \ldots, \sqrt{R(x_\varrho)}$$

zusammengesetzte Ausdruck als eine eindeutige Function von $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ anzusehn. Insbesondere aber zeigt es sich, dafs das Product

$$(a_\mathfrak{r} - x_1)(a_\mathfrak{r} - x_2) \ldots (a_\mathfrak{r} - x_\varrho),$$

wo $\mathfrak{r}$ eine der Zahlen $1, 2, \ldots, 2\varrho + 1$ bedeutet, das *Quadrat* einer solchen ist. Betrachtet man demgemäfs, indem man

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_\varrho)$$

setzt, und unter $h_1, h_2, \ldots, h_{2\varrho+1}$ Constanten versteht, die Gröfsen

$$\sqrt{h_1 \varphi(a_1)}, \quad \sqrt{h_2 \varphi(a_2)}, \quad \ldots, \quad \sqrt{h_{2\varrho+1} \varphi(a_{2\varrho+1})}$$

als Functionen von $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$, so kann man nicht nur aus denselben die Coefficienten der Gleichung, deren Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ sind, leicht zusammensetzen, sondern sie zeichnen sich auch gleich den *elliptischen* $\sin \operatorname{am} u$, $\cos \operatorname{am} u$, $\Delta \operatorname{am} u$, auf welche sie sich für $\varrho = 1$ reduciren, und denen sie überhaupt vollkommen analog sind, durch eine solche Menge merkwürdiger und fruchtbarer Eigenschaften aus, dafs man ihnen und einer Reihe anderer, im Zusammenhange mit denselben stehenden, vorzugsweise den Namen „*Abel'sche Functionen*" zu geben berechtigt ist, und sie zum Hauptgegenstande der Betrachtung zu machen aufgefordert wird.

---

*) Den ersten Theil dieses Satzes hat bereits *Jacobi* ausgesprochen, und dadurch den wahren analytischen Charakter der Gröfsen $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ klar gemacht.

Die nächste Aufgabe, welche sich nun darbietet, betrifft die wirkliche Darstellung der im Vorstehenden definirten Gröfsen, sowie die Entwicklung ihrer hauptsächlichsten Eigenschaften. Sodann ist es auch erforderlich, das Integral

$$\int\left\{\frac{F(x_1)\,dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}+\frac{F(x_2)\,dx_2}{\sqrt{R(x_2)}}+\cdots+\frac{F(x_\varrho)\,dx_\varrho}{\sqrt{R(x_\varrho)}}\right\},$$

wo $F(x)$ eine beliebige rationale Function von x bedeutet, als Function von $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ auszudrücken. Beide Probleme finden in der gegenwärtigen Schrift, deren Resultate ich zum Theil schon früher in zwei kleinern Abhandlungen*) bekannt gemacht habe, ihre vollständige Erledigung, und zwar auf einem Wege, welcher von dem für die *Abel'*schen Functionen *zweier* Argumente von *Göpel* und *Rosenhain* betretenen gänzlich verschieden ist. Die genannten Mathematiker gehen nämlich von unendlichen Reihen aus, die sie aus denen, durch welche *Jacobi* die elliptischen Functionen auszudrücken gelehrt hat, durch eine von tiefer analytischer Einsicht zeugende Verallgemeinerung erhalten, und zeigen dann, wie sich aus denselben, die zwei veränderliche Gröfsen u_1, u_2 enthalten, die Coefficienten einer quadratischen Gleichung so zusammensetzen lassen, dafs zwischen deren Wurzeln und u_1, u_2 zwei Differential-Gleichungen von der oben aufgestellten Form bestehen. Dagegen war mein Bestreben von Anfang an auf die Auffindung einer Methode gerichtet, die geeignet sei, unmittelbar von den genannten Differential-Gleichungen aus für jeden Werth von ϱ auf einem einfachen, alle Willkührlichkeit ausschliefsenden Wege zur Darstellung der Gröfsen $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ als Functionen von $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ in einer für alle Werthe der letztern gültig bleibenden Form zu führen. Durch weitere Ausbildung eines Verfahrens, dessen ich mich bereits früher zur directen Entwicklung der elliptischen Functionen, ohne Voraussetzung der Multiplications- und Transformations-Formeln mit gutem Erfolge bedient hatte, gelang es mir, das Ziel, welches ich mir gesteckt, vollständig zu erreichen; wo sich denn als schliefsliches Resultat meiner Untersuchungen ergab, dafs sich sämmtliche *Abel'*sche Functionen einer bestimmten Ordnung auf eine einzige, in einfacher Form darstellbare Transcendente zurückführen lassen. Damit ist aber für sie dasselbe erreicht, was für die elliptischen Functionen *Jacobi* gethan hat, und was *Lejeune Dirichlet* in seiner Gedächtnifsrede auf den grofsen Mathematiker mit Recht als eine der bedeutendsten Leistungen desselben bezeichnet.

---

*) S. Programm des *Braunsberger* Gymnasiums v. J. 1849 und *Crelle'*s Journal Bd. 47.

Die vorliegende Arbeit ist unter mancherlei äufsern Hemmungen entstanden, die mir nur von Zeit zu Zeit, und oftmals nach langer Unterbrechung, mit derselben mich zu beschäftigen gestatteten. Ohne Zweifel wird man Spuren davon an nicht wenigen Stellen entdecken. Gleichwohl hoffe ich, dafs ihr die Sachkundigen auch in der Gestalt, wie ich sie jetzt ihrer Beurtheilung vorlege, nicht ganz ihren Beifall versagen, und wenigstens *ein* Ergebnifs derselben mit Befriedigung aufnehmen werden, die Thatsache nämlich, dafs sich die elliptischen und die *Abel*'schen Functionen nach einer für alle Ordnungen gleich bleibenden und zugleich directen Methode behandeln lassen; und ich trage kein Bedenken, zu gestehen, dafs ich auf *dieses* Resultat meiner Arbeit einigen Werth lege, und es als ein für die Wissenschaft nicht unbedeutendes betrachte.

Erstes Kapitel.

Erklärung der Abel'schen Functionen; Bestimmung der analytischen Form derselben.

§. 1.

Ich beginne mit der Ermittelung der Form, unter welcher der Zusammenhang zwischen den Gröfsen $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ und $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ dargestellt werden kann. Zuvörderst aber möge, zur Vermeidung von Wiederholungen, hier ein für allemal in Betreff einiger Bezeichnungen, die ich im Verlaufe der ganzen Abhandlung unverändert beibehalten werde, Folgendes festgestellt werden.

Die ersten Buchstaben des deutschen Alphabets, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \ldots$ sollen, sobald nicht ausdrücklich etwas Anderes bestimmt wird, ausschliefslich Zahlen aus der Reihe

$$1, \; 2, \; \ldots, \; \varrho$$

bedeuten, in der Art, dafs jeder derselben, wo er in einer Formel vorkommt, unabhängig von den übrigen etwa in ihr sich findenden, sämmtliche dieser Reihe angehörigen Werthe durchlaufen kann. Ein Ausdruck, der einen oder mehrere dieser Buchstaben enthält, repräsentirt demnach, je nachdem die Zahl derselben 1, oder 2, oder 3 u. s. w. ist, ϱ, oder ϱ^2, oder ϱ^3 u. s. w. Werthe. Die Summe aller dieser Werthe soll dann ferner durch ein dem Ausdrucke



vorgesetztes Σ bezeichnet werden, und zwar in der Regel ohne besondere Andeutung der Buchstaben, auf welche es sich bezieht, was nur in dem Falle nicht unterbleiben darf, wenn aufser derselben noch andere deutsche Buchstaben vorkommen. Hiernach ist z. B.

$$\Sigma F(\mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=\varrho} F(\mathfrak{a})$$

$$\Sigma F(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=\varrho} \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=\varrho} F(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}).$$

Dagegen soll

$$\sum_{\mathfrak{a}} F(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=\varrho} F(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$$

$$\sum_{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}} F(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=\varrho} \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=\varrho} F(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$$

sein; u. s. w.

Kommt es in einem besondern Falle vor, dafs bei einer solchen Summation ein Buchstabe von den festgesetzten Werthen irgend einen bestimmten nicht annehmen darf, so soll darauf durch ein dem Σ oben beigefügtes ($'$) aufmerksam gemacht, und zugleich der auszuschliefsende Werth neben der Summenformel angegeben werden; wonach z. B. die Bedeutung der Formel

$$\sum_{\mathfrak{a}}{}' \left(\frac{1}{a_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{b}}}\right), \quad (\mathfrak{a} \gtrless \mathfrak{b})$$

klar ist.

Endlich bemerke ich noch, dafs eine Gleichung, die einen, oder zwei u. s. w. der in Rede stehenden deutschen Buchstaben enthält, ein System von ϱ, oder ϱ^2 u. s. w. Gleichungen darstellt; so dafs z. B. die in der Einleitung aufgestellten Differential-Gleichungen sämmtlich in der folgenden

$$(1.) \qquad du_{\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{a}} \tfrac{1}{2} \frac{P(x_{\mathfrak{a}})}{x_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{b}}} \cdot \frac{dx_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}}$$

enthalten sind.

Dies vorausgeschickt soll nun zunächst gezeigt werden, dafs sich $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ bei hinlänglich kleinen Werthen von $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ nach ganzen positiven Potenzen dieser Gröfsen in convergirende Reihen entwickeln lassen.

Wenn die Differenz $x - a_{\mathfrak{r}}$, wo $\mathfrak{r}$ irgend eine der Zahlen 1, 2, ..., $2\varrho + 1$ bezeichnen soll, dem absoluten Betrage *) nach kleiner ist als die

*) Unter dem absoluten Betrage oder Werthe einer complexen (imaginären) Gröfse verstehe ich hier den analytischen Modul derselben, wie er sonst genannt wird. Der Umstand, dafs das Wort *Modul* in so verschiedenem Sinne gebraucht wird, und namentlich in der Theorie der elliptischen und *Abel*'schen Functionen bereits eine feststehende Bedeutung hat, möge die Einführung der vorgeschlagenen Benennung entschuldigen.

Differenz zwischen $a_\mathfrak{r}$ und jeder andern der Gröfsen $a_1, a_2, \ldots, a_{2\varrho+1}$ (was durch den Ausdruck „es befinde sich x in der Nähe von $a_\mathfrak{r}$" bezeichnet werden möge), so läfst sich

$\frac{1}{\sqrt{R(x)}}$ durch eine convergirende Reihe von der Form

$$\frac{1}{\sqrt{R'(a_\mathfrak{r})(x-a_\mathfrak{r})}} \cdot \{1+(\mathfrak{r})_1(x-a_\mathfrak{r})+(\mathfrak{r})_2(x-a_\mathfrak{r})^2+\cdots\}$$

darstellen. wo $R'(x) = \frac{\partial R(x)}{\partial x}$, und $(\mathfrak{r})_1$, $(\mathfrak{r})_2$ u. s. w. rational aus $a_\mathfrak{r}$ und den Coefficienten von $R(x)$ zusammengesetzte Ausdrücke sind.

Wird daher angenommen, es befinde sich x_1 in der Nähe von a_1, x_2 in der Nähe von a_2 u. s. w., und setzt man,

$$\frac{R(x)}{P(x)} = A_0(x-a_{\varrho+1}) \ldots (x-a_{2\varrho+1}) \text{ mit } Q(x), \ \frac{\partial P(x)}{\partial x} \text{ mit } P'(x)$$

bezeichnend,

$$(2.) \qquad \sqrt{\left(\frac{P'(a_\mathfrak{a})}{Q(a_\mathfrak{a})}(x_\mathfrak{a}-a_\mathfrak{a})\right)} = s_\mathfrak{a},$$

so hat man

$$\frac{1}{2}\frac{P(x_\mathfrak{a})}{x_\mathfrak{a}-a_\mathfrak{b}} \cdot \frac{dx_\mathfrak{a}}{\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}} = ((\mathfrak{a},\mathfrak{b})_0+(\mathfrak{a},\mathfrak{b})_1 s_\mathfrak{a}^2+(\mathfrak{a},\mathfrak{b})_2 s_\mathfrak{a}^4+\cdots)\,ds_\mathfrak{a},$$

wo $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})_0$, $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})_1$ u. s. w. rationale, aus $a_\mathfrak{a}$, $a_\mathfrak{b}$ und den Coefficienten von $P(x)$, $Q(x)$ zusammengesetzte Ausdrücke bedeuten, und insbesondere

$$(\mathfrak{a},\mathfrak{a})_0 = 1, \quad (\mathfrak{a},\mathfrak{b})_0 = 0, \text{ wenn } \mathfrak{a} \gtrless \mathfrak{b},$$

ist. Hiernach geben die Gleichungen (1.) durch Integration

$$(3.) \quad \begin{cases} u_1 = s_1 + \mathrm{S}\left\{\sum\limits_{\mathfrak{n}=1\ldots\infty}\frac{(\mathfrak{a},1)_\mathfrak{n}}{2\mathfrak{n}+1}s_\mathfrak{a}^{2\mathfrak{n}+1}\right\}, \\ u_2 = s_2 + \mathrm{S}\left\{\sum\limits_{\mathfrak{n}=1\ldots\infty}\frac{(\mathfrak{a},2)_\mathfrak{n}}{2\mathfrak{n}+1}s_\mathfrak{a}^{2\mathfrak{n}+1}\right\}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_\varrho = s_\varrho + \mathrm{S}\left\{\sum\limits_{\mathfrak{n}=1\ldots\infty}\frac{(\mathfrak{a},\varrho)_\mathfrak{n}}{2\mathfrak{n}+1}s_\mathfrak{a}^{2\mathfrak{n}+1}\right\}. \end{cases}$$

Aus diesen Reihen erhält man dann ferner durch Umkehrung die folgenden, in denen $(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_\mathfrak{n}$ eine ganze homogene Function nten Grades von $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ bezeichnen soll.

$$(4.)\begin{cases} s_1 = \sqrt{\left(\frac{P'(a_1)}{Q(a_1)}(x_1-a_1)\right)} = u_1+(u_1,u_2,\dots,u_\varrho)_3+(u_1,u_2,\dots,u_\varrho)_5+\cdots, \\ s_2 = \sqrt{\left(\frac{P'(a_2)}{Q(a_2)}(x_2-a_2)\right)} = u_2+(u_1,u_2,\dots,u_\varrho)_3+(u_1,u_2,\dots,u_\varrho)_5+\cdots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ s_\varrho = \sqrt{\left(\frac{P'(a_\varrho)}{Q(a_\varrho)}(x_\varrho-a_\varrho)\right)} = u_\varrho+(u_1,u_2,\dots,u_\varrho)_3+(u_1,u_2,\dots,u_\varrho)_5+\cdots. \end{cases}$$

Ferner, da sich

$\frac{P(x_\mathfrak{a})}{\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}}$ in eine Reihe von der Form

$$s_\mathfrak{a}+(\mathfrak{a})_1 s_\mathfrak{a}^3+(\mathfrak{a})_2 s_\mathfrak{a}^5+\cdots$$

entwickeln läfst,

$$(5.)\quad \frac{P(x_\mathfrak{a})}{\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}} = \frac{\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}}{Q(x_\mathfrak{a})} = u_\mathfrak{a}+(u_1,u_2,\dots,u_\varrho)_3+(u_1,u_2,\dots,u_\varrho)_5+\cdots$$
$$(\mathfrak{a}=1,2,\dots,\varrho)$$

Die vorstehenden Reihen können nicht für alle Werthe von $u_1, u_2, \dots, u_\varrho$ convergiren, sondern nur für solche, die gewisse Bedingungen erfüllen. Es ist aber für den gegenwärtigen Zweck nicht erforderlich, diese aufzusuchen; es genügt vielmehr anzunehmen, dafs die Reihen (3—5) für *irgend welche* Werthe von $u_1, u_2, \dots, u_\varrho$, deren absolute Beträge durch $U_1, U_2, \dots, U_\varrho$ bezeichnet werden mögen, sämmtlich convergent seien — wozu man nach einem allgemeinen Satze über die Reihenentwicklungen von Functionen, die algebraischen Differential-Gleichungen genügen, berechtigt ist*). Dann sind sie es auch unbedingt, sobald man für $u_1, u_2, \dots, u_\varrho$ nur solche Werthe zuläfst, die dem absoluten Betrage nach kleiner als beziehlich $U_1, U_2, \dots, U_\varrho$ sind, und geben unter dieser Voraussetzung

$$x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_\varrho,\ \sqrt{R(x_1)},\ \sqrt{R(x_2)},\ \dots,\ \sqrt{R(x_\varrho)}$$

als völlig bestimmte, eindeutige Functionen von $u_1, u_2, \dots, u_\varrho$. Wenn man aber die vorstehenden Gröfsen für alle Werthe von $u_1, u_2, \dots, u_\varrho$ innerhalb der bezeichneten Gränzen berechnen kann, so ist durch das *Abel'sche Theorem* die Möglichkeit gegeben, dieses auch für *beliebig grofse* Werthe der genannten Veränderlichen auszuführen.

§. 2.

Um dieses nachzuweisen, nehme man statt $u_1, u_2, \dots, u_\varrho$ (2μ) Reihen von je ϱ solchen veränderlichen Gröfsen

---

*) Vergl. meine Abhandlung über die analytischen Facultäten in *Crelle's* Journal Bd. 51. S. 43.

$$(1.)\quad \begin{cases} u'_1, & u'_2, & \ldots, & u'_\varrho, \\ u''_1, & u''_2, & \ldots, & u''_\varrho, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1^{(2\mu)}, & u_2^{(2\mu)}, & \ldots, & u_\varrho^{(2\mu)} \end{cases}$$

an, die keiner andern Beschränkung unterworfen sein sollen, als dafs

$$u'_a,\quad u''_a,\quad \ldots,\quad u_a^{(2\mu)}$$

sämmtlich dem absoluten Betrage nach kleiner als U_a vorausgesetzt werden. Ferner bezeichne man, wenn m eine der Zahlen 1, 2, ..., 2μ bedeutet, mit

$$\begin{array}{llll} s_1^{(m)}, & s_2^{(m)}, & \ldots, & s_\varrho^{(m)}, \\ x_1^{(m)}, & x_2^{(m)}, & \ldots, & x_\varrho^{(m)}, \\ \sqrt{R(x_1^{(m)})}, & \sqrt{R(x_2^{(m)})}, & \ldots, & \sqrt{R(x_\varrho^{(m)})} \end{array}$$

die Gröfsen, welche man für

$$\begin{array}{llll} s_1, & s_2, & \ldots, & s_\varrho, \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_\varrho, \\ \sqrt{R(x_1)}, & \sqrt{R(x_2)}, & \ldots, & \sqrt{R(x_\varrho)} \end{array}$$

vermittelst der Reihen (4, 5) des vorhergehenden §. erhält, wenn man dort $u_1^{(m)}, u_2^{(m)}, \ldots, u_\varrho^{(m)}$ an die Stelle von $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ setzt. Sodann hat man zwei ganze Functionen $M(x)$, $N(x)$ von der Form

$$(2.)\quad \begin{cases} M(x) = x^{\mu\varrho} + M_1 x^{\mu\varrho-1} + \cdots + M_{\mu\varrho}, \\ N(x) = \qquad\quad N_1 x^{\mu\varrho-1} + \cdots + N_{\mu\varrho}, \end{cases}$$

vermittelst der folgenden $(2\mu\varrho)$ Gleichungen

$$(3.)\quad \begin{cases} M(x'_a)\,\dfrac{\sqrt{R(x'_a)}}{Q(x'_a)} + N(x'_a) = 0, \\ M(x''_a)\,\dfrac{\sqrt{R(x''_a)}}{Q(x''_a)} + N(x''_a) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M(x_a^{(2\mu)})\,\dfrac{\sqrt{R(x_a^{(2\mu)})}}{Q(x_a^{(2\mu)})} + N(x_a^{(2\mu)}) = 0, \\ \qquad (a = 1, 2, \ldots, \varrho) \end{cases}$$

zu bestimmen, worauf die ganze Function $(2\mu\varrho+\varrho)$ten Grades

$$P(x)M^2(x) - Q(x)N^2(x)$$

für $x = x'_1, \ldots, x'_\varrho, x''_1, \ldots, x''_\varrho, \ldots, x_1^{(2\mu)}, \ldots, x_\varrho^{(2\mu)}$ Null wird, und daher

durch das Product

$$(x-x_1')\dots(x-x_\varrho')(x-x_1'')\dots(x-x_\varrho'')\dots(x-x_1^{(2\mu)})\dots(x-x_\varrho^{(2\mu)}),$$

welches durch $\Pi(x)$ bezeichnet werden möge, theilbar ist, so dafs man

$$(4.)\qquad P(x)M^2(x)-Q(x)N^2(x) = \Pi(x)\varphi(x)$$

setzen kann, wo $\varphi(x)$ eine ganze Function von der Form

$$x^\varrho+P_1x^{\varrho-1}+P_2x^{\varrho-2}+\dots+P_\varrho$$

bedeutet, in der $P_1, P_2, \dots, P_\varrho$ rational aus

$$(5.)\quad \begin{cases} x_1', & x_2', & \dots, & x_\varrho', \\ x_1'', & x_2'', & \dots, & x_\varrho'', \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(2\mu)}, & x_2^{(2\mu)}, & \dots, & x_\varrho^{(2\mu)}, \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} \sqrt{R(x_1')}, & \sqrt{R(x_2')}, & \dots, & \sqrt{R(x_\varrho')}, \\ \sqrt{R(x_1'')}, & \sqrt{R(x_2'')}, & \dots, & \sqrt{R(x_\varrho'')}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sqrt{R(x_1^{(2\mu)})}, & \sqrt{R(x_2^{(2\mu)})}, & \dots, & \sqrt{R(x_\varrho^{(2\mu)})} \end{matrix}$$

zusammengesetzt, und daher auch als eindeutige Functionen der Gröfsen (1.) zu betrachten sind. Bezeichnet man jetzt mit $x_1, x_2, \dots, x_\varrho$ die ϱ Wurzeln der Gleichung

$$\varphi(x)=0,$$

so gelten nach dem ***Abel'schen Theorem*** die ϱ Gleichungen, die sich aus der nachstehenden

$$(6.)\qquad \sum_{\mathfrak{a}}\tfrac{1}{2}\left\{\frac{P(x_\mathfrak{a}')}{x_\mathfrak{a}'-a_\mathfrak{b}}\cdot\frac{dx_\mathfrak{a}'}{\sqrt{R(x_\mathfrak{a}')}}+\frac{P(x_\mathfrak{a}'')}{x_\mathfrak{a}''-a_\mathfrak{b}}\cdot\frac{dx_\mathfrak{a}''}{\sqrt{R(x_\mathfrak{a}'')}}+\cdots\right\} = \sum_{\mathfrak{a}}\tfrac{1}{2}\frac{P(x_\mathfrak{a})}{x_\mathfrak{a}-a_\mathfrak{b}}\cdot\frac{dx_\mathfrak{a}}{\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}}$$

ergeben, indem man $\mathfrak{b}=1, 2, \dots, \varrho$ setzt, unter der Bedingung, dafs man der Wurzelgröfse $\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}$ den durch die Gleichung

$$(7.)\qquad \sqrt{R(x_\mathfrak{a})}=\frac{P(x_\mathfrak{a})M(x_\mathfrak{a})}{N(x_\mathfrak{a})}=\frac{Q(x_\mathfrak{a})N(x_\mathfrak{a})}{M(x_\mathfrak{a})}$$

bestimmten Werth beilege*). Nun ist aber

$$\sum_{\mathfrak{a}}\tfrac{1}{2}\frac{P(x_\mathfrak{a}')}{x_\mathfrak{a}'-a_\mathfrak{b}}\cdot\frac{dx_\mathfrak{a}'}{\sqrt{R(x_\mathfrak{a}')}} = du_\mathfrak{b}',\qquad \sum_{\mathfrak{a}}\tfrac{1}{2}\frac{P(x_\mathfrak{a}'')}{x_\mathfrak{a}''-a_\mathfrak{b}}\cdot\frac{dx_\mathfrak{a}''}{\sqrt{R(x_\mathfrak{a}'')}} = du_\mathfrak{b}'',\quad \text{u. s. w.}$$

---

*) In Betreff des Beweises dieses Satzes verweise ich auf *Abel's* Abhandlung: Remarques sur quelques propriétés etc. in Crelle's Journal, B. 3, S. 313 und Oeuvres complètes, tome I, 288. Einen auf ganz andern Principien beruhenden Beweis des Satzes werde ich später geben.

Daher

$$(8.)\qquad du'_{\mathfrak{b}}+du''_{\mathfrak{b}}+\cdots+du^{(2\mu)}_{\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{e}} \tfrac{1}{2}\,\frac{P(x_{\mathfrak{e}})}{x_{\mathfrak{e}}-a_{\mathfrak{b}}}\cdot\frac{dx_{\mathfrak{e}}}{\sqrt{R(x_{\mathfrak{e}})}}.$$
$$(\mathfrak{b}=1,2,\ldots\varrho)$$

Bevor aber aus diesen Gleichungen weitere Folgerungen gezogen werden, ist es nothwendig, die Zusammensetzungsweise der Coefficienten von $M(x)$, $N(x)$, $\varphi(x)$ aus den Gröfsen (5.) oder (1.) einer nähern Betrachtung zu unterwerfen.

§. 3.

Es läfst sich, wenn x in der Nähe von $a_{\mathfrak{a}}$ angenommen und

$$(1.)\qquad \sqrt{\left(\frac{P'(a_{\mathfrak{a}})}{Q(a_{\mathfrak{a}})}(x-a_{\mathfrak{a}})\right)} = s,\qquad x = a_{\mathfrak{a}}+\frac{Q(a_{\mathfrak{a}})}{P'(a_{\mathfrak{a}})}s^2$$

gesetzt wird,

$$\frac{\sqrt{R(x)}}{Q(x)}\quad\text{oder}\quad\frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}$$

in eine convergirende Reihe

$$(2.)\qquad s+(\mathfrak{a})_1 s^3+(\mathfrak{a})_2 s^5+\cdots$$

entwickeln, welche mit $R_{\mathfrak{a}}(s)$ bezeichnet werden möge, so wie auch die Functionen von s, in welche $M(x)$, $N(x)$, $P(x)$, $Q(x)$ durch die Substitution

$$x = a_{\mathfrak{a}}+\frac{Q(a_{\mathfrak{a}})}{P'(a_{\mathfrak{a}})}s^2$$

übergehen, durch $M_{\mathfrak{a}}(s)$, $N_{\mathfrak{a}}(s)$, $P_{\mathfrak{a}}(s)$, $Q_{\mathfrak{a}}(s)$ angedeutet werden sollen. Ferner setze man

$$(3.)\qquad \begin{cases}(s-s'_{\mathfrak{a}})(s-s''_{\mathfrak{a}})\ldots(s-s^{(2\mu)}_{\mathfrak{a}}) = \pi_{\mathfrak{a}}(s),\\ M_{\mathfrak{a}}(s)R_{\mathfrak{a}}(s)+N_{\mathfrak{a}}(s) = f_{\mathfrak{a}}(s),\end{cases}$$

so kann auch $f_{\mathfrak{a}}(s)$ für jeden Werth von s, der so beschaffen ist, dafs der zugehörige Werth von x in der Nähe von $a_{\mathfrak{a}}$ liegt, in eine convergirende Reihe entwickelt werden. Es ist klar, dafs $s'_{\mathfrak{a}}$, $s''_{\mathfrak{a}}$, u. s. w. in Folge der oben in Betreff der Gröfsen (1, §. 2.) gemachten Annahme sämmtlich zu diesen Werthen von s gehören.

Angenommen nun, es sei überhaupt $f(s)$ eine Function von s, die sich für alle Werthe dieser Veränderlichen, die ihrem absoluten Betrage nach kleiner als ein bestimmter Gränzwerth S sind, durch eine convergirende Reihe von der Form

$$A_0+A_1 s+A_2 s^2+\cdots$$

darstellen lasse, und $\pi(s)$ bedeute eine ganze Function $n$ten Grades, wobei zugleich angenommen werde, dafs die Wurzeln der Gleichung $\pi(s) = 0$ sämmtlich dem absoluten Betrage nach kleiner als S seien. Alsdann läfst sich für jeden Werth von s, der seinem absoluten Betrage nach gröfser als jede dieser Wurzeln ist,

$$\frac{1}{\pi(s)} = C_0 s^{-n} + C_1 s^{-n-1} + C_2 s^{-n-2} + \cdots = \underset{\mathfrak{m}=0\ldots\infty}{\mathrm{S}} C_{\mathfrak{m}} s^{-n-\mathfrak{m}}$$

setzen (wo $\mathfrak{m}$, so wie überhaupt im Folgenden die Buchstaben $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, eine ganze Zahl, die alle Werthe zwischen den Gränzen 0 und ∞ annehemen kann, bezeichnet), und man erhält daher, indem man diese Reihe mit der für $f(s)$ multiplicirt, wenn der absolute Werth von s zugleich kleiner als S ist,

$$\begin{aligned}\frac{f(s)}{\pi(s)} = {} & D_0 + D_1 s + D_2 s^2 + \cdots \\ & + E_0 s^{-1} + E_1 s^{-2} + \cdots,\end{aligned}$$

welche Reihen-Entwicklung von $\frac{f(s)}{\pi(s)}$ durch

$$\left[\frac{f(s)}{\pi(s)}\right]$$

angedeutet werden möge, so wie durch

$$\left[\frac{f(s)}{\pi(s)}\right]_{s^{\pm\mathfrak{m}}}$$

der Coefficient von $s^{\pm\mathfrak{m}}$ in derselben. Ist nun

$$\pi(s) = B_0 + B_1 s + \cdots + B_n s^n,$$

so müssen, wenn man die Reihe $\left[\frac{f(s)}{\pi(s)}\right]$ mit $\pi(s)$ multiplicirt, aus dem Producte alle Glieder mit negativen Potenzen von s fortfallen, und daher

$$B_0 E_{\mathfrak{m}} + B_1 E_{\mathfrak{m}+1} + \cdots + B_n E_{\mathfrak{m}+n} = 0$$

sein, indem der Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung der Coefficient von $s^{-\mathfrak{m}-1}$ in dem gedachten Producte ist. Diese Relation lehrt aber, dafs die Coefficienten E_0, E_1, u. s. w. *sämmtlich* gleich Null sind, ***sobald dies mit den n ersten der Fall ist.*** Denn da B_n nicht Null ist, so erhellt unmittelbar, dafs $E_{\mathfrak{m}+n} = 0$ sein mufs, wofern $E_{\mathfrak{m}}$, $E_{\mathfrak{m}+1}, \ldots, E_{\mathfrak{m}+n-1}$ sämmtlich verschwinden; woraus, indem man der Reihe nach $\mathfrak{m} = 0, 1, 2,$ u. s. w. setzt, das Behauptete sofort sich ergiebt. Dann hat man

$$\frac{f(s)}{\pi(s)} = D_0 + D_1 s + D_2 s^2 + \cdots,$$

oder

$$f(s) = (B_0 + B_1 s + \cdots)(D_0 + D_1 s + \cdots)$$

für alle Werthe von s innerhalb der bezeichneten Gränzen. Die letztere Gleichung kann aber nicht anders bestehen, als wenn in der Reihe, die aus der Entwicklung des Products auf der rechten Seite hervorgeht, die Coefficienten mit den gleichstelligen von $f(s)$ übereinstimmen. Dann aber gilt sie, und mit ihr auch die vorhergehende überhaupt für alle Werthe von s, bei denen die Reihen

$$A_0 + A_1 s + \cdots, \quad D_0 + D_1 s + \cdots$$

beide convergiren. Für die letztere steht dies aber, ihrer Herleitung nach, fest, wenn der absolute Betrag von s zwischen zwei Gränzen, von denen die obere S ist, enthalten ist; es mufs daher für *alle* Werthe von s, die dem absoluten Betrage nach unter S liegen, der Fall sein. Hiermit ist folgender Hülfssatz bewiesen, der bei mancherlei Untersuchungen mit Nutzen angewandt werden kann:

Wenn die oben näher charakterisirten Functionen $f(s)$, $\pi(s)$ so beschaffen sind, dafs man

$$\left[\frac{f(s)}{\pi(s)}\right]_{s^{-1}} = 0, \quad \left[\frac{f(s)}{\pi(s)}\right]_{s^{-2}} = 0, \quad \ldots, \quad \left[\frac{f(s)}{\pi(s)}\right]_{s^{-n}} = 0,$$

oder auch

$$\left[\frac{f(s)}{\pi(s)}\right]_{s^{-1}} = 0, \quad \left[\frac{s f(s)}{\pi(s)}\right]_{s^{-1}} = 0, \quad \ldots, \quad \left[\frac{s^{n-1} f(s)}{\pi(s)}\right]_{s^{-1}} = 0$$

hat, so läfst sich der Quotient

$$\frac{f(s)}{\pi(s)}$$

für alle Werthe von s, bei denen die Reihe für $f(s)$ convergirt, ebenfalls durch eine nur ganze positive Potenzen von s enthaltende convergirende Reihe darstellen. Umgekehrt ist dies nicht der Fall, sobald die vorstehenden Bedingungsgleichungen nicht sämmtlich befriedigt werden.

Für die durch die Formeln (3.) definirten Functionen $f_a(s)$, $\pi_a(s)$ ist nun, nach dem oben Bemerkten, die Bedingung erfüllt, dafs die Wurzeln der Gleichung $\pi_a(s) = 0$ sämmtlich dem absoluten Betrage nach kleiner sind als der Gränzwerth, unter dem s bleiben mufs, damit die Reihe für $f_a(s)$ unbedingt convergire. Wenn daher die Coefficienten von $M(x)$ und $N(x)$ so bestimmt werden können, dafs die folgenden $(2\mu\varrho)$ Gleichungen



$$(4) \quad \left[\frac{f_a(s)}{\pi_a(s)}\right]_{s^{-1}} = 0, \quad \left[\frac{sf_a(s)}{\pi_a(s)}\right]_{s^{-1}} = 0, \quad \ldots, \quad \left[\frac{s^{2\mu-1}f_a(s)}{\pi_a(s)}\right]_{s^{-1}} = 0$$
$$(a = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

befriedigt werden; so hat man für alle Werthe von s, bei denen die Reihe für $f_a(s)$ convergirt

$$(5.) \quad f_a(s) = \pi_a(s)\overline{f}_a(s),$$

wo $\overline{f}_a(s)$ eine als unendliche Reihe von derselben Form wie die für $f_a(s)$ darstellbare Function bedeutet. Nun darf man aber in dieser Gleichung $(-s)$ für s setzen, und erhält

$$f_a(s)f_a(-s) = \pi_a(s)\pi_a(-s)\overline{f}_a(s)\overline{f}_a(-s),$$

oder da

$$M_a(-s) = M_a(s), \quad N_a(-s) = N_a(s), \quad R_a(-s) = -R_a(s)$$

ist,

$$N_a^2(s) - M_a^2(s)R_a^2(s) = \pi_a(s)\pi_a(-s)\overline{f}_a(s)\overline{f}_a(-s),$$

oder auch, indem

$$R_a^2(s) = \frac{P_a(s)}{Q_a(s)}$$

ist, durch Multiplication dieser Gleichung mit $-Q_a(s)$

$$(5.) \quad P_a(s)M_a^2(s) - Q_a(s)N_a^2(s) = \pi_a(s)\pi_a(-s)\chi_a(s),$$

wo

$$\chi_a(s) = -Q_a(s)\overline{f}_a(s)\overline{f}_a(-s)$$

gesetzt ist. Nun gehört jeder Werth von s, der $\pi_a(s) = 0$ oder $\pi_a(-s) = 0$ macht, zu denen, für welche die Reihen-Entwicklungen von $f_a(s)$, $f_a(-s)$ und somit auch die von $\overline{f}_a(s)$, $\overline{f}_a(-s)$, $\chi_a(s)$ convergiren; es behält daher der Quotient

$$\frac{P_a(s)M_a^2(s) - Q_a(s)N_a^2(s)}{\pi_a(s)\pi_a(-s)}$$

auch dann noch einen endlichen Werth, wenn der Divisor verschwindet; und da Dividendus und Divisor desselben beide ganze Functionen von s^2 sind, so mufs der erstere durch den letzteren theilbar, und somit $\chi_a(s)$ ebenfalls eine ganze Function von s^2 sein. Daraus folgt denn, dafs die Gleichung (5.) für *jeden* Werth von s besteht. Setzt man nun in derselben

$$\frac{P'(a_a)}{Q(a_a)}(x - a_a) \text{ für } s^2,$$

so geht der Ausdruck auf der linken Seite in

$$P(x)M^2(x) - Q(x)N^2(x),$$

und

$$\pi_a(s)\pi_a(-s) = (s^2 - s_a'^2)(s^2 - s_a''^2) \ldots,$$

abgesehen von einem constanten Factor, in

$$(x - x_a')(x - x_a'') \ldots (x - x_a^{(2\mu)})$$

über, während sich $\chi_a(s)$ ebenfalls in eine ganze Function von x verwandelt. Demnach wird, wenn die Gleichungen (4.) sämmtlich bestehen, der Ausdruck

$$P(x)M^2(x) - Q(x)N^2(x) \text{ durch } \Pi(x)$$

theilbar, und es gilt die Gleichung (4.) des §. 2. Die Anzahl dieser Gleichungen ist aber $(2\mu\varrho)$, d. h. gleich der Anzahl der Coefficienten von $M(x)$, $N(x)$, und sie werden daher zur Bestimmung der letzteren hinreichen.

Nun hat die Reihe

$$\left[\frac{1}{\pi_a(s)}\right] \text{ die Form}$$

$$(6.)\qquad s^{-2\mu}(1 + \sigma_{a,1}s^{-1} + \sigma_{a,2}s^{-2} + \cdots) = \underset{n=0\ldots\infty}{\mathrm{S}}(\sigma_{a,n}s^{-2\mu-n}),$$

wo $\sigma_{a,n}$ eine ganze homogene und symmetrische Function $n$ten Grades von

$$s_a', \quad s_a'', \quad \ldots, \quad s_a^{(2\mu)}$$

bedeutet. Setzt man daher

$$(7.)\qquad f_a(s) = F_{a,0} + F_{a,1}s + F_{a,2}s^2 + \cdots = \underset{m=0\ldots\infty}{\mathrm{S}} F_{a,m}s^m,$$

wo die Ausdrücke $F_{a,0}$, $F_{a,1}$ u. s. w. lineare Functionen von

$$M_1, \quad M_2, \quad \ldots, \quad M_{\mu\varrho},$$
$$N_1, \quad N_2, \quad \ldots, \quad N_{\mu\varrho}$$

sind, mit Coefficienten, die rational aus a_a und den Coefficienten von $P(x)$ und $R(x)$ zusammengesetzt werden, so wird

$$(8.)\qquad \left[\frac{s^{2\mu-\mathfrak{p}-1}f_a(s)}{\pi_a(s)}\right] = \underset{m=0\ldots\infty,\ n=0\ldots\infty}{\mathrm{S}}\{\sigma_{a,n}F_{a,m}s^{m-n-\mathfrak{p}-1}\},$$

$$(9.)\qquad \left[\frac{s^{2\mu-\mathfrak{p}-1}f_a(s)}{\pi_a(s)}\right]_{s^{-1}} = \underset{n=0\ldots\infty}{\mathrm{S}}\{\sigma_{a,n}F_{a,\mathfrak{p}+n}\},$$

und man erhält demnach, indem man $\mathfrak{p} = 0, 1, \ldots, 2\mu-1$ setzt, zur Bestimmung der Coefficienten von $M(x)$, $N(x)$ die $(2\mu\varrho)$ Gleichungen, welche

durch die folgende

$$(10.)\qquad F_{\mathfrak{a},\mathfrak{p}} + \underset{n=1\ldots\infty}{\mathrm{S}}\{\sigma_{\mathfrak{a},n} F_{\mathfrak{a},\mathfrak{p}+n}\} = 0 \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, \varrho \\ \mathfrak{p} = 0, 1, \ldots, 2\mu-1 \end{pmatrix}$$

repräsentirt werden. Diese kann man durch Zusammenziehung der Glieder, welche dieselbe Unbekannte enthalten, auf die Form

$$(11.)\qquad \begin{aligned} &(\mathfrak{a},\mathfrak{p})_0 + (\mathfrak{a},\mathfrak{p})_1 M_1 + \cdots + (\mathfrak{a},\mathfrak{p})_{\mu\varrho} M_{\mu\varrho} \\ &+ (\mathfrak{a},\mathfrak{p})_{\mu\varrho+1} N_1 + \cdots + (\mathfrak{a},\mathfrak{p})_{2\mu\varrho} N_{\mu\varrho} = 0 \end{aligned}$$

bringen, wo die Ausdrücke $(\mathfrak{a},\mathfrak{p})_0$, $(\mathfrak{a},\mathfrak{p})_1$ u. s. w. sämmtlich Reihen von der Form

$$g_0 + g_1\sigma_{\mathfrak{a},1} + g_2\sigma_{\mathfrak{a},2} + \cdots$$

sind. Bezeichnet man nun mit $\mathfrak{M}_m$ die Determinante des Systems, welches aus dem folgenden

$$(12.)\qquad \left\{\begin{array}{llll} {\scriptstyle (0)} & {\scriptstyle (1)} & \ldots & {\scriptstyle (2\mu\varrho)} \\ (1,0)_0 & (1,0)_1 & \ldots & (1,0)_{2\mu\varrho} \\ (1,1)_0 & (1,1)_1 & \ldots & (1,1)_{2\mu\varrho} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (1,2\mu-1)_0 & (1,2\mu-1)_1 & \ldots & (1,2\mu-1)_{2\mu\varrho} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varrho,0)_0 & (\varrho,0)_1 & \ldots & (\varrho,0)_{2\mu\varrho} \\ (\varrho,1)_0 & (\varrho,1)_1 & \ldots & (\varrho,1)_{2\mu\varrho} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varrho,2\mu-1)_0 & (\varrho,2\mu-1)_1 & \ldots & (\varrho,2\mu-1)_{2\mu\varrho} \end{array}\right\}$$

dadurch sich ergiebt, dafs man die mit (m) bezeichnete Vertikal-Reihe fortläfst, und zugleich die darauf folgenden, ohne ihre Aufeinanderfolge zu ändern, vor die mit (0) überschriebenen setzt; so erhält man

$$(13.)\qquad \begin{cases} M_1 = \dfrac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_0}, & M_2 = \dfrac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_0}, \quad \ldots, \quad M_{\mu\varrho} = \dfrac{\mathfrak{M}_{\mu\varrho}}{\mathfrak{M}_0}, \\ N_1 = \dfrac{\mathfrak{M}_{\mu\varrho+1}}{\mathfrak{M}_0}, & N_2 = \dfrac{\mathfrak{M}_{\mu\varrho+2}}{\mathfrak{M}_0}, \quad \ldots, \quad N_{\mu\varrho} = \dfrac{\mathfrak{M}_{2\mu\varrho}}{\mathfrak{M}_0}, \end{cases}$$

wo $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$ u. s. w. als rationale und ganze aus $(\mathfrak{a},\mathfrak{p})_0$, $(\mathfrak{a},\mathfrak{p})_1$ u. s. w. gebildete Ausdrücke gleich den letztern nach ganzen positiven Potenzen der

Gröfsen

$$(14.)\quad\begin{cases} s_1', & s_2', & \ldots, & s_\varrho' \\ s_1'', & s_2'', & \ldots, & s_\varrho'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_1^{(2\mu)}, & s_2^{(2\mu)}, & \ldots, & s_\varrho^{(2\mu)} \end{cases}$$

in convergirende Reihen entwickelt werden können*). Hier ist es nun von besonderer Wichtigkeit, die Anfangsglieder dieser Reihen, d. h. die Werthe, welche sie annehmen, wenn die Gröfsen (14.) sämmtlich verschwinden, zu ermitteln. Offenbar erhält man dieselben, die mit

$$\dot{\mathfrak{M}}_0,\quad \dot{\mathfrak{M}}_1,\quad \ldots,\quad \dot{\mathfrak{M}}_{2\mu\varrho}$$

bezeichnet werden mögen, wenn man bei der Bildung von $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$ u. s. w. die Reihen für $(\mathfrak{a}, \mathfrak{p})_0$, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{p})_1$ u. s. w. auf ihre Anfangsglieder reducirt, oder, was dasselbe ist, wenn man die Gleichungen (11.), die mit den unter (10.) aufgestellten identisch sind, durch die folgenden ersetzt

$$(15.)\qquad F_{\mathfrak{a},0}=0,\quad F_{\mathfrak{a},1}=0,\quad \ldots,\quad F_{\mathfrak{a},2\mu-1}=0,$$
$$(\mathfrak{a}=1,2,\ldots,\varrho)$$

und dann aus den Coefficienten derselben $\dot{\mathfrak{M}}_0$, $\dot{\mathfrak{M}}_1$ u. s. w. so zusammensetzt, wie $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$ u. s. w. aus den Coefficienten der Gleichungen (11.).

Nun sind aber $F_{\mathfrak{a},0}$, $F_{\mathfrak{a},1}$ u. s. w. die Coefficienten der Reihen-Entwicklung von

$$f_\mathfrak{a}(s) = M_\mathfrak{a}(s)R_\mathfrak{a}(s)+N_\mathfrak{a}(s),$$

und die Gleichungen (15.) drücken also aus, dafs die (2μ) ersten Glieder derselben verschwinden sollen. Dies kann, da $N_\mathfrak{a}(s)$ und $M_\mathfrak{a}(s)$ gerade Functionen von s sind, $R_\mathfrak{a}(s)$ aber eine ungerade, in deren Entwicklung der Coefficient von s^1 nicht Null ist, nur unter der Bedingung geschehen, dafs in den Entwicklungen von $M_\mathfrak{a}(s)$ und $N_\mathfrak{a}(s)$ nach Potenzen von s alle Glieder von einer niedrigern als der (2μ)ten Ordnung verschwinden. Da aber $M_\mathfrak{a}(s)$ und $N_\mathfrak{a}(s)$ aus $M(x)$ und $N(x)$ durch die Substitution

$$x = a_\mathfrak{a}+\frac{P(a_\mathfrak{a})}{Q(a_\mathfrak{a})}s^2$$

*) Vergl. den Satz (5, B, §. 7) in der angeführten Abhandlung über die Facultäten.

hervorgehn, so mufs man, damit die genannten Glieder Null werden,

$$M(a_\varepsilon) = 0, \quad M'(a_\varepsilon) = 0, \quad \ldots, \quad M^{(\mu-1)}(a_\varepsilon) = 0,$$
$$N(a_\varepsilon) = 0, \quad N'(a_\varepsilon) = 0, \quad \ldots, \quad N^{(\mu-1)}(a_\varepsilon) = 0$$

haben, d. h. es müssen $M(x)$, $N(x)$ beide durch $(x-a_\varepsilon)^\mu$ theilbar sein. Hiernach sagen die Gleichungen (15.) aus, es sollen die Coefficienten von $M(x)$ und $N(x)$ so bestimmt werden, dafs beide durch

$$(x-a_1)^\mu (x-a_2)^\mu \ldots (x-a_\varrho)^\mu = P^\mu(x)$$

theilbar werden. Dies kann aber, da $M(x)$ vom $(\mu\varrho)$ten, $N(x)$ vom $(\mu\varrho-1)$ten Grade, und der Coefficient von $x^{\mu\varrho}$ in $M(x)$ der Einheit gleich sein soll, nicht anders geschehen, als wenn man

$$N_1 = 0, \quad N_2 = 0, \quad \ldots, \quad N_{\mu\varrho} = 0,$$

und

$$M(x) = P^\mu(x)$$

annimmt. Hiernach liefern die Gleichungen (15.) für M_1, N_1, M_2, N_2 u. s. w. völlig bestimmte endliche Werthe. Daraus folgt zunächst, dafs $\dot{\mathfrak{M}}_0$ oder das Anfangsglied von $\mathfrak{M}_0$ nicht Null sein kann, indem, wenn dieses der Fall wäre, die Gleichungen (15.) entweder *gar nicht*, oder auf *mehr als eine* Weise befriedigt werden könnten; und daher ergiebt sich

$$(16.)\quad \begin{cases} \dot{\mathfrak{M}}_0 x^{\mu\varrho} + \dot{\mathfrak{M}}_1 x^{\mu\varrho-1} + \cdots + \dot{\mathfrak{M}}_{\mu\varrho} = \dot{\mathfrak{M}}_0 P^\mu(x), \\ \dot{\mathfrak{M}}_{\mu\varrho+1} = \dot{\mathfrak{M}}_{\mu\varrho+2} = \ldots = \dot{\mathfrak{M}}_{2\mu\varrho} = 0. \end{cases}$$

Mithin kann man, wenn man

$$\frac{\mathfrak{M}_0}{\dot{\mathfrak{M}}} = M_0$$

setzt, $M(x)$ und $N(x)$ auf die Form

$$(18.)\quad \begin{cases} M(x) = P^\mu(x) + \dfrac{\mathfrak{M}(x)}{M_0}, \\ N(x) = \dfrac{\mathfrak{N}(x)}{M_0} \end{cases}$$

bringen, wo jetzt $\mathfrak{M}(x)$, $\mathfrak{N}(x)$ ganze Functionen des $(2\mu\varrho-1)$ten Grades von x bedeuten, deren Coefficienten sich gleich wie M_0 nach ganzen positiven Potenzen der Gröfsen (14.) in convergirende Reihen entwickeln lassen. Dabei reducirt sich M_0 auf die Einheit, wenn diese Gröfsen sämmtlich den Werth Null annehmen, während die Coefficienten von $\mathfrak{M}(x)$ und $\mathfrak{N}(x)$ dann ebenfalls sämmtlich verschwinden.

Hierzu bemerke ich noch Folgendes. Die Formel (7.) lehrt, indem

$$f_a(s) = M_a(s)R_a(s)+N_a(s),$$

und $N_a(s)$ eine gerade, $M_a(s)R_a(s)$ eine ungerade Function von s ist, dafs für einen *geraden* Werth von $\mathfrak{m}$

$$F_{a,\mathfrak{m}} \text{ die Form } f_1N_1+f_2N_2+\cdots+f_{\mu\varrho}N_{\mu\varrho},$$

und für einen *ungeraden*

$$F_{a,\mathfrak{m}} \text{ die Form } f_0+f_1M_1+f_2M_2+\cdots+f_{\mu\varrho}M_{\mu\varrho}$$

hat. Ferner ist $\sigma_{a,\mathfrak{n}}$ eine gerade oder ungerade Function von $s'_a, s''_a, \ldots, s_a^{(2\mu)}$, jenachdem $\mathfrak{n}$ eine gerade oder ungerade Zahl ist. Aus der Gleichung (10.) folgt daher, dafs

$$(\mathfrak{a},\mathfrak{p})_0 \quad (\mathfrak{a},\mathfrak{p})_1 \quad \ldots \quad (\mathfrak{a},\mathfrak{p})_{\mu\varrho} \quad \textit{gerade,}$$

und

$$(\mathfrak{a},\mathfrak{p})_{\mu\varrho+1} \quad (\mathfrak{a},\mathfrak{p})_{\mu\varrho+2} \quad \ldots \quad (\mathfrak{a},\mathfrak{p})_{2\mu\varrho} \quad \textit{ungerade}$$

Functionen der eben genannten Gröfsen sind, wenn $\mathfrak{p}$ eine *ungerade* Zahl ist; dafs sich dies aber umgekehrt verhält, sobald $\mathfrak{p}$ *gerade* ist. Es ändert sich also jeder Coefficient der Gleichungen (11.) gar nicht, oder wechselt nur sein Zeichen, wenn man $s'_a, s''_a, \ldots, s_a^{(2\mu)}$ in

$$-s'_a, \; -s''_a, \; \ldots, \; -s_a^{(2\mu)}$$

verwandelt; und zwar geht dadurch, wenn man mit

$$\overline{\mathfrak{m}} \text{ die Zahl 0 oder 1}$$

bezeichnet, je nachdem $\mathfrak{m} \leqq \mu\varrho$ oder $\mathfrak{m} > \mu\varrho$ ist,

$$(\mathfrak{a},\mathfrak{p})_{\mathfrak{m}} \quad \text{in} \quad (-1)^{\mathfrak{p}-1+\overline{\mathfrak{m}}}(\mathfrak{a},\mathfrak{p})_{\mathfrak{m}}$$

über. Der Ausdruck $\mathfrak{M}_{\mathfrak{m}}$ ist nun ein Aggregat von Gliedern, deren jedes die Form

$$\pm(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{p}_1)_{\mathfrak{m}_1}(\mathfrak{a}_2,\mathfrak{p}_2)_{\mathfrak{m}_2} \quad \ldots \quad (\mathfrak{a}_\lambda,\mathfrak{p}_\lambda)_{\mathfrak{m}_\lambda}$$

hat, wo $\lambda = 2\mu\varrho$ ist und die Reihe der Indices $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_\lambda$ sämmtliche Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots, 2\mu\varrho$ enthält, mit Ausnahme von $\mathfrak{m}$, während für

$$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{p}_1 \quad \mathfrak{a}_2, \mathfrak{p}_2 \quad \ldots \quad \mathfrak{a}_\lambda, \mathfrak{p}_\lambda$$

die in der folgenden Zusammenstellung enthaltenen Verbindungen zu setzen sind:

$$\begin{array}{llll} 1,0 & 1,1 & \ldots & 1,2\mu-1, \\ 2,0 & 2,1 & \ldots & 2,2\mu-1, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varrho,0 & \varrho,1 & \ldots & \varrho,2\mu-1. \end{array}$$

Giebt man daher jeder der unter (14.) zusammengestellten Gröfsen den entgegengesetzten Werth, so erfährt das vorstehende Product dadurch dieselbe Veränderung als wenn es mit

$$(-1)^{\mathfrak{p}_1-1+\mathfrak{p}_2-1+\cdots+\mathfrak{p}_\lambda-1+\overline{\mathfrak{m}}_1+\overline{\mathfrak{m}}_2+\cdots+\overline{\mathfrak{m}}_\lambda}$$

multiplicirt wird. Aber

$$\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2+\cdots+\mathfrak{p}_\lambda=\varrho(0+1+2+\cdots+(2\mu-1))=\mu\varrho(2\mu-1),$$
$$\overline{\mathfrak{m}}_1+\overline{\mathfrak{m}}_2+\cdots+\overline{\mathfrak{m}}_\lambda=\overline{0}+\overline{1}+\cdots+(\overline{2\mu\varrho})-\overline{\mathfrak{m}}=\mu\varrho-\overline{\mathfrak{m}},$$

und daher

$$(-1)^{\mathfrak{p}_1-1+\cdots+\mathfrak{p}_\lambda-1+\overline{\mathfrak{m}}_1+\cdots+\overline{\mathfrak{m}}_\lambda}=(-1)^{2\mu\varrho(\mu-1)-\overline{\mathfrak{m}}}=(-1)^{\overline{\mathfrak{m}}}$$

Man sieht also, dafs die Glieder von $\mathfrak{M}_{\mathfrak{m}}$ nach der Zeichenänderung der Gröfsen (14.) sämmtlich unverändert bleiben, wenn $\mathfrak{m}\overline{\overline{<}}\mu\varrho$, und nur ihr Zeichen wechseln, wenn $\mathfrak{m}>\mu\varrho$; d. h. mit andern Worten, dafs

$$\mathfrak{M}_0,\quad \mathfrak{M}_1,\quad \ldots,\quad \mathfrak{M}_{\mu\varrho}$$

und somit auch M_0 und die Coefficienten von $\mathfrak{M}(x)$ ***gerade***, dagegen die Coefficienten von $\mathfrak{N}(x)$ ***ungerade*** Functionen der genannten Gröfsen sind.

Hierdurch ist nun die Zusammensetzungsweise der Functionen $M(x)$, $N(x)$ für den vorliegenden Zweck hinlänglich festgestellt. Aus denselben kann man ferner die Function $\varphi(x)$ leicht erhalten.

Da der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (4, §. 2) durch $\Pi(x)$ theilbar ist, $\Pi(x)$ aber die Form

$$x^{\mu\varrho}+\mathfrak{P}_1x^{\mu\varrho-1}+\cdots+\mathfrak{P}_{\mu\varrho}$$

hat, wo $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ u. s. w. ganze Functionen von x_1', x_1'' u. s. w. und somit auch der Quadrate von s_1', s_2'' u. s. w. sind, von denen, nachdem man den gedachten Ausdruck durch $\Pi(x)$ dividirt, in dem Quotienten nur ganze positive Potenzen vorkommen; so sieht man, dafs man

$$(18.)\qquad \varphi(x) = x^\varrho+\frac{P^{(1)}}{M_0^2}x^{\varrho-1}+\frac{P^{(2)}}{M_0^2}x^{\varrho-2}+\cdots+\frac{P^{(\varrho)}}{M_0^2}$$

erhalten mufs, wo $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, ..., $P^{(\varrho)}$ ganz dieselbe Gestalt haben wie die Coefficienten von $\mathfrak{M}(x)$.

Man kann aber dieser Function noch eine andere, sehr bemerkenswerthe Form geben. Setzt man nämlich in der Gleichung (4, §. 2)

$$x = a_\alpha,\quad a_{\varrho+\alpha},\quad a_{2\varrho+1},$$

so erhält man

$$(19.)\quad \begin{cases} \dfrac{\varphi(a_\mathfrak{a})}{-Q(a_\mathfrak{a})} = \dfrac{N^2(a_\mathfrak{a})}{\Pi(a_\mathfrak{a})} = \dfrac{\mathfrak{N}^2(a_\mathfrak{a})}{M_0^2\,\Pi(a_\mathfrak{a})}, \\ \dfrac{\varphi(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}{P(a_{\varrho+\mathfrak{a}})} = \dfrac{M^2(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}{\Pi(a_{\varrho+\mathfrak{a}})} = \dfrac{(M_0 P^\mu(a_{\varrho+\mathfrak{a}}) + \mathfrak{M}(a_{\varrho+\mathfrak{a}}))^2}{M_0^2\,\Pi(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}, \\ \dfrac{\varphi(a_{2\varrho+1})}{P(a_{2\varrho+1})} = \dfrac{M^2(a_{2\varrho+1})}{\Pi(a_{2\varrho+1})} = \dfrac{(M_0 P^\mu(a_{2\varrho+1}) + \mathfrak{M}(a_{2\varrho+1}))^2}{M_0^2\,\Pi(a_{2\varrho+1})}. \end{cases}$$

Nun ist

$$\frac{1}{(a_\mathfrak{a}-x'_\mathfrak{a})(a_\mathfrak{a}-x''_\mathfrak{a})\,\ldots\,(a_\mathfrak{a}-x^{(2\mu)}_\mathfrak{a})} = \left\{\left(\frac{P(a_\mathfrak{a})}{Q(a_\mathfrak{a})}\right)^\mu \cdot \frac{1}{s'_\mathfrak{a} s''_\mathfrak{a} \ldots s^{(2\mu)}_\mathfrak{a}}\right\}^2,$$

und, wenn $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{a}$ verschieden,

$$\frac{1}{(a_\mathfrak{a}-x'_\mathfrak{b})(a_\mathfrak{a}-x''_\mathfrak{b})\ldots(a_\mathfrak{a}-x^{(2\mu)}_\mathfrak{b})}$$
$$= \left\{\left(\frac{1}{a_\mathfrak{a}-a_\mathfrak{b}}\right)^\mu \left(1-\frac{x'_\mathfrak{b}-a_\mathfrak{b}}{a_\mathfrak{a}-a_\mathfrak{b}}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdots \left(1-\frac{x^{(2\mu)}_\mathfrak{b}-a_\mathfrak{b}}{a_\mathfrak{a}-a_\mathfrak{b}}\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}^2.$$

Aber

$$\left(1-\frac{x'_\mathfrak{b}-a_\mathfrak{b}}{a_\mathfrak{a}-a_\mathfrak{b}}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \left(1-\frac{x''_\mathfrak{b}-a_\mathfrak{b}}{a_\mathfrak{a}-a_\mathfrak{b}}\right)^{-\frac{1}{2}} \text{ u. s. w.}$$

sind, weil $x'_\mathfrak{b}$, $x''_\mathfrak{b}$ u. s. w. sämmtlich in der Nähe von $a_\mathfrak{b}$ sich befinden, nach ganzen positiven Potenzen von $(x'_\mathfrak{b}-a_\mathfrak{b})$, $(x''_\mathfrak{b}-a_\mathfrak{b})$ u. s. w., und somit auch von $s'^2_\mathfrak{b}$, $s''^2_\mathfrak{b}$ u. s. w. in convergirende Reihen entwickelbar. Folglich kann man

$$\frac{1}{\Pi(a_\mathfrak{a})} = \frac{1}{Q^{2\mu}(a_\mathfrak{a})}\left(\frac{\mathrm{S}_\mathfrak{a}}{s'_\mathfrak{a} s''_\mathfrak{a} \ldots s^{(2\mu)}_\mathfrak{a}}\right)^2$$

setzen, wo $\mathrm{S}_\mathfrak{a}$ eine convergirende, nur ganze positive und gerade Potenzen der Gröfsen (14.) enthaltende Reihe bedeutet. In ähnlicher Weise findet man

$$\frac{1}{\Pi(a_{\varrho+\mathfrak{a}})} = \frac{\mathrm{S}^2_{\varrho+\mathfrak{a}}}{P^{2\mu}(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}, \qquad \frac{1}{\Pi(a_{2\varrho+1})} = \frac{\mathrm{S}^2_{2\varrho+1}}{P^{2\mu}(a_{2\varrho+1})},$$

wo $\mathrm{S}_{\varrho+\mathfrak{a}}$, $\mathrm{S}_{2\varrho+1}$ Reihen von ähnlicher Gestalt wie $\mathrm{S}_\mathfrak{a}$ bedeuten.

Aus (19.) ergiebt sich nun

$$\frac{\varphi(a_\mathfrak{a})}{-Q(a_\mathfrak{a})} = \left(\frac{\mathfrak{N}(a_\mathfrak{a})\,\mathrm{S}_\mathfrak{a}}{Q^\mu(a_\mathfrak{a})\,s'_\mathfrak{a}\ldots s^{(2\mu)}_\mathfrak{a}\,M_0}\right)^2,$$

und aus (18.)

$$\frac{\varphi(a_\mathfrak{a})}{-Q(a_\mathfrak{a})} = \frac{\varphi^{(\mathfrak{a})}}{M_0^2},$$

wo $\varphi^{(\mathfrak{a})}$ eine nur ganze positive Potenzen von s'_1, s''_1, u. s. w. enthaltende Reihe bezeichnet. Mithin mufs

$$\varphi^{(\alpha)} = \left(\frac{\mathfrak{N}(a_\alpha)\,\mathrm{S}_\alpha}{Q^\mu(a_\alpha)\,s'_\alpha \ldots s^{(2\mu)}_\alpha}\right)^2,$$

und daher $\mathfrak{N}(a_\alpha)\mathrm{S}_\alpha$ durch $s'_\alpha \ldots s^{(2\mu)}_\alpha$ theilbar sein. Bemerkt man nun, dafs $\mathfrak{N}(a_\alpha)$ eine ungerade, S_α, $(s'_\alpha \ldots s^{(2\mu)}_\alpha)$, M_0, $\mathfrak{M}(a_{\varrho+\alpha})$, $\mathfrak{M}(a_{2\varrho+1})$ aber gerade Functionen der Gröfsen (14.) sind, so erkennt man, dafs man

$$(20.)\quad \begin{cases} \dfrac{\varphi(a_\alpha)}{-Q(a_\alpha)} = \left\{\dfrac{\mathrm{S}^{(\alpha)}_1+\mathrm{S}^{(\alpha)}_3+\cdots+\mathrm{S}^{(\alpha)}_{2m-1}+\cdots}{1+\mathrm{S}^{(0)}_2+\cdots+\mathrm{S}^{(0)}_{2m}+\cdots}\right\}^2 = \varphi^2_\alpha, \\[2ex] \dfrac{\varphi(a_{\varrho+\alpha})}{P(a_\alpha)} = \left\{\dfrac{\mathrm{S}^{(\varrho+\alpha)}_0+\mathrm{S}^{(\varrho+\alpha)}_2+\cdots+\mathrm{S}^{(\varrho+\alpha)}_{2m}+\cdots}{1+\mathrm{S}^{(0)}_2+\cdots+\mathrm{S}^{(0)}_{2m}+\cdots}\right\}^2 = \varphi^2_{\varrho+\alpha}, \\[2ex] \dfrac{\varphi(a_{2\varrho+1})}{P(a_{2\varrho+1})} = \left\{\dfrac{\mathrm{S}^{(2\varrho+1)}_0+\mathrm{S}^{(2\varrho+1)}_2+\cdots+\mathrm{S}^{(2\varrho+1)}_{2m}+\cdots}{1+\mathrm{S}^{(0)}_2+\cdots+\mathrm{S}^{(0)}_{2m}+\cdots}\right\}^2 = \varphi^2_{2\varrho+1} \end{cases}$$

hat, wo $\mathrm{S}^{(r)}_m$ eine ganze homogene Function $m$ten Grades der Gröfsen

$$(21.)\quad \begin{cases} s'_1, & s''_1, & \ldots, & s^{(2\mu)}_1 \\ s'_2, & s''_2, & \ldots, & s^{(2\mu)}_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s'_\varrho, & s''_\varrho, & \ldots, & s^{(2\mu)}_\varrho \end{cases}$$

bezeichnen soll. Es ist aber

$$(22.)\quad \frac{\varphi(x)}{P(x)} = 1+\Sigma\frac{\varphi(a_\alpha)}{(x-a_\alpha)P'(a_\alpha)};$$

und so erhält man

$$(23.)\quad \varphi(x) = P(x)-\Sigma\left\{\frac{Q(a_\alpha)}{P'(a_\alpha)}\cdot\frac{P(x)}{x-a_\alpha}\varphi^2_\alpha\right\}$$

Drückt man nun die Gröfsen (21.) durch die folgenden

$$(24.)\quad \begin{cases} u'_1, & u''_1, & \ldots, & u^{(2\mu)}_1 \\ u'_2, & u''_2, & \ldots, & u^{(2\mu)}_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u'_\varrho, & u''_\varrho, & \ldots, & u^{(2\mu)}_\varrho \end{cases}$$

aus (vermittelst der Formeln (4.) des §. 1), so erhält man

$$(25.)\quad \begin{cases} \varphi_\alpha = \sqrt{\left(\dfrac{\varphi(a_\alpha)}{-Q(a_\alpha)}\right)} = \dfrac{U^{(\alpha)}_1+U^{(\alpha)}_3+\cdots+U^{(\alpha)}_{2m-1}+\cdots}{1+U^{(0)}_2+\cdots+U^{(0)}_{2m}+\cdots} \\[2ex] \varphi_{\varrho+\alpha} = \sqrt{\left(\dfrac{\varphi(a_{\varrho+\alpha})}{P(a_{\varrho+\alpha})}\right)} = \dfrac{U^{(\varrho+\alpha)}_0+U^{(\varrho+\alpha)}_2+\cdots+U^{(\varrho+\alpha)}_{2m}+\cdots}{1+U^{(0)}_2+\cdots+U^{(0)}_{2m}+\cdots} \\[2ex] \varphi_{2\varrho+1} = \sqrt{\left(\dfrac{\varphi(a_{2\varrho+1})}{P(a_{2\varrho+1})}\right)} = \dfrac{U^{(2\varrho+1)}_0+U^{(2\varrho+1)}_2+\cdots+U^{(2\varrho+1)}_{2m}+\cdots}{1+U^{(0)}_2+\cdots+U^{(0)}_{2m}+\cdots} \end{cases}$$

$$(26.)\quad \begin{cases} M(x) = P^{\mu}(x) + \dfrac{U_2(x)+\cdots+U_{2m}(x)+\cdots}{1+U_2^{(0)}+\cdots+U_{2m}^{(0)}+\cdots}, \\ N(x) = \dfrac{U_1(x)+\cdots+U_{2m+1}(x)+\cdots}{1+U_2^{(0)}+\cdots+U_{2m}^{(0)}+\cdots}, \end{cases}$$

wo jezt $U_m^{(r)}$, $U_m(x)$ ganze homogene Functionen mten Grades der Gröfsen (24.) sind, die zweite aber zugleich auch eine ganze Function ($(\mu\varrho-1)$ten Grades) von x ist, und sämmtliche in diesen Ausdrücken vorkommenden unendlichen Reihen unbedingt convergiren, sobald die absoluten Werthe der genannten Veränderlichen unterhalb der oben für sie festgesetzten Gränzen liegen. *) Dabei kann man bemerken, dafs die Coefficienten von $U_m^{(r)}$ und $U_m(x)$ aus $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ und den Coefficienten von $Q(x)$ rational zusammengesetzt sind, wie man leicht sieht, wenn man die vorhergehenden Entwicklungen in dieser Beziehung überblickt.

§. 4.

Nachdem nun ermittelt worden, welche Gestalt die Coefficienten von $M(x)$, $N(x)$, $\varphi(x)$, als Functionen von u'_1, u''_1 u. s. w. betrachtet, haben **), kehre ich zu den Gleichungen (8.) des §. 2. zurück.

---

*) Wenn $F(s_1, s_2, \ldots)$ eine Function mehrerer veränderlichen Gröfsen $s_1, s_2, \ldots$ ist, die für alle Werthe derselben, die ihrem absoluten Betrage nach unter gewissen Gränzwerthen $S_1, S_2, \ldots$ liegen, durch eine convergirende Reihe von der Form

$$\underset{n_1=0\ldots\infty,\, n_2=0\ldots\infty,\ldots}{S}\{A(n_1, n_2, \ldots)\, s_1^{n_1} s_2^{n_2} \ldots\}$$

dargestellt werden kann; und man substituirt für $s_1, s_2, \ldots$ ebenso gebildete Potenz-Reihen beliebig vieler anderer Veränderlichen $u_1, u_2, \ldots$, und ordnet nach Potenzen dieser letztern; so convergirt die so sich ergebende Reihe, sobald man für die absoluten Werthe von $u_1, u_2, \ldots$ solche Gränzen festsetzt, dafs nicht nur die Reihen für $s_1, s_2, \ldots$ sämmtlich convergent sind, sondern ihre Summen auch zu denjenigen Werthen von $s_1, s_2, \ldots$ gehören, für welche die angegebene Darstellung von $F(s_1, s_2, \ldots)$ gültig ist.

**) Wenn man die in Rede stehenden Gröfsen direct durch Auflösung der Gleichungen (3, §. 2) bestimmen, und in den so sich ergebenden Formeln $x'_1, x''_1, \ldots$ $\sqrt{R(x'_1)}, \sqrt{R(x''_1)}, \ldots$ durch $u'_1, u''_1, \ldots$ ausdrücken wollte, so würden sie die Gestalt von Brüchen erhalten, bei denen Zähler und Nenner gleichzeitig verschwänden, sobald man in zweien oder mehreren der unter (1, §. 2) aufgestellten Reihen die gleichstelligen Glieder einander gleich setzte. Um diesen Uebelstand zu vermeiden, der sich schon bei Anwendung des *Abel*'schen Theorems zur Herleitung der sog. Additions-Formeln für die elliptischen Functionen zeigt, ist das im vorhergehenden §. auseinandergesetzte, allerdings etwas umständliche Verfahren gewählt worden. Wie man übrigens die Gleichungen (3, §. 2), auch ohne $\sqrt{R(x'_1)}, \sqrt{R(x''_1)}, \ldots$ in unendliche Reihen aufzulösen, so umformen kann, dafs derselbe Zweck erreicht wird, soll für den besonders wichtigen Fall, wo $\mu=1$ ist, später gezeigt werden.

Wenn die Gröſsen (1.) des §. 2. sämmtlich verschwinden, so reduciren sich, nach den Formeln (25, §. 3) $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\varrho$ ebenfalls sämmtlich auf Null, und daher (nach (23.) desselben §.) $\varphi(x)$ auf $P(x)$, so daſs alsdann $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ die Werthe $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ erhalten. Man kann daher $x_\mathfrak{a} - a_\mathfrak{a}$, $\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}$ — die letztere Gröſse mit Hülfe der Formel (7, §. 2) — bei hinlänglich kleinen Werthen der genannten Veränderlichen nach ganzen positiven Potenzen derselben in Reihen entwickeln, die gleichzeitig mit ihnen verschwinden, und $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ als in der Nähe beziehlich von $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ liegend betrachten. Dann aber führen die Gleichungen (8, §. 2) indem man ganz denselben Weg verfolgt wie bei den Entwicklungen des §. 1., und wieder

$$\sqrt{\left(\frac{P'(a_\mathfrak{a})}{Q(a_\mathfrak{a})}(x_\mathfrak{a} - a_\mathfrak{a})\right)} = s_\mathfrak{a}$$

setzt, zu den folgenden

$$u'_\mathfrak{b} + u''_\mathfrak{b} + \cdots u^{(2\mu)}_\mathfrak{b} = s_\mathfrak{b} + \underset{\mathfrak{n}=1\ldots\infty}{\mathrm{S}}\left\{\sum_\mathfrak{a} \frac{(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})_\mathfrak{n}}{2\mathfrak{n}+1} s_\mathfrak{a}^{2\mathfrak{n}+1}\right\} \quad (\mathfrak{b} = 1, \ldots, \varrho),$$

$$\frac{\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}}{Q(x_\mathfrak{a})} = s_\mathfrak{a} + (\mathfrak{a})_1 s_\mathfrak{a}^3 + \cdots,$$

und man sieht daher, daſs man, unter der Voraussetzung, es seien nicht nur $u'_\mathfrak{a}, u''_\mathfrak{a}, \ldots, u^{(2\mu)}_\mathfrak{a}$, sondern auch $u'_\mathfrak{a} + u''_\mathfrak{a} + \cdots + u^{(2\mu)}_\mathfrak{a}$ dem absoluten Betrage nach kleiner als $U_\mathfrak{a}$, durch Auflösung der Gleichung $\varphi(x) = 0$ und Anwendung der Formel (7, §. 2) zu denselben Werthen von $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$, $\sqrt{R(x_1)}, \sqrt{R(x_2)}, \ldots, \sqrt{R(x_\varrho)}$ gelangen muſs, die man für diese Gröſsen vermittelst der Formeln (4, 5, §. 1) erhält, wenn man in diesen

$$\begin{array}{lll} u'_1 + u''_1 + \cdots + u^{(2\mu)}_1 & \text{an die Stelle von} & u_1 \\ u'_2 + u''_2 + \cdots + u^{(2\mu)}_2 & - \quad - \quad - \quad - & u_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ u'_\varrho + u''_\varrho + \cdots + u^{(2\mu)}_\varrho & - \quad - \quad - \quad - & u_\varrho \end{array}$$

setzt. Aus den so eben angeführten Formeln erhält man ferner

$$(1.)\quad \begin{cases} \sqrt{\left\{\dfrac{(a_\mathfrak{a} - x_1)(a_\mathfrak{a} - x_2)\ldots(a_\mathfrak{a} - x_\varrho)}{-Q(a_\mathfrak{a})}\right\}} \\ = u_\mathfrak{a} + (u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)^{(\mathfrak{a})}_3 + \cdots + (u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)^{(\mathfrak{a})}_{2\mathfrak{m}-1} + \cdots, \\ \sqrt{\left\{\dfrac{(a_{\varrho+\mathfrak{a}} - x_1)(a_{\varrho+\mathfrak{a}} - x_2)\ldots(a_{\varrho+\mathfrak{a}} - x_\varrho)}{P(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}\right\}} \\ = 1 + (u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)^{(\varrho+\mathfrak{a})}_2 + \cdots + (u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)^{(\varrho+\mathfrak{a})}_{2\mathfrak{m}} + \cdots, \\ \sqrt{\left\{\dfrac{(a_{2\varrho+1} - x_1)(a_{2\varrho+1} - x_2)\ldots(a_{2\varrho+1} - x_\varrho)}{P(a_{2\varrho+1})}\right\}} \\ = 1 + (u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)^{(2\varrho+1)}_2 + \cdots + (u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)^{(2\varrho+1)}_{2\mathfrak{m}} + \cdots, \end{cases}$$

wo wieder $(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_m^{(\nu)}$ eine homogene ganze Function mten Grades von $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ bedeutet, deren Coefficienten aus denen von $Q(x)$, und aus $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ rational zusammengesetzt sind. Macht man nun in diesen Ausdrücken die angegebene Substitution, so ersieht man aus der Vergleichung der so hervorgehenden Formeln mit den unter (25.) des vorhergehenden §. aufgestellten, wenn man die letztern nach Potenzen von u_1', u_1'', u. s. w. sich entwickelt denkt, dafs

$$U_1^{(a)} = \pm(u_a' + u_a'' + \cdots + u_a^{(2\mu)}), \qquad U_0^{(\varrho+a)} = \pm 1, \qquad U_0^{(2\varrho+1)} = \pm 1$$

sein mufs. Setzt man nun fest, es solle jeder der Wurzelgröfsen

$$\sqrt{\left(\frac{\varphi(a_a)}{-Q(a_a)}\right)}, \qquad \sqrt{\left(\frac{\varphi(a_{\varrho+a})}{P(a_{\varrho+a})}\right)}, \qquad \sqrt{\left(\frac{\varphi(a_{2\varrho+1})}{P(a_{2\varrho+1})}\right)}$$

von den beiden Werthen, die sie haben kann, derjenige beigelegt werden, bei dem in den vorstehenden Formeln die obern Zeichen gelten, so sind dieselben jetzt als völlig bestimmte eindeutige Functionen von u_1', u_1'' u. s. w. zu betrachten, welche bei hinlänglich kleinen Werthen dieser Veränderlichen mit den unter (1.) aufgestellten übereinstimmen, wofern man in den letztern

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1' + u_1'' + \cdots + u_1^{(2\mu)} \\ u_2 &= u_2' + u_2'' + \cdots + u_2^{(2\mu)} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_\varrho &= u_\varrho' + u_\varrho'' + \cdots + u_\varrho^{(2\mu)} \end{aligned}$$

setzt.

Angenommen nun, man habe für die absoluten Werthe der veränderlichen Gröfsen $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ irgend welche Gränzen $T_1, T_2, \ldots, T_\varrho$, die sie nicht überschreiten sollen, festgestellt, so kann man die Zahl μ so grofs annehmen, dafs

$$T_1 < 2\mu U_1, \quad T_2 < 2\mu U_2, \quad \ldots, \quad T_\varrho < 2\mu U_\varrho.$$

Dann darf man

$$\begin{aligned} u_1' &= u_1'' = \cdots = u_1^{(2\mu)} = \frac{u_1}{2\mu}, \\ u_2' &= u_2'' = \cdots = u_2^{(2\mu)} = \frac{u_2}{2\mu}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_\varrho' &= u_\varrho'' = \cdots = u_\varrho^{(2\mu)} = \frac{u_\varrho}{2\mu} \end{aligned}$$

setzen, und es werden, wenn man die Functionen von $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$, in

welche dadurch die Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichungen (25.) des vorhergehenden §. sich verwandeln, mit

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_1 \quad \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_2 \quad \ldots \quad \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_{2\varrho+1},$$

oder auch kürzer mit

$$\varphi(u_1, \ldots)_1 \quad \varphi(u_1, \ldots)_2 \quad \ldots \quad \varphi(u_1, \ldots)_{2\varrho+1}$$

bezeichnet, dieselben die Gestalt

$$(2.)\quad \begin{cases} \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_\alpha = \dfrac{u_\alpha + \mathfrak{U}_3^{(\alpha)} + \cdots + \mathfrak{U}_{2m-1}^{(\alpha)} + \cdots}{1 + \mathfrak{U}_2^{(0)} + \cdots + \mathfrak{U}_{2m}^{(0)} + \cdots} \\ \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_{\varrho+\alpha} = \dfrac{1 + \mathfrak{U}_2^{(\varrho+\alpha)} + \cdots + \mathfrak{U}_{2m}^{(\varrho+\alpha)} + \cdots}{1 + \mathfrak{U}_2^{(0)} + \cdots + \mathfrak{U}_{2m}^{(0)} + \cdots} \\ \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_{2\varrho+1} = \dfrac{1 + \mathfrak{U}_2^{(2\varrho+1)} + \cdots + \mathfrak{U}_{2m}^{(2\varrho+1)} + \cdots}{1 + \mathfrak{U}_2^{(0)} + \cdots + \mathfrak{U}_{2m}^{(0)} + \cdots} \end{cases}$$

haben, in welchen Formeln $\mathfrak{U}_m^{(r)}$ eine ganze homogene Function mten Grades von $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ bedeutet, und die unendlichen Reihen, welche den Nenner und die Zähler bilden, für alle Werthe von $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$, die ihrem absoluten Betrage nach die Gränzen $T_1, T_2, \ldots, T_\varrho$ nicht überschreiten, unbedingt convergent sind. Für hinlänglich kleine Werthe der genannten Veränderlichen lassen sich $\varphi(u_1, \ldots)_1$, $\varphi(u_1, \ldots)_2$, u. s. w. nach ganzen positiven Potenzen derselben in convergirende Reihen entwickeln, welche mit den entsprechenden unter (1.) aufgestellten übereinstimmen.

Durch Auflösung der Gleichung

$$\varphi(x) = 0,$$

wo

$$(3.)\quad \varphi(x) = P(x) - \Sigma\left\{\frac{Q(a_\alpha)}{P'(a_\alpha)} \cdot \frac{P(x)}{x - a_\alpha} \varphi^2(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_\alpha\right\}$$

ist, und man

$$(4.)\quad \begin{cases} \sqrt{\left(\dfrac{\varphi(a_\alpha)}{-Q(a_\alpha)}\right)} = \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_\alpha \\ \sqrt{\left(\dfrac{\varphi(a_{\varrho+\alpha})}{P(a_{\varrho+\alpha})}\right)} = \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_{\varrho+\alpha} \\ \sqrt{\left(\dfrac{\varphi(a_{2\varrho+1})}{P(a_{2\varrho+1})}\right)} = \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_{2\varrho+1} \end{cases}$$

hat, ergeben sich sodann ϱ Gröfsen $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$, welche den Differential-

Gleichungen

$$(5.)\quad \begin{cases} du_1 = \Sigma\frac{1}{2}\frac{P(x_a)}{x_a-a_1}\cdot\frac{dx_a}{\sqrt{R(x_a)}} \\ du_2 = \Sigma\frac{1}{2}\frac{P(x_a)}{x_a-a_2}\cdot\frac{dx_a}{\sqrt{R(x_a)}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ du_\varrho = \Sigma\frac{1}{2}\frac{P(x_a)}{x_a-a_\varrho}\cdot\frac{dx_a}{\sqrt{R(x_a)}} \end{cases}$$

genügen, und zugleich die Werthe $a_1, a_2, \dots, a_\varrho$ annehmen, wenn $u_1, u_2, \dots, u_\varrho$ sämmtlich verschwinden. Die Werthe, welche die Wurzelgröfsen in diesen Gleichungen haben müssen, erhält man ohne Zweideutigkeit, indem man mit

$$M(x, u_1, u_2, \dots, u_\varrho),\qquad N(x, u_1, u_2, \dots, u_\varrho)$$

die Functionen bezeichnet, in welche die Ausdrücke (26, §. 3) durch die angegebene Substitution übergehen, durch die Formel

$$(6.)\quad \frac{\sqrt{R(x_a)}}{Q(x_a)} = \frac{N(x_a, u_1, u_2, \dots, u_\varrho)}{M(x_a, u_1, u_2, \dots, u_\varrho)}\qquad (a=1, 2, \dots, \varrho).$$

Hierzu ist jetzt noch eine wesentliche Bemerkung zu machen. Der Nenner und die Zähler in den Ausdrücken von

$$\varphi(u_1, \dots)_1\quad \varphi(u_1, \dots)_2\quad \text{u. s. w.}$$

hängen, aufser von $u_1, u_2, \dots$ noch von der Zahl μ ab. Gleichwohl läfst sich nachweisen, dafs die Werthe dieser Functionen selbst stäts dieselben bleiben, welchen Werth man auch dieser Zahl geben möge, wenn derselbe nur grofs genug genommen wird, um die in den in Rede stehenden Ausdrücken vorkommenden Reihen convergent zu machen.

Wenn nämlich $F(u_1, u_2, \dots)$, $G(u_1, u_2, \dots)$, $F'(u_1, u_2, \dots)$, $G'(u_1, u_2, \dots)$ eindeutige Functionen mehrerer Veränderlichen $u_1, u_2, \dots$ sind, die sich nach ganzen positiven Potenzen derselben in Reihen entwickeln lassen, und es gilt die Gleichung

$$\frac{F(u_1, u_2, \dots)}{G(u_1, u_2, \dots)} = \frac{F'(u_1, u_2, \dots)}{G'(u_1, u_2, \dots)}$$

für alle Werthe von $u_1, u_2, \dots$, die ihrem absoluten Betrage nach kleiner als gewisse Gröfsen sind; so mufs sie überhaupt für alle Werthe der genannten Veränderlichen bestehen, bei denen die Reihen für F, G, F', G' sämmtlich convergiren. Denn es folgt aus ihr

$$FG' = GF',$$

und wenn diese Gleichung für beliebige unendlich kleine Werthe von $u_1, u_2, \ldots$ richtig sein soll, so müssen die Reihen, in welche FG' und GF' nach ganzen positiven Potenzen dieser Gröfsen entwickelbar sind, in den gleichstelligen Coefficienten übereinstimmen, woraus denn folgt, dafs sie, und mit ihr auch die ursprüngliche

$$\frac{F}{G} = \frac{F'}{G'}$$

gilt, sobald nur $u_1, u_2, \ldots$ solche Werthe haben, dafs die Entwicklungen von F, G, F', G' sämmtlich convergent sind.

Bezeichnet man nun die Reihen, welche in dem Ausdrucke irgend einer der Functionen $\varphi(u_1,\ldots)_1$, $\varphi(u_1,\ldots)_2$ u. s. w., bei einem bestimmten Werthe von μ, den Zähler und den Nenner bilden, mit F, G, sowie mit F', G' dieselben Reihen für irgend einen andern Werth von μ, so stimmen, nach dem oben Bemerkten, die Reihen, in welche die Brüche

$$\frac{F}{G}, \quad \frac{F'}{G'}$$

bei hinlänglich kleinen Werthen von $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ entwickelt werden können, vollständig überein, und es besteht daher die Gleichung

$$\frac{F}{G} = \frac{F'}{G'}$$

jedenfalls für alle Werthe von $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$, deren absoluten Beträge kleiner als gewisse Gröfsen sind, und somit, nach dem so eben Bewiesenen, überhaupt für diejenigen Werthe dieser Veränderlichen, bei denen die Reihen F, G, F', G' alle vier convergiren — wodurch die Richtigkeit des Behaupteten dargethan ist.

In ähnlicher Weise läfst sich ferner zeigen, dafs man nach Bestimmung von $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ auch für die Wurzelgröfsen $\sqrt{R(x_1)}, \sqrt{R(x_2)}, \ldots, \sqrt{R(x_\varrho)}$ vermittelst der Formel (6.) stäts dieselben Werthe erhalte, welche Zahl μ man auch bei Bildung der Functionen M, N anwenden möge. Es ist aber bemerkenswerth, dafs man aus der Function $\varphi(x)$ eine andere vom $(\varrho-1)$ten Grade und mit Coefficienten von demselben analytischen Charakter wie die von $\varphi(x)$ selbst ableiten kann, welche jene Wurzelgröfsen liefert, wenn man $x = x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ setzt.

Es werde $\dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial x} = \varphi'(x)$ gesetzt, und nachdem man die Gleichung

$$du_\mathfrak{b} = \sum_\mathfrak{c} \tfrac{1}{2} \frac{P(x_\mathfrak{c})}{x_\mathfrak{c} - a_\mathfrak{b}} \cdot \frac{dx_\mathfrak{c}}{\sqrt{R(x_\mathfrak{c})}}$$

mit

$$\frac{\varphi(a_\mathfrak{b})}{(x_\mathfrak{a}-a_\mathfrak{b})P'(a_\mathfrak{b})}$$

multiplicirt, auf beiden Seiten in Beziehung auf $\mathfrak{b}$ summirt. Dies giebt

$$\sum_\mathfrak{b}\frac{\varphi(a_\mathfrak{b})}{P'(a_\mathfrak{b})}\cdot\frac{du_\mathfrak{b}}{x_\mathfrak{a}-a_\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}\tfrac{1}{2}\frac{\varphi(a_\mathfrak{b})\,P(x_\mathfrak{c})}{(x_\mathfrak{a}-a_\mathfrak{b})\,(x_\mathfrak{c}-a_\mathfrak{b})\,P'(a_\mathfrak{b})}\cdot\frac{dx_\mathfrak{c}}{\sqrt{R(x_\mathfrak{c})}}.$$

Nun ist aber

$$\frac{\varphi(x)}{(x_\mathfrak{a}-x)P(x)} = \sum_\mathfrak{b}\frac{\varphi(a_\mathfrak{b})}{(x_\mathfrak{a}-a_\mathfrak{b})(x-a_\mathfrak{b})P'(a_\mathfrak{b})},$$

und daher, wenn man $x = x_\mathfrak{c}$ setzt,

$$\sum_\mathfrak{b}\frac{\varphi(a_\mathfrak{b})}{(x_\mathfrak{c}-a_\mathfrak{b})(x_\mathfrak{a}-a_\mathfrak{b})P'(a_\mathfrak{b})} = 0, \quad \text{wofern } \mathfrak{c} \gtrless \mathfrak{a}$$

$$\text{und } \sum_\mathfrak{b}\frac{\varphi(a_\mathfrak{b})}{(x_\mathfrak{a}-a_\mathfrak{b})(x_\mathfrak{a}-a_\mathfrak{b})P'(a_\mathfrak{b})} = -\frac{\varphi'(x_\mathfrak{a})}{P(x_\mathfrak{a})}.$$

Hiernach reducirt sich die rechte Seite der vorhergehenden Differential-Gleichung auf

$$-\tfrac{1}{2}\frac{\varphi'(x_\mathfrak{a})\,dx_\mathfrak{a}}{\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}},$$

und man erhält

$$\varphi'(x_\mathfrak{a})\,dx_\mathfrak{a} = -2\sum_\mathfrak{b}\frac{\varphi(a_\mathfrak{b})\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}}{(x_\mathfrak{a}-a_\mathfrak{b})\,P'(a_\mathfrak{b})}\,du_\mathfrak{b}$$

Hieraus folgt

$$\varphi'(x_\mathfrak{a})\frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial u_\mathfrak{b}} = -\frac{2\varphi(a_\mathfrak{b})\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}}{(x_\mathfrak{a}-a_\mathfrak{b})P'(a_\mathfrak{b})},$$

$$-\sum_\mathfrak{b}\varphi'(x_\mathfrak{a})\frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial u_\mathfrak{b}} = 2\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}.\sum_\mathfrak{b}\frac{\varphi(a_\mathfrak{b})}{(x_\mathfrak{a}-a_\mathfrak{b})P'(a_\mathfrak{b})}$$

Aber

$$\frac{\varphi(x)}{P(x)} = 1+\sum_\mathfrak{b}\frac{\varphi(a_\mathfrak{b})}{(x-a_\mathfrak{b})P'(a_\mathfrak{b})},$$

und daher für $x = x_\mathfrak{a}$

$$\sum_\mathfrak{b}\frac{\varphi(a_\mathfrak{b})}{(x_\mathfrak{a}-a_\mathfrak{b})P'(a_\mathfrak{b})} = -1$$

Folglich

$$\sum_\mathfrak{b}\varphi'(x_\mathfrak{a})\frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial u_\mathfrak{b}} = 2\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}$$

Nun ist, nach dem Vorhergehenden, $\varphi(x)$ eine eindeutige Function von x und $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$, und man hat, weil $\varphi(x_\mathfrak{a}) = 0$ ist,

$$\varphi'(x_\mathfrak{a})\frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial u_\mathfrak{b}} = -\left(\frac{\partial\varphi(x)}{\partial u_\mathfrak{b}}\right)_{x=x_\mathfrak{a}}$$

Somit giebt die vorhergehende Gleichung, wenn man

$$(7.)\quad \tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial\varphi(x)}{\partial u_1}+\frac{\partial\varphi(x)}{\partial u_2}+\cdots+\frac{\partial\varphi(x)}{\partial u_\varrho}\Big) = \psi(x)$$

setzt, wo dann $\psi(x)$ eine ganze Function $(\varrho-1)$ten Grades von x ist, deren Coefficienten gleich denen von $\varphi(x)$ eindeutige Functionen der Gröfsen u_1, $u_2, \ldots, u_\varrho$ sind,

$$(8.)\quad \sqrt{R(x_a)} = -\psi(x_a) \qquad (a=1,2,\ldots,\varrho).$$

Da nun die Werthe der Coefficienten von $\varphi(x)$, die aus den Functionen $\varphi(u_1,\ldots)_1, \ldots, \varphi(u_1,\ldots)_\varrho$ zusammengesetzt werden, von μ unabhängig sind, so gilt dasselbe auch hinsichtlich der Coefficienten von $\varphi(x)$. Und so ist erwiesen, dafs die Werthe der Gröfsen

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_\varrho,\ \sqrt{R(x_1)},\ \sqrt{R(x_2)}, \ldots, \sqrt{R(x_\varrho)},$$

wenn man dieselben vermittelst der im Vorhergehenden entwickelten Formeln berechnet, nur von $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$, in keinerlei Weise aber von der dabei gebrauchten Zahl μ abhangen.

Die Functionen $\varphi(u_1,\ldots)_1$, $\varphi(u_1,\ldots)_2$, u. s. w., auf welche, der vorstehenden Darstellung nach, das *Abel*'sche Theorem fast mit Nothwendigkeit führt, können durch die Formeln (2.) für *alle* Werthe von $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ als vollständig definirt betrachtet werden, indem man, wie auch die letztern angenommen werden mögen, stäts μ so grofs wählen kann, dafs die in den Ausdrücken jener Functionen vorkommenden unendlichen Reihen convergiren. Für $\varrho=1$ geben sie, wenn

$$\sqrt{(a_3-a_1)A_0}\,.\,u_1 = u$$

gesetzt wird, in die *elliptischen*

$$\sin\operatorname{am} u \qquad \cos\operatorname{am} u \qquad \Delta\operatorname{am} u$$

über. Aus diesem Grunde mögen sie vorzugsweise *„hyperelliptische oder Abel'sche Functionen der Argumente* $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$" genannt werden. Ferner sollen, der letztern Benennung entsprechend, für dieselben von nun an die Bezeichnungen

$$\operatorname{al}(u_1,u_2,\ldots,u_\varrho)_1 \qquad \operatorname{al}(u_1,u_2,\ldots,u_\varrho)_2 \qquad \ldots \qquad \operatorname{al}(u_1,u_2,\ldots,u_\varrho)_{2\varrho+1},$$

oder auch kürzer

$$\operatorname{al}(u_1,\ldots)_1 \qquad \operatorname{al}(u_1,\ldots)_2 \qquad \ldots \qquad \operatorname{al}(u_1,\ldots)_{2\varrho+1}$$

gebraucht werden. *)

---

*) Die Form, welche ich in der vorliegenden Abhandlung den *Abel*'schen Functionen gegeben habe, stimmt nicht ganz mit derjenigen überein, in welcher sie der frühern,

Durch die bisherigen Entwicklungen ist jetzt das in der Einleitung ausgesprochene, die Form des Abhängigkeitsverhältnisses, welches zwischen den Gröfsen $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ und $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ durch die daselbst aufgestellten Differential-Gleichungen begründet ist, betreffende Theorem strenge erwiesen. Dasselbe möge, in noch bestimmterer Weise gefafst, hier wiederholt und mit einer übersichtlichen Zusammenstellung der wichtigsten Formeln verbunden werden.

Es sei

$$(\text{I.})\quad \begin{cases} R(x) = A_0(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{2\varrho+1}), \\ P(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\varrho), \quad \dfrac{\partial P(x)}{\partial x} = P'(x), \\ Q(x) = A_0(x-a_{\varrho+1})(x-a_{\varrho+2})\ldots(x-a_{2\varrho+1}), \end{cases}$$

so lassen sich die Gröfsen $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$, welche die Differential-Gleichungen

$$(\text{II.})\quad \begin{cases} du_1 = \Sigma\frac{1}{2}\dfrac{P(x_a)}{x_a-a_1}\cdot\dfrac{dx_a}{\sqrt{R(x_a)}} \\ du_2 = \Sigma\frac{1}{2}\dfrac{P(x_a)}{x_a-a_2}\cdot\dfrac{dx_a}{\sqrt{R(x_a)}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ du_\varrho = \Sigma\frac{1}{2}\dfrac{P(x_a)}{x_a-a_\varrho}\cdot\dfrac{dx_a}{\sqrt{R(x_a)}} \end{cases}$$

befriedigen, und zugleich die Werthe $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ annehmen, wenn $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ sämmtlich verschwinden, als die Wurzeln einer Gleichung ϱten Grades betrachten, welcher man die Form

$$(\text{III.})\quad \Sigma\left\{\frac{Q(a_a)}{P'(a_a)}\cdot\frac{\text{al}^2(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_a}{x-a_a}\right\} = 1$$

geben kann. In dieser bedeuten

$$\text{al}(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_1 \qquad \text{al}(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_2 \qquad \ldots \qquad \text{al}(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_\varrho$$

---

im 47sten Bande des *Crelle*'schen Journals abgedruckten, aufgestellt sind. Die letztere dürfte, an sich betrachtet, einige Vorzüge haben; ich habe sie aber geändert, um den nicht unwesentlichen Vortheil zu erreichen, dafs jede *Abel*'sche Function für $\varrho = 1$ geradezu in eine der elliptischen von der gebräuchlichen Form übergehe — was bei den dortigen $\text{al}(u_1, \ldots)_0$, $\text{al}(u_1, \ldots)_1$, u. s. w. nicht der Fall ist, indem diese vielmehr für $\varrho = 1$ mit den von *Abel* in dessen erster Abhandlung über die elliptischen Transcendenten gebrauchten Formen überein kommen — und auf diese Weise die Vergleichung jedes gefundenen Resultats mit einem aus der Theorie der elliptischen Functionen bekannten erleichtert werde.

eindeutige Functionen der unbeschränkt veränderlichen Argumente u_1, $u_2, \ldots, u_\varrho$, *welche für alle innerhalb irgend eines endlichen Bereichs liegenden Werthe dieser Gröfsen in der Form*

$$\text{(IV.)}\left\{\begin{array}{l} \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_1 = \dfrac{u_1 + (u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_3^{(1)} + \cdots + (u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_{2m-1}^{(1)} + \cdots}{1 + (u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_2^{(0)} + \cdots + (u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_{2m}^{(0)} + \cdots}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_\varrho = \dfrac{u_\varrho + (u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_3^{(\varrho)} + \cdots + (u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_{2m-1}^{(\varrho)} + \cdots}{1 + (u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_2^{(0)} + \cdots + (u_1, u_2, \ldots u_\varrho)_{2m}^{(0)} + \cdots}, \end{array}\right.$$

wo durch $(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_m^{(r)}$ *eine homogene ganze Function* m*ten Grades bezeichnet wird, dargestellt werden können.*

Setzt man ferner

$$\text{(V.)} \qquad (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_\varrho) = \varphi(x),$$

wo denn

$$\text{(VI.)} \qquad \varphi(x) = P(x) - \Sigma\left\{\frac{Q(a_\mathfrak{a})}{P'(a_\mathfrak{a})} \cdot \frac{P(x)}{x - a_\mathfrak{a}} \mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_\mathfrak{a}\right\}$$

und

$$\text{(VII.)} \qquad \sqrt{\left(\frac{\varphi(a_\mathfrak{a})}{-Q(a_\mathfrak{a})}\right)} = \sqrt{\left\{\frac{(a_\mathfrak{a} - x_1)(a_\mathfrak{a} - x_2) \ldots (x_\mathfrak{a} - x_\varrho)}{-A_0(a_\mathfrak{a} - a_{\varrho+1}) \ldots (a_\mathfrak{a} - a_{2\varrho+1})}\right\}} = \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_\mathfrak{a}$$

ist, und

$$\text{(VIII.)} \qquad \Sigma \tfrac{1}{2} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial u_\mathfrak{a}} = \psi(x),$$

oder, indem man

$$\text{(IX.)} \qquad \frac{\partial\, \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_\mathfrak{a}}{\partial u_1} + \cdots + \frac{\partial\, \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_\mathfrak{a}}{\partial u_\varrho} \quad \textit{mit} \quad \overline{\mathrm{al}}(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_\mathfrak{a}$$

bezeichnet,

$$\text{(X.)} \qquad \psi(x) = \Sigma\left\{\frac{-Q(a_\mathfrak{a})}{P'(a_\mathfrak{a})} \cdot \frac{P(x)}{x - a_\mathfrak{a}} \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_\mathfrak{a}\, \overline{\mathrm{al}}(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_\mathfrak{a}\right\},$$

so giebt die Formel

$$\text{(XI.)} \qquad \sqrt{R(x_\mathfrak{a})} = -\psi(x_\mathfrak{a})$$

nach Bestimmung von $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ *diejenigen Werthe der Wurzelgröfsen* $\sqrt{R(x_1)}, \sqrt{R(x_2)}, \ldots, \sqrt{R(x_\varrho)}$, *welche diesen in den obigen Differential-Gleichungen* (II.) *beigelegt werden müssen. Weiter hat man*

$$\text{(XII.)}\quad \begin{cases} \sqrt{\left(\dfrac{\varphi(a_{\varrho+\alpha})}{P(a_{\varrho+\alpha})}\right)} = \sqrt{\left\{\dfrac{(a_{\varrho+\alpha}-x_1)(a_{\varrho+\alpha}-x_2)\dots(a_{\varrho+\alpha}-x_\varrho)}{(a_{\varrho+\alpha}-a_1)(a_{\varrho+\alpha}-a_2)\dots(a_{\varrho+\alpha}-a_\varrho)}\right\}} \\ \qquad = \mathrm{al}(u_1, u_2, \dots, u_\varrho)_{\varrho+\alpha}, \\ \sqrt{\left(\dfrac{\varphi(a_{2\varrho+1})}{P(a_{2\varrho+1})}\right)} = \sqrt{\left\{\dfrac{(a_{2\varrho+1}-x_1)(a_{2\varrho+1}-x_2)\dots(a_{2\varrho+1}-x_\varrho)}{(a_{2\varrho+1}-a_1)(a_{2\varrho+1}-a_2)\dots(a_{2\varrho+1}-a_\varrho)}\right\}} \\ \qquad = \mathrm{al}(u_1, u_2, \dots, u_\varrho)_{2\varrho+1}, \end{cases}$$

wo $\mathrm{al}(u_1, \dots)_{\varrho+1}, \dots, \mathrm{al}(u_1, \dots)_{2\varrho+1}$ ***Functionen derselben Art wie*** $\mathrm{al}(u_1, \dots)_1$ u. s. w. ***sind, die sich in der Form***

$$\text{(XIII.)}\quad \begin{cases} \mathrm{al}(u_1, u_2, \dots, u_\varrho)_{\varrho+1} \\ = \dfrac{1+(u_1, u_2, \dots, u_\varrho)_2^{(\varrho+1)} + \dots + (u_1, u_2, \dots, u_\varrho)_{2m}^{(\varrho+1)} + \dots}{1+(u_1, u_2, \dots, u_\varrho)_2^{(0)} + \dots + (u_1, u_2, \dots, u_\varrho)_{2m}^{(0)} + \dots}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \mathrm{al}(u_1, u_2, \dots, u_\varrho)_{2\varrho+1} \\ = \dfrac{1+(u_1, u_2, \dots, u_\varrho)_2^{(2\varrho+1)} + \dots + (u_1, u_2, \dots, u_\varrho)_{2m}^{(2\varrho+1)} + \dots}{1+(u_1, u_2, \dots, u_\varrho)_2^{(0)} + \dots + (u_1, u_2, \dots, u_\varrho)_{2m}^{(0)} + \dots} \end{cases}$$

darstellen lassen, wo der Nenner derselbe ist wie in den Ausdrücken (IV.). Diesen Formeln füge ich noch die folgenden hinzu.

Bezeichnet man mit α irgend eine der Zahlen $1, 2, \dots, 2\varrho+1$, und setzt

$$\text{(XIV.)}\qquad -Q(a_\alpha) = l_\alpha, \quad P(a_{\varrho+\alpha}) = l_{\varrho+\alpha}, \quad P(a_{2\varrho+1}) = l_{2\varrho+1},$$

$$\text{(XV.)}\qquad \frac{\partial\,\mathrm{al}(u_1, u_2, \dots, u_\varrho)_\alpha}{\partial u_1} + \dots + \frac{\partial\,\mathrm{al}(u_1, u_2, \dots, u_\varrho)_\alpha}{\partial u_\varrho} = \overline{\mathrm{al}}(u_1, u_2, \dots, u_\varrho)_\alpha,$$

so ist

$$\text{(XVI.)}\qquad \begin{cases} \varphi(a_\alpha) = l_\alpha\, \mathrm{al}^2(u_1, u_2, \dots, u_\varrho)_\alpha, \\ \psi(a_\alpha) = l_\alpha\, \mathrm{al}(u_1, u_2, \dots, u_\varrho)_\alpha\, \overline{\mathrm{al}}(u_1, u_2, \dots, u_\varrho)_\alpha, \end{cases}$$

so dafs man auch, wenn $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\varrho$ ϱ verschiedene Werthe von α sind, und

$$\text{(XVII.)}\qquad (x-a_{\alpha_1})\dots(x-a_{\alpha_\varrho}) = R_1(x)$$

gesetzt wird,

$$\text{(XVIII.)}\quad \begin{cases} \varphi(x) = R_1(x) + \sum\limits_{\alpha=\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\varrho} \left\{\dfrac{l_\alpha}{R_1'(a_\alpha)} \cdot \dfrac{R_1(x)}{x-a_\alpha}\, \mathrm{al}^2(u_1, u_2, \dots, u_\varrho)_\alpha\right\}, \\ \psi(x) = \sum\limits_{\alpha=\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\varrho} \left\{\dfrac{l_\alpha}{R_1'(a_\alpha)} \cdot \dfrac{R_1(x)}{x-a_\alpha}\, \mathrm{al}(u_1, u_2, \dots, u_\varrho)_\alpha\, \overline{\mathrm{al}}(u_1, u_2, \dots, u_\varrho)_\alpha\right\} \end{cases}$$

hat.

Ferner ist, indem

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \Sigma \frac{\psi(x_{\mathfrak{a}})}{(x-x_{\mathfrak{a}})\varphi'(x_{\mathfrak{a}})}, \quad \text{wo} \quad \varphi'(x) = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x},$$

in Folge (X, XVI.)

$$\text{(XIX.)} \qquad \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \Sigma \frac{\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}}{(x_{\mathfrak{a}}-x)\varphi'(x_{\mathfrak{a}})},$$

$$\text{(XX.)} \qquad \frac{\overline{\mathrm{al}}(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_a}{\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)_a} = \Sigma \frac{\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}}{(x_{\mathfrak{a}}-a_a)\varphi'(x_{\mathfrak{a}})}.$$

Nun ist oben bei Herleitung der Gleichung (8.) gefunden worden

$$\left(\frac{\partial\varphi(x)}{\partial u_{\mathfrak{b}}}\right)_{x=x_{\mathfrak{a}}} = -\varphi'(x_{\mathfrak{a}})\frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial u_{\mathfrak{b}}} = \frac{2\varphi(a_{\mathfrak{b}})\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}}{(x_{\mathfrak{a}}-a_{\mathfrak{b}})P'(a_{\mathfrak{b}})} = -\frac{2\varphi(a_{\mathfrak{b}})\psi(x_{\mathfrak{a}})}{(x_{\mathfrak{a}}-a_{\mathfrak{b}})P'(a_{\mathfrak{b}})},$$

woraus man schlieſst, daſs für jeden Werth von x

$$\text{(XXI.)} \qquad \tfrac{1}{2}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial u_{\mathfrak{b}}} = \frac{\psi(a_{\mathfrak{b}})\varphi(x)-\varphi(a_{\mathfrak{b}})\psi(x)}{(x-a_{\mathfrak{b}})P'(a_{\mathfrak{b}})}$$

ist, indem die beiden einander gleichgesetzten Ausdrücke ganze Functionen $(\varrho-1)$ten Grades von x sind, welche für ϱ Werthe dieser Gröſse, x_1, x_2, $\ldots$, x_ϱ, der vorstehenden Formel gemäſs übereinstimmen, also identisch sein müssen. Aus dieser Gleichung folgt, wenn man die durch (XIX.) gegebenen Ausdrücke von $\psi(a_{\mathfrak{b}})$ und $\psi(x)$ substituirt

$$\text{(XXII.)} \qquad \tfrac{1}{2}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial u_{\mathfrak{b}}} = -\frac{\varphi(a_{\mathfrak{b}})\varphi(x)}{P'(a_{\mathfrak{b}})}\sum_{\mathfrak{a}}\left\{\frac{\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}}{(x_{\mathfrak{a}}-x)(x_{\mathfrak{a}}-a_{\mathfrak{b}})\varphi'(x_{\mathfrak{a}})}\right\}$$

Ferner, wenn man $x = a_a$ setzt,

$$\text{(XXIII.)} \qquad \frac{\partial\,\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_a}{\mathrm{al}(u_1, \ldots)_a\,\partial u_{\mathfrak{b}}} = \frac{-Q(a_{\mathfrak{b}})}{P'(a_{\mathfrak{b}})}\cdot\frac{\mathrm{al}(u_1,\ldots)_a\,\overline{\mathrm{al}}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{b}} - \mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{b}}\,\overline{\mathrm{al}}(u_1,\ldots)_a}{a_a-a_{\mathfrak{b}}},$$

vorausgesetzt, daſs a von $\mathfrak{b}$ verschieden sei; oder wenn man, unter der Annahme, daſs $\beta \gtrless \alpha$,

$$\text{(XXIV.)} \qquad \frac{\mathrm{al}(u_1,\ldots)_\alpha\,\overline{\mathrm{al}}(u_1,\ldots)_\beta - \mathrm{al}(u_1,\ldots)_\beta\,\overline{\mathrm{al}}(u_1,\ldots)_\alpha}{a_\alpha-a_\beta} \quad \text{durch } \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_{\alpha\beta}$$

bezeichnet, wo denn, zufolge (XX.)

$$\text{(XXV.)} \qquad \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_{\alpha\beta} = -\Sigma\left\{\frac{\mathrm{al}(u_1,\ldots)_\alpha\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_\beta\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}}{(x_{\mathfrak{a}}-a_\alpha)(x_{\mathfrak{a}}-a_\beta)\varphi'(x_{\mathfrak{a}})}\right\}$$

ist, und man

$$\text{(XXVI.)} \qquad \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_{\alpha\beta} = \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_{\beta\alpha}$$

hat:

$$\text{(XXVII.)}\qquad \frac{\partial\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_a}{\partial u_b} = -\frac{Q(a_b)}{P'(a_b)}\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_b\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{ab},\quad (b \lesseqgtr a)$$

aus welcher Gleichung, wenn man $\alpha = a$ setzt und auf beiden Seiten mit $\frac{Q(a_a)}{P'(a_a)}\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_a$ multiplicirt, noch

$$\text{(XXVIII.)}\qquad \frac{\partial\left(\frac{Q(a_a)}{P'(a_a)}\,\mathrm{al}^2(u_1,\ldots)_a\right)}{\partial u_b} = \frac{\partial\left(\frac{Q(a_b)}{P'(a_b)}\,\mathrm{al}^2(u_1,\ldots)_b\right)}{\partial u_a}$$

folgt.

Die in dem Vorstehenden eingeführten Functionen

$$\mathrm{al}(u_1,\ldots)_\alpha,\qquad \overline{\mathrm{al}}(u_1,\ldots)_\alpha,\qquad \mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\alpha\beta}$$

können (nach den Formeln XVI, XX, XXIV) sämmtlich algebraisch durch $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ ausgedrückt werden; es müssen daher unter ihnen so viele algebraische Relationen bestehen, als Functionen vorhanden sind, weniger ϱ. Diese sollen in dem folgenden §. entwickelt und zusammengestellt werden.

§. 5.

Algebraische Relationen unter den *Abel*'schen Functionen und deren ersten Differential-Coefficienten.

Es werde der Kürze wegen

$$\mathrm{al}(u_1,\ldots)_\alpha = p_\alpha\qquad \overline{\mathrm{al}}(u_1,\ldots)_\alpha = \bar{p}_\alpha\qquad \mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta}$$

gesetzt; dann gelten folgende Sätze.

I. ***Durch je ϱ von den Quadraten der Gröfsen p_α können die übrigen linear ausgedrückt werden.***

Aus der Formel (XVIII.) des vorhergehenden §. folgt nämlich, wenn man $x = a_\beta$ setzt, und β nicht unter den Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ begriffen ist, mit Berücksichtigung von (XVI.)

$$\frac{l_\beta}{R_1(a_\beta)}\cdot p_\beta^2 = 1 - \sum_{\alpha=\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\varrho}\left\{\frac{l_\alpha}{R_1'(a_\alpha)}\cdot\frac{p_\alpha^2}{a_\alpha - a_\beta}\right\}$$

II. ***Eben so können durch je ϱ von den Gröfsen***

$$p_\gamma^2,\quad p_{1\gamma}^2,\quad p_{2\gamma}^2,\quad \ldots,\quad p_{(2\varrho+1)\gamma}^2$$

(wo $p_{\gamma\gamma}$ fortzulassen ist) die übrigen linear ausgedrückt werden, vermittelst der Formeln

$$A_0 p_\gamma^2 = \frac{R'(a_\gamma)}{l_\gamma R_1(a_\gamma)} - \sum_\alpha \left\{ \frac{l_\alpha}{R_1'(a_\alpha)} p_{\alpha\gamma}^2 \right\}$$

$$\frac{(a_\gamma - a_\beta) l_\beta}{R_1(a_\beta)} p_{\beta\gamma}^2 = A_0 p_\gamma^2 + \sum_\alpha \left\{ \frac{a_\gamma - a_\alpha}{a_\beta - a_\alpha} \cdot \frac{l_\alpha}{R_1'(a_\alpha)} p_{\alpha\gamma}^2 \right\}$$

$$= \frac{R'(a_\gamma)}{l_\gamma R_1(a_\gamma)} + \sum_\alpha \left\{ \frac{a_\gamma - a_\beta}{a_\beta - a_\alpha} \cdot \frac{l_\alpha}{R_1'(a_\alpha)} p_{\alpha\gamma}^2 \right\}$$

in denen sich das Summenzeichen auf dieselben Werthe von α bezieht wie in (I.), *und γ sowohl als β nicht unter diesen begriffen sein darf.*

In Folge der Gleichung

$$\psi(x_\mathfrak{a}) = -\sqrt{R(x_\mathfrak{a})} \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

wird die Function $R(x) - \psi^2(x)$ für $x = x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ gleich Null, und ist daher durch $\varphi(x)$ theilbar. Setzt man nun

$$\psi_\gamma(x) = \frac{\bar{p}_\gamma \varphi(x) - p_\gamma \psi(x)}{x - a_\gamma},$$

so wird der Zähler dieses Ausdruckes für $x = a_\gamma$ (zufolge der Formel XVI. des vorhergehenden §.) gleich Null, und es ist somit $\psi_\gamma(x)$ eine ganze Function $(\varrho - 1)$ten Grades. Dann hat man

$$p_\gamma^2 R(x) - (x - a_\gamma)^2 \psi_\gamma^2(x)$$
$$= p_\gamma^2 (R(x) - \psi^2(x)) + \bar{p}_\gamma \varphi(x) (2 p_\gamma \psi(x) - \bar{p}_\gamma \varphi(x)),$$

und es ist also der Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung ebenfalls durch $\varphi(x)$ theilbar, wie auch durch $x - a_\gamma$, so dafs man setzen kann

$$p_\gamma^2 \frac{R(x)}{x - a_\gamma} - (x - a_\gamma) \psi_\gamma^2(x) = \varphi(x) \varphi_\gamma(x),$$

und dann $\varphi_\gamma(x)$ eine ganze Function ϱten Grades bedeutet. Nimmt man nun $x = a_\alpha$, $\alpha \gtrless \gamma$ vorausgesetzt, so ergiebt sich (zufolge Formel XVI. d. v. §.)

$$\varphi_\gamma(a_\alpha) = (a_\gamma - a_\alpha) l_\alpha p_{\alpha\gamma}^2,$$

indem

$$\psi_\gamma(a_\alpha) = l_\alpha p_\alpha p_{\alpha\gamma}$$

ist. Ferner erhält man für $x = a_\gamma$

$$\varphi_\gamma(a_\gamma) = \frac{R'(a_\gamma)}{l_\gamma}$$

Bemerkt man nun noch, dafs der Coefficient des höchsten Gliedes von $\varphi_\gamma(x)$ gleich $A_0 p_\gamma^2$ ist, und man daher

$$\frac{\varphi_\gamma(x)}{R_1(x)} = A_0 p_\gamma^2 + \sum_\alpha \frac{\varphi_\gamma(a_\alpha)}{(x-a_\alpha)R'_1(a_\alpha)}$$
$$= A_0 p_\gamma^2 + \sum_\alpha \frac{a_\gamma - a_\alpha}{x - a_\alpha} \cdot \frac{l_\alpha}{R'_1(a_\alpha)} p_{\alpha\gamma}$$

hat, so ergeben sich die zu beweisenden Relationen, indem man $x = a_\gamma$ und $x = a_\beta$ setzt.

III. Aehnliche Relationen finden Statt unter den in der Reihe

$$p_1 p_{1\gamma}, \quad p_2 p_{2\gamma}, \quad \ldots, \quad p_{2\varrho+1} p_{(2\varrho+1)\gamma}$$

enthaltenen Producten.

Setzt man nämlich in der Gleichung

$$\frac{\psi_\gamma(x)}{R_1(x)} = \sum_\alpha \frac{\psi_\gamma(a_\alpha)}{(x-a_\alpha)R'_1(a_\alpha)} = \sum_\alpha \frac{l_\alpha p_\alpha p_{\alpha\gamma}}{(x-a_\alpha)R'_1(a_\alpha)}$$

$x = a_\beta$, so ergiebt sich

$$\frac{l_\gamma}{R_1(a_\beta)} p_\beta p_{\beta\gamma} = \sum_\alpha \frac{l_\alpha p_\alpha p_{\alpha\gamma}}{(a_\beta - a_\alpha)R'_1(a_\alpha)},$$

wo hinsichtlich der Zahlen α, β, γ dasselbe gilt wie bei der vorhergehenden Nr.

IV. Unter je sechs Functionen p_α, p_β, p_γ, $p_{\beta\gamma}$, $p_{\gamma\alpha}$, $p_{\alpha\beta}$, wo α, β, γ verschiedene Werthe haben müssen, findet die Relation

$$(a_\beta - a_\gamma) p_\alpha p_{\beta\gamma} + (a_\gamma - a_\alpha) p_\beta p_{\gamma\alpha} + (a_\alpha - a_\beta) p_\gamma p_{\alpha\beta} = 0,$$

oder

$$p_{\alpha\beta} = \frac{(a_\gamma - a_\beta) p_\alpha p_{\beta\gamma} - (a_\gamma - a_\alpha) p_\beta p_{\alpha\gamma}}{(a_\alpha - a_\beta) p_\gamma}$$

Statt.

Denn es ist (vermöge Formel XXIV. des v. §.)

$$\frac{(a_\alpha - a_\beta) p_{\alpha\beta}}{p_\alpha p_\beta} = \frac{\bar{p}_\beta}{p_\beta} - \frac{\bar{p}_\alpha}{p_\alpha}$$
$$\frac{(a_\beta - a_\gamma) p_{\beta\gamma}}{p_\beta p_\gamma} = \frac{\bar{p}_\gamma}{p_\gamma} - \frac{\bar{p}_\beta}{p_\beta}$$
$$\frac{(a_\gamma - a_\alpha) p_{\gamma\alpha}}{p_\gamma p_\alpha} = \frac{\bar{p}_\alpha}{p_\alpha} - \frac{\bar{p}_\gamma}{p_\gamma},$$

aus welchen Gleichungen, wenn man sie durch Addition verbindet, die aufgestellte Relation sofort folgt.

V. Endlich ergeben sich noch folgende Gleichungen, in denen
α' irgend eine der Zahlen $\varrho+1$, $\varrho+2$, ..., $2\varrho+1$

bedeuten soll,

$$\overline{p}_a = \sum_b \frac{\partial p_a}{\partial u_b} = (a_{a'} - a_a) p_{a'} p_{aa'} + \sum_b{}' \left\{ \frac{Q(a_b)}{P'(a_b)} \cdot \frac{a_a - a_b}{a_b - a_{a'}} p_b p_{ab} \right\} \quad (b \gtrless a)$$

$$\frac{\partial p_a}{\partial u_a} = (a_{a'} - a_a) p_{a'} p_{aa'} + \sum_b{}' \left\{ \frac{Q(a_b)}{P'(a_b)} \cdot \frac{a_a - a_{a'}}{a_b - a_{a'}} p_b p_{ab} \right\} \quad (b \gtrless a)$$

$$\overline{p}_{a'} = \sum_b \frac{\partial p_{a'}}{\partial u_b} = \sum_b \left\{ \frac{-Q(a_b)}{P'(a_b)} p_b p_{a'b} \right\}$$

Man hat nämlich (Formel XXVII d. v. §.)

$$\frac{\partial p_a}{\partial u_b} = -\frac{Q(a_b)}{P'(a_b)} p_b p_{ab} \qquad (b \gtrless a)$$

Hieraus folgt, wenn man $a = a'$ setzt, sofort die dritte der vorstehenden Gleichungen. Aus (VI.) aber folgt, wenn man $x = a_{a'}$ nimmt und b statt a schreibt,

$$p_{a'}^2 = 1 - \sum_b \left\{ \frac{Q(a_b)}{P'(a_b)} \cdot \frac{p_b^2}{a_{a'} - a_b} \right\}$$

und hieraus, wenn man nach u_a differentiirt,

$$p_{a'} p_{aa'} = \frac{\frac{\partial p_a}{\partial u_a}}{a_{a'} - a_a} - \sum_b{}' \left\{ \frac{Q(a_b)}{P'(a_b)} \cdot \frac{p_b p_{ab}}{a_{a'} - a_b} \right\}, \quad (b \gtrless a),$$

woraus sich die zweite Gleichung ergiebt, aus der dann weiter die erste folgt.

VI. Von den vorstehenden Relationen mögen nun die folgenden besonders hervorgehoben werden, in denen der Kürze wegen

$2\varrho + 1$ durch a_0, $\varrho + a$ durch a', $\varrho + b$ durch b'

bezeichnet ist.

$$(1.) \qquad \mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{a_0} = 1 - \sum_a \left\{ \frac{Q(a_a)}{P'(a_a)} \cdot \frac{\mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_a}{a_{a_0} - a_a} \right\}$$

$$(2.) \qquad \mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{a'} = 1 - \sum_a \left\{ \frac{Q(a_a)}{P'(a_a)} \cdot \frac{\mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_a}{a_{a'} - a_a} \right\}$$

$$(3.) \qquad A_0 \mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{a_0} = \frac{Q'(a_{a_0})}{P(a_{a_0})} + \sum_a \left\{ \frac{Q(a_a)}{P'(a_a)} \mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{a_0 a} \right\}$$

$$(4.) \qquad (a_{a_0} - a_{a'}) \mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{a_0 a'}$$
$$= A_0 \mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{a_0} - \sum_a \left\{ \frac{a_{a_0} - a_a}{a_{a'} - a_a} \cdot \frac{Q(a_a)}{P'(a_a)} \mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{a_0 a} \right\}$$
$$= \frac{Q'(a_{a_0})}{P(a_{a_0})} - \sum_a \left\{ \frac{a_{a_0} - a_{a'}}{a_{a'} - a_a} \cdot \frac{Q(a_a)}{P'(a_a)} \mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{a_0 a} \right\}$$

$$(5.) \qquad \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}'}\, \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}'} = \sum_{\mathfrak{a}} \left\{ \frac{Q(a_{\mathfrak{a}})}{P'(a_{\mathfrak{a}})} \cdot \frac{\mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}}\, \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}'}}{a_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{a}'}} \right\}$$

$$(6.) \qquad \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}_0}\, \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$$

$$= \frac{(a_{\mathfrak{a}_0} - a_{\mathfrak{b}})\, \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}}\, \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}} - (a_{\mathfrak{a}_0} - a_{\mathfrak{a}})\, \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{b}}\, \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}}}{a_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{b}}}$$

$$(7.) \qquad \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}_0}\, \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}}$$

$$= \frac{(a_{\mathfrak{a}_0} - a_{\mathfrak{b}})\, \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}'}\, \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}} - (a_{\mathfrak{a}_0} - a_{\mathfrak{a}'})\, \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{b}}\, \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}'}}{a_{\mathfrak{a}'} - a_{\mathfrak{b}}}$$

$$(8.) \qquad \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}_0}\, \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'}$$

$$= \frac{(a_{\mathfrak{a}_0} - a_{\mathfrak{b}'})\, \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}'}\, \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}'} - (a_{\mathfrak{a}_0} - a_{\mathfrak{a}'})\, \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{b}'}\, \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}'}}{a_{\mathfrak{a}'} - a_{\mathfrak{b}'}}$$

$$(9.) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\, \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}}}{\partial u_{\mathfrak{b}}} = -\dfrac{Q(a_{\mathfrak{b}})}{P'(a_{\mathfrak{b}})}\, \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{b}}\, \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \qquad (\mathfrak{b} \gtrless \mathfrak{a}) \\[2ex] \dfrac{\partial\, \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}_0}}{\partial u_{\mathfrak{b}}} = -\dfrac{Q(a_{\mathfrak{b}})}{P'(a_{\mathfrak{b}})}\, \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{b}}\, \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}} \\[2ex] \dfrac{\partial\, \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}'}}{\partial u_{\mathfrak{b}}} = -\dfrac{Q(a_{\mathfrak{b}})}{P'(a_{\mathfrak{b}})}\, \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{b}}\, \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}} \\[2ex] \dfrac{\partial\, \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}}}{\partial u_{\mathfrak{a}}} = (a_{\mathfrak{a}_0} - a_{\mathfrak{a}})\, \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}_0}\, \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}} \\[1ex] \qquad - \sum_{\mathfrak{b}}{}' \left\{ \dfrac{Q(a_{\mathfrak{b}})}{P'(a_{\mathfrak{b}})} \cdot \dfrac{a_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{a}_0}}{a_{\mathfrak{a}_0} - a_{\mathfrak{b}}}\, \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{b}}\, \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \right\}. \\ \qquad\qquad\qquad (\mathfrak{b} \gtrless \mathfrak{a}) \end{cases}$$

Von diesen Gleichungen gehen Nr. (1, 2, 3, 4, 5) aus (I, II, III) hervor, wenn man in diesen $R_1(x) = P(x)$ setzt; Nr. (6, 7, 8) sind die Relationen (IV.), wenn man $\gamma = \mathfrak{a}_0$ nimmt, und die unter Nr. (9.) finden sich unter (XXVII.) des v. §. und (V.). Sie stellen, wie man sofort übersieht, so viel Relationen unter den Functionen $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha$, $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\alpha\beta}$ und den ersten Differential-Coefficienten von $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha$ dar, als nöthig sind, um alle diese Gröfsen algebraisch durch

$$\mathrm{al}(u_1, \ldots)_1 \qquad \mathrm{al}(u_1, \ldots)_2 \qquad \ldots \qquad \mathrm{al}(u_1, \ldots)_\varrho$$

(an deren Stelle je ϱ andere der Functionen $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha$ treten könnten) auszudrücken, ohne dafs in den betreffenden Formeln die Argumente u_1, u_2, ..., u_ϱ selbst vorkommen; woraus unmittelbar weiter folgt, dafs auch die höheren Differential-Coefficienten der *Abel*'schen Functionen algebraisch durch je ϱ der letztern ausdrückbar sein werden.

§. 6.

Die *Abel*'schen Integral-Functionen.

Das Integral

$$\int \left\{ \frac{F(x_1)dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{F(x_2)dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} + \cdots + \frac{F(x_\varrho)dx_\varrho}{\sqrt{R(x_\varrho)}} \right\},$$

wo $F(x)$ eine beliebige rationale Function von x bedeuten soll, geht, wenn man $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho, \sqrt{R(x_1)}, \sqrt{R(x_2)}, \ldots, \sqrt{R(x_\varrho)}$ vermittelst der Formeln des §. 4. durch $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ ausdrückt, in eine Function dieser Argumente über, welche man eine „*Abel'sche Integral-Function*" derselben nennen kann, und deren analytischer Charakter jetzt näher untersucht werden soll.

Man kann, wie weiter unten wird nachgewiesen werden, jede in der vorstehenden Formel enthaltene Function auf eine einzige zurückführen, die mit

$$\mathfrak{A}(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho) \quad \text{oder kürzer} \quad \mathfrak{A}(u_1, \ldots)$$

bezeichnet werden soll, und durch die folgende Gleichung

$$(1.) \qquad d\mathfrak{A}(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho) = \Sigma \tfrac{1}{2} \frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)} \cdot \frac{P(x_a)}{x_a - a} \cdot \frac{dx_a}{\sqrt{R(x_a)}}$$

definirt wird, mit der nähern Bestimmung, dafs $\mathfrak{A}(u_1, \ldots)$ den Werth Null erhalte, wenn $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ sämmtlich verschwinden. Die Constante a kann jeden beliebigen Werth haben, mit Ausnahme von $a_1, a_2, \ldots, a_{2\varrho+1}$, und auch das Zeichen der Wurzelgröfse $\sqrt{R(a)}$ willkührlich bestimmt werden. Ist es nöthig, a in die Bezeichnung der erklärten Function mit aufzunehmen, so soll dieselbe $\mathfrak{A}(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho; a)$ geschrieben werden.

Nimmt man zunächst die Gröfsen $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ so klein an, dafs nicht nur $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ in der Nähe von $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ sich befinden, und dieselben daher, so wie $\sqrt{R(x_1)}, \sqrt{R(x_2)}, \ldots, \sqrt{R(x_\varrho)}$ durch die unendlichen Reihen (4, 5) des §. 1. ausgedrückt werden können, sondern auch die Differenzen $x_1 - a_1, x_2 - a_2, \ldots, x_\varrho - a_\varrho$ dem absoluten Betrage nach kleiner als beziehlich $a - a_1, a - a_2, \ldots, a - a_\varrho$ sind; so erhält man, indem

$$\frac{P(x_a)}{x_a - a} = \frac{x_a - a_a}{x_a - a} \cdot \frac{P(x_a)}{x_a - a_a}$$

und

$$\frac{x_a - a_a}{x_a - a} = \frac{x_a - a_a}{a_a - a} \left\{ 1 + \left(\frac{x_a - a_a}{a - a_a} \right) + \left(\frac{x_a - a_a}{a - a_a} \right)^2 + \cdots \right\}$$

$$= \frac{Q(a_a) \cdot s_a^2}{(a_a - a) P'(a_a)} \left\{ 1 + \underset{m=1\ldots\infty}{\mathrm{S}} \left(\frac{Q(a_a)}{(a - a_a) P'(a_a)} \right)^m \cdot s_a^{2m} \right\},$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{P(x_a)}{x_a-a_a}\cdot\frac{dx_a}{\sqrt{R(x_a)}} = (1+(\mathfrak{a},\mathfrak{a})_1 s_a^2+(\mathfrak{a},\mathfrak{a})_2 s_a^4+\cdots)\,ds_a \quad (\S.\ 1.)$$

ist:

$$(2.)\qquad \mathfrak{A}(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho) = \frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)}\cdot\{\mathrm{S}_3+\mathrm{S}_5+\cdots+\mathrm{S}_{2m+1}+\cdots\}$$
$$= \frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)}\cdot\{\mathfrak{U}_3+\mathfrak{U}_5+\cdots+\mathfrak{U}_{2m+1}+\cdots\},$$

wo durch S_{2m+1} eine homogene ganze Function $(2m+1)$ten Grades von s_1, $s_2, \ldots, s_\varrho$ und durch $\mathfrak{U}_{2m+1}$ eine eben solche von $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ bezeichnet wird. Die Coefficienten von S_{2m+1}, $\mathfrak{U}_{2m+1}$ werden rational aus $a, a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ und den Coefficienten von $Q(x)$ zusammengesetzt; nach fallenden Potenzen von a entwickelt, fangen S_{2m+1}, $\mathfrak{U}_{2m+1}$ mit Gliedern an, die mit a^{-m} multiplicirt sind.

Nun aber findet, wenn man jetzt wieder unter

$$\begin{array}{ccc} u'_a, & u''_a, \ldots, & u_a^{(2\mu)} \\ x'_a, & x''_a, \ldots, & x_a^{(2\mu)} \\ \sqrt{R(x'_a)}, & \sqrt{R(x''_a)}, \ldots, & \sqrt{R(x_a^{(2\mu)})} \\ M(x), & N(x), & \varphi(x) \\ x_a, & \sqrt{R(x_a)} & \end{array}$$

dieselben Gröfsen versteht wie in §. 2, nach dem *Abel*'schen Theoreme nicht blofs die dort unter (6.) aufgestellte Gleichung Statt, sondern auch die folgende

$$(3.)\qquad \sum_a \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)}\cdot\frac{P(x'_a)}{x'_a-a}\cdot\frac{dx'_a}{\sqrt{R(x'_a)}}+\frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)}\cdot\frac{P(x''_a)}{x''_a-a}\cdot\frac{dx''_a}{\sqrt{R(x''_a)}}+\cdots\right\}$$
$$= \sum_a\left\{\tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)}\cdot\frac{P(x_a)}{x_a-a}\cdot\frac{dx_a}{\sqrt{R(x_a)}}\right\}+\tfrac{1}{2}\,d\log\left(\frac{M(a)P(a)+N(a)\sqrt{R(a)}}{M(a)P(a)-N(a)\sqrt{R(a)}}\right)$$

Werden daher

$$u_1^{(\mathfrak{p})},\quad u_2^{(\mathfrak{p})},\quad \ldots,\quad u_\varrho^{(\mathfrak{p})},$$

wo $\mathfrak{p}$ irgend eine der Zahlen $1, 2, \ldots, 2\mu$ bezeichnet, so klein angenommen, dafs die Reihen auf der rechten Seite der Gleichung (2.), wenn man darin diese Gröfsen an die Stelle von $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ setzt, convergiren, so hat man

$$(4.)\qquad \sum\left\{\tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)}\cdot\frac{P(x_a)}{x_a-a}\cdot\frac{dx_a}{\sqrt{R(x_a)}}\right\}$$
$$= d\mathfrak{A}(u'_1,\ldots)+d\mathfrak{A}(u''_1,\ldots)+\cdots+\tfrac{1}{2}\,d\log\left(\frac{M(a)P(a)-N(a)\sqrt{R(a)}}{M(a)P(a)+N(a)\sqrt{R(a)}}\right)$$

Jetzt setze man, wie in §. 4,

$$u'_a = u''_a = \cdots = u_a^{(2\mu)} = \frac{u_a}{2\mu}.$$

und nehme μ so grofs an, dafs nicht nur die unendlichen Reihen, welche in den dortigen Ausdrücken von $\mathrm{al}(u_1,\ldots)_1$, $\mathrm{al}(u_1,\ldots)_2$ u. s. w. und von $M(x, u_1, \ldots)$, $N(x, u_1, \ldots)$ vorkommen, convergent werden, sondern auch die für $\mathfrak{Al}\left(\frac{u_1}{2\mu}, \ldots\right)$; so verwandeln sich die Gröfsen

$$x_1,\quad x_2,\quad \ldots,\quad x_\varrho,\quad \sqrt{R(x_1)},\quad \sqrt{R(x_2)},\quad \ldots,\quad \sqrt{R(x_\varrho)}$$

der Gleichung (4.) in die durch die Gleichungen (III, XI) des genannten §. bestimmten; und es ergiebt sich durch Integration

$$(5.)\quad \mathfrak{Al}(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho) = 2\mu\mathfrak{Al}\left(\frac{u_1}{2\mu}, \frac{u_2}{2\mu}, \ldots, \frac{u_\varrho}{2\mu}\right) + \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{M(a, u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)P(a) - N(a, u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)\sqrt{R(a)}}{M(a, u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)P(a) + N(a, u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)\sqrt{R(a)}}\right)$$

Eine Constante ist nach der Integration nicht hinzuzufügen, indem die Function, deren Logarithmus in dieser Gleichung vorkommt, sich auf die Einheit reducirt, wenn u_1, u_2, ..., u_ϱ sämmtlich verschwinden, wie aus den unter (26, §. 2.) gegebenen Ausdrücken von $M(x)$, $N(x)$ zu ersehen ist.

Setzt man

$$(6.)\quad \frac{M(a, u_1, \ldots)P(a) - N(a, u_1, \ldots)\sqrt{R(a)}}{M(a, u_1, \ldots)P(a) + N(a, u_1, \ldots)\sqrt{R(a)}} \cdot e^{4\mu\mathfrak{Al}\left(\frac{u_1}{2\mu}, \ldots\right)} = \overline{\mathfrak{Al}}(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho),$$

so ist

$$(7.)\quad \mathfrak{Al}(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho) = \tfrac{1}{2}\log\overline{\mathfrak{Al}}(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho),$$

und es bezeichnet alsdann $\overline{\mathfrak{Al}}(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)$ eine eindeutige Function von u_1, u_2, ..., u_ϱ, welche, wenn für die absoluten Werthe dieser Veränderlichen irgend welche Gränzen festgesetzt werden, die sie nicht übersteigen sollen, in der Form eines Bruches ausdrückbar ist, dessen Zähler und Nenner nach ganzen positiven Potenzen von u_1, u_2, ..., u_ϱ in convergirende Reihen sich entwickeln lassen. Für hinlänglich kleine Werthe der Argumente hat man

$$(8.)\quad \overline{\mathfrak{Al}}(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho) = e^{2(\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_3 + \cdots + \mathfrak{U}_{2m+1} + \cdots)\frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)}},$$

woraus sich leicht erweisen läfst, ganz in derselben Weise, wie dies in §. 4. für die Functionen $\varphi(u_1,\ldots)_\alpha$ geschehen ist, dafs der Werth von $\overline{\mathfrak{Al}}(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)$, obwohl in dem Ausdrucke dieser Function, wie er durch die Formel (6.) gegeben ist, die Zahl μ vorkommt, dennoch von derselben ganz unabhängig ist. Man hat daher folgenden Satz:

Es giebt eine eindeutige Function $\overline{\mathfrak{Al}}(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)$ der unbeschränkt veränderlichen Gröfsen u_1, u_2, ..., u_ϱ, welche der Differential-Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\, d\log \mathfrak{A}l(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho) = \Sigma\left\{\tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)}\cdot\frac{P(x_a)}{x_a - a}\cdot\frac{dx_a}{\sqrt{R(x_a)}}\right\},$$

in der $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho, \sqrt{R(x_1)}, \sqrt{R(x_2)}, \ldots, \sqrt{R(x_\varrho)}$ *die durch die Gleichungen* (III, XI) *des* §. 4. *bestimmten Functionen von* $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ *sind, genügt und, wenn diese Veränderlichen sämmtlich verschwinden, den Werth* 1 *annimmt.*

Wenn nun $F(x)$ eine beliebige rationale Function von x ist, so kann man dieselbe stäts als ein Aggregat von Gliedern von der Form

$$\frac{A}{(x-a)^m} \text{ und } Bx^{m-1}$$

darstellen, wo m eine ganze positive Zahl, und A, B, a Constanten bedeuten. Mit Unterscheidung derjenigen Werthe von a, welche $R(a) = 0$ machen, von denen, bei welchen dies nicht der Fall ist, kann man daher als den allgemeinsten Ausdruck von $F(x)$ den folgenden annehmen

$$(9.)\quad F(x) = \sum_{\mathrm{m}=1\ldots m_1}\left\{\frac{\overset{1}{A}_{\mathrm{m}}}{(x-\overset{1}{a})^{\mathrm{m}}}\right\} + \sum_{\mathrm{m}=1\ldots m_2}\left\{\frac{\overset{2}{A}_{\mathrm{m}}}{(x-\overset{2}{a})^{\mathrm{m}}}\right\} + \cdots$$
$$+ \sum_{\mathrm{m}=1\ldots n_1}\left\{\frac{\overset{1}{B}_{\mathrm{m}}}{(x-a_1)^{\mathrm{m}}}\right\} + \sum_{\mathrm{m}=1\ldots n_2}\left\{\frac{\overset{2}{B}_{\mathrm{m}}}{(x-a_2)^{\mathrm{m}}}\right\} + \cdots$$
$$+ \sum_{\mathrm{m}=1\ldots n}\{C_{\mathrm{m}}x^{\mathrm{m}-1}\},$$

wo $m_1, m_2, \ldots, n, n_1, n_2, \ldots$ ganze positive Zahlen (Null ausgeschlossen) und $\overset{1}{A}_{\mathrm{m}}, \overset{2}{A}_{\mathrm{m}}, \ldots, \overset{1}{B}_{\mathrm{m}}, \overset{2}{B}_{\mathrm{m}}, \ldots, C_{\mathrm{m}}, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots$ Constanten bedeuten, und angenommen wird, dafs $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots$ nicht zu den Gröfsen $a_1, a_2, \ldots, a_{2\varrho+1}$, den Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$, gehören.

Nun ist

$$(10.)\quad d\frac{\sqrt{R(x)}}{(x-a)^{\mathrm{m}}} = \left(\tfrac{1}{2}\frac{R'(x)}{(x-a)^{\mathrm{m}}} - \mathrm{m}\frac{R(x)}{(x-a)^{\mathrm{m}+1}}\right)\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$
$$= \sum_{\mathrm{r}=0\ldots(2\varrho+1)}\left\{\left(\frac{\mathrm{r}}{2}-\mathrm{m}\right)R^{(\mathrm{r})}(a)\,(x-a)^{-\mathrm{m}+\mathrm{r}-1}\right\}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

wenn man

$$R(x) = \sum_{\mathrm{r}=0\ldots 2\varrho+1} R^{(\mathrm{r})}(a)\,(x-a)^{\mathrm{r}}$$

setzt. Da nun $R^{(0)}(a) = R(a)$ ist, so übersieht man aus dieser Formel so-

fort, dafs sich, wenn $R(a)$ nicht Null ist, indem man $\mathfrak{m}=1, 2, \ldots, m-1$ setzt,

$$(11.)\quad \frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{R(x)}} \text{ auf die Form } \left(\frac{G_0}{x-a}+G_1(x)\right)\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}+d\cdot\frac{G_2(x)\sqrt{R(x)}}{(x-a)^{m-1}}$$

wird bringen lassen, wo G_0 eine Constante, $G_1(x)$ und $G_2(x)$ aber ganze Functionen von x bedeuten, die erste vom $(2\varrho-1)$ten und die zweite vom $(m-2)$ten Grade, wobei man für $m=1$ $G_0=1$, $G_1(x)=0$, $G_2(x)=0$ hat.

Setzt man aber $a=a_\alpha$, so ist $R(a)=0$, nicht aber $(\frac{1}{2}-\mathfrak{m})R^{(1)}(a)$, und es erhellt aus der Formel (10.), wenn man jetzt $\mathfrak{m}=1, 2, \ldots, m$ nimmt, dafs man

$$(12.)\quad \frac{dx}{(x-a_\alpha)^m\sqrt{R(x)}} = \frac{G_1(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}+d\cdot\frac{G_2(x)\sqrt{R(x)}}{(x-a_\alpha)^m}$$

erhalten mufs, wo $G_1(x)$, $G_2(x)$ wieder ganze Functionen sind, die erste vom $(2\varrho-1)$ten und die andere vom $(m-1)$ten Grade. Namentlich hat man

$$(13.)\quad \frac{1}{2}\frac{R'(a_\alpha)\,dx}{(x-a_\alpha)\sqrt{R(x)}} = \left(\frac{1}{2}\frac{R'(x)}{x-a_\alpha}+\frac{1}{2}\frac{R'(a_\alpha)}{x-a_\alpha}-\frac{R(x)}{(x-a_\alpha)^2}\right)\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}-d\frac{\sqrt{R(x)}}{x-a_\alpha}$$

Ferner ist

$$d(x^{m-1}\sqrt{R(x)}) = \frac{(m-1)x^{m-2}R(x)+\frac{1}{2}x^{m-1}R'(x)}{\sqrt{R(x)}}\,dx$$

oder, wenn man

$$R(x) = \sum_{\mathfrak{r}=0\ldots 2\varrho+1} A_\mathfrak{r} x^{2\varrho+1-\mathfrak{r}}$$

setzt,

$$(14.)\quad d(x^{m-1}\sqrt{R(x)}) = \sum_{\mathfrak{r}=0\ldots 2\varrho+1}\left(\left(\varrho+m-\frac{\mathfrak{r}+1}{2}\right)A_\mathfrak{r}x^{2\varrho+m-\mathfrak{r}-1}\right)\frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

und man hat daher

$$(15.)\quad \frac{x^{2\varrho-1+m}\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{G_1(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}+d(G_2(x)\sqrt{R(x)}),$$

wo gleichfalls $G_1(x)$, $G_2(x)$ ganze Functionen sind, die erste vom $(2\varrho-1)$ten und die andere vom $(m-1)$ten Grade.

Aus den Formeln (11, 12, 15) folgt nun sofort, dafs sich

$$(16.)\quad \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} \text{ auf die Form } \left(\frac{\overset{1}{G}_0}{x-\overset{1}{a}}+\frac{\overset{2}{G}_0}{x-\overset{2}{a}}+\cdots\right)\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

$$+\frac{\overset{2\varrho-1}{G}(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}+d\left(\left(G_0(x)+\frac{G(x)}{R_0(x)H(x)}\right)\sqrt{R(x)}\right)$$

bringen läfst, wo $\overset{1}{G}_0$, $\overset{2}{G}_0$, ... Constanten,

$$H(x) = (x-\overset{1}{a})^{m_1-1}(x-\overset{2}{a})^{m_2-1}\ldots,$$
$$R_0(x) = (x-a_1)^{n_1}\ (x-a_2)^{n_2}\ \ldots,$$

und $\overset{2\varrho-1}{G}(x)$, $G(x)$, $G_0(x)$ ganze Functionen sind, von denen die erste von nicht höherem als dem $(2\varrho-1)$ten Grade, die zweite von einem niedrigern als $R_0(x)\ H(x)$ ist, und die dritte sich auf Null reducirt, wenn $n \leqq 2\varrho$, während sie vom $(n-2\varrho-1)$ten Grade ist, sobald $n > 2\varrho$.

Da man ferner

$$\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R(x)}} = \frac{P(x)}{P(a)}\cdot\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R(x)}} - \frac{P(x)-P(a)}{(x-a)P(a)}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

hat, wo $\frac{P(x)-P(a)}{x-a}$ eine ganze Function $(\varrho-1)$ten Grades ist, und man, wenn $f(x)$ eine Function $(2\varrho-1)$ Grades bedeutet,

$$f(x) = f_1(x)P(x)+f_2(x)$$

setzen kann, wo $f_1(x)$, $f_2(x)$ beide vom $(\varrho-1)$ten Grade sind, und

$$f_2(x) = \Sigma\frac{f_2(a_\mathfrak{b})}{P'(a_\mathfrak{b})}\cdot\frac{P(x)}{x-a_\mathfrak{b}}$$

ist; so erhellt, dafs man dem Differential $\frac{F(x)dx}{\sqrt{R(x)}}$ auch die Form

$$(17.)\quad \frac{F(x)dx}{\sqrt{R(x)}} = F_1\frac{\sqrt{R(\overset{1}{a})}}{2P(\overset{1}{a})}\cdot\frac{P(x)}{x-\overset{1}{a}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + F_2\frac{\sqrt{R(\overset{2}{a})}}{2P(\overset{2}{a})}\cdot\frac{P(x)}{x-\overset{2}{a}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots$$
$$+\sum_{\mathfrak{b}=1\ldots\varrho}\Big(\tfrac{1}{2}G_\mathfrak{b}\frac{x^{\mathfrak{b}-1}P(x)dx}{\sqrt{R(x)}}\Big) + \sum_{\mathfrak{b}=1\ldots\varrho}\Big(\tfrac{1}{2}H_\mathfrak{b}\frac{P(x)}{x-a_\mathfrak{b}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}\Big)$$
$$+d\Big\{\Big(G_0(x)+\frac{G(x)}{R_0(x)H(x)}\Big)\sqrt{R(x)}\Big\}$$

geben kann, wo F_1, F_2, ..., $G_\mathfrak{b}$, $H_\mathfrak{b}$ Constanten bedeuten.

Nun folgt aus der Gleichung (1.)

$$(18.)\quad \sum_\alpha\Big\{\tfrac{1}{2}\frac{x_\alpha^{\mathfrak{b}-1}P(x_\alpha)dx_\alpha}{\sqrt{R(x_\alpha)}}\Big\} = d\Big[\frac{-P(a)}{\sqrt{R(a)}}\mathfrak{A}(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)\Big]_{a^{-\mathfrak{b}}},$$

wo $\Big[\frac{-P(a)}{\sqrt{R(a)}}\mathfrak{A}(u_1,\ldots)\Big]_{a^{-\mathfrak{b}}}$ den Coefficienten von $a^{-\mathfrak{b}}$ in derjenigen Entwicklung der eingeklammerten Gröfse, welche für sehr grofse Werthe von a gilt, bezeichnet. Aus den Formeln (2, 6) ersieht man, dafs dieser Coefficient (indem

$$\frac{N(a, u_1, \ldots)}{M(a, u_1, \ldots)}\cdot\frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)} = 0 \text{ wird für } a = \infty, \text{ und}$$

man daher für alle Werthe von a, die ihrem absoluten Betrage nach eine gewisse Gränze übersteigen,

$$\frac{P(a)}{2\sqrt{R(a)}}\log\left(\frac{M(a,u_1,\ldots)P(a)-N(a,u_1,\ldots)\sqrt{R(a)}}{M(a,u_1,\ldots)P(a)+N(a,u_1,\ldots)\sqrt{R(a)}}\right)$$
$$= -\underset{\mathfrak{m}=0\ldots\infty}{\mathrm{S}}\left\{\frac{1}{2\mathfrak{m}+1}\left(\frac{N(a,u_1,\ldots)}{M(a,u_1,\ldots)}\right)^{2\mathfrak{m}+1}\left(\frac{Q(a)}{P(a)}\right)^{\mathfrak{m}}\right\}$$

hat, so wie auch (nach (2.))

$$\frac{2\mu P(a)}{\sqrt{R(a)}}\mathfrak{A}\mathfrak{l}\left(\frac{u_1}{2\mu},\ldots\right) = 2\mu\underset{\mathfrak{m}=0\ldots\infty}{\mathrm{S}}\left(\mathfrak{U}\left(a,\frac{u_1}{2\mu},\ldots\right)_{2\mathfrak{m}+3}\right),$$

und die in Beziehung auf a rationalen Functionen

$$\left(\frac{N(a,u_1,\ldots)}{M(a,u_1,\ldots)}\right)^{2\mathfrak{m}+1}\left(\frac{Q(a)}{P(a)}\right)^{\mathfrak{m}}, \qquad \mathfrak{U}\left(a,\frac{u_1}{2\mu},\ldots\right)_{2\mathfrak{m}+3},$$

wenn man sie nach fallenden Potenzen von a entwickelt, beide mit einem Gliede anfangen, welches mit $a^{-\mathfrak{m}-1}$ multiplicirt ist) ***eine eindeutige ungerade Function von $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ ist, welche für alle Werthe dieser Gröfsen, die ihrem absoluten Betrage nach beliebig festgesetzte Gränzen nicht überschreiten, als Quotient zweier, nach ganzen positiven Potenzen derselben entwickelbare Reihen dargestellt werden kann.***

Berücksichtigt man ferner, dafs

$$\Sigma(f(x_\mathfrak{a})\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}) = -\Sigma f(x_\mathfrak{a})\psi(x_\mathfrak{a}),$$

wenn $f(x)$ eine beliebige rationale Function von x ist, rational durch die Coefficienten von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ dargestellt werden kann; so ergiebt sich, wenn man

$$(19.)\qquad \left[\frac{-P(a)}{\sqrt{R(a)}}\mathfrak{A}\mathfrak{l}(u_1,\ldots)\right]_{a^{-\mathfrak{b}}} = \mathfrak{A}\mathfrak{l}^{(\mathfrak{b})}(u_1,u_2,\ldots,u_\varrho)$$

setzt, aus (17.)

$$(20.)\quad \int\Sigma\frac{F(x_\mathfrak{a})dx_\mathfrak{a}}{\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}} = F_1\mathfrak{A}\mathfrak{l}(u_1,u_2,\ldots,u_\varrho;\overset{1}{a}) + F_2\mathfrak{A}\mathfrak{l}(u_1,u_2,\ldots,u_\varrho;\overset{2}{a}) + \cdots$$
$$+\Sigma(G_\mathfrak{b}\mathfrak{A}\mathfrak{l}^{(\mathfrak{b})}(u_1,u_2,\ldots,u_\varrho)+H_\mathfrak{b}u_\mathfrak{b})$$
$$+\mathfrak{F}(\mathrm{al}(u_1,\ldots)_\mathfrak{a},\overline{\mathrm{al}}(u_1,\ldots)_\mathfrak{a}),$$

wo $\mathfrak{F}$ eine rationale Function von $\mathrm{al}(u_1,\ldots)_1$, $\overline{\mathrm{al}}(u_1,\ldots)_1$ u. s. w. bedeutet. Man sieht also, dafs in der That, wie oben bemerkt worden, *eine jede Abel'sche Integral-Function auf die mit $\mathfrak{A}\mathfrak{l}(u_1,u_2,\ldots,u_\varrho)$ bezeichnete, zurückgeführt werden kann.*

Es ist in (§. 4.) bei Herleitung der dortigen Gleichung (8.) die Formel

$$\varphi'(x_a)\,dx_a = -2\sum_b \frac{\varphi(a_b)\sqrt{R(x_a)}}{(x_a-a_b)P'(a_b)}\,du_b,$$

oder

$$\tfrac{1}{2}\frac{dx_a}{\sqrt{R(x_a)}} = -\sum_b \frac{\varphi(a_b)}{P'(a_b)}\cdot\frac{du_b}{(x_a-a_b)\varphi'(x_a)}$$

gefunden worden. Diese Gleichung werde mit $\frac{P(x_a)}{x_a-a}$ auf beiden Seiten multiplicirt, so findet sich, wenn man dann in Beziehung auf a summirt,

$$\sum \tfrac{1}{2}\frac{P(x_a)}{x_a-a}\cdot\frac{dx_a}{\sqrt{R(x_a)}} = -\sum_{a,b}\frac{\varphi(a_b)}{P'(a_b)}\cdot\frac{P(x_a)\,du_b}{(x_a-a)(x_a-a_b)\varphi'(x_a)}$$

Nun ist aber

$$\frac{P(x)}{(x-a)\varphi(x)} = \frac{P(a)}{(x-a)\varphi(a)} + \sum\frac{P(x_a)}{(x_a-a)(x-x_a)\varphi'(x_a)},$$

und daher für $x = a_b$

$$\sum_a \frac{P(x_a)}{(x_a-a)(x_a-a_b)\varphi'(x_a)} = -\frac{P(a)}{(a-a_b)\varphi(a)}$$

Mithin

$$\sum\tfrac{1}{2}\frac{P(x_a)}{x_a-a}\cdot\frac{dx_a}{\sqrt{R(x_a)}} = \sum\frac{P(a)}{\varphi(a)}\cdot\frac{\varphi(a_b)}{P'(a_b)}\cdot\frac{du_b}{a-a_b},$$

oder auch, wenn man jetzt auf der rechten Seite a statt b schreibt,

$$(21.)\quad \sum\tfrac{1}{2}\frac{P(x_a)}{x_a-a}\cdot\frac{dx_a}{\sqrt{R(x_a)}} = \sum\frac{P(a)}{\varphi(a)}\cdot\frac{\varphi(a_a)}{P'(a_a)}\cdot\frac{du_a}{a-a_a}$$
$$= \frac{\sum\left\{-\frac{Q(a_a)}{P'(a_a)}\cdot\frac{\mathrm{al}^2(u_1,\ldots)_a\,du_a}{a-a_a}\right\}}{1-\sum\left\{\frac{Q(a_a)}{P'(a_a)}\cdot\frac{\mathrm{al}^2(u_1,\ldots)_a}{a-a_a}\right\}}$$

Hieraus folgt

$$(22.)\quad \frac{\partial\mathfrak{A}\mathfrak{l}(u_1,u_2,\ldots,u_\varrho)}{\partial u_b} = \frac{\sqrt{R(a)}}{(a-a_b)P(a)}\cdot\frac{\frac{-Q(a_b)}{P'(a_b)}\,\mathrm{al}^2(u_1,\ldots)_b}{1-\sum\left\{\frac{Q(a_a)}{P'(a_a)}\cdot\frac{\mathrm{al}^2(u_1,\ldots)_a}{a-a_a}\right\}}$$

Ferner ersieht man aus der Gleichung (21.), dafs die partiellen Differential-Coëfficienten von $\mathfrak{A}\mathfrak{l}^{(1)}(u_1,\ldots)$, $\mathfrak{A}\mathfrak{l}^{(2)}(u_1,\ldots)$ u. s. w. rationale und ganze Functionen von $\mathrm{al}(u_1,\ldots)_1$, $\mathrm{al}(u_1,\ldots)_2$, ... $\mathrm{al}(u_1,\ldots)_\varrho$ sind. Namentlich hat man

$$(23.)\quad \frac{\partial\mathfrak{A}\mathfrak{l}^{(1)}(u_1,u_2,\ldots,u_\varrho)}{\partial u_a} = \frac{Q(a_a)}{P'(a_a)}\,\mathrm{al}^2(u_1,u_2,\ldots,u_\varrho)_a,$$

so dafs man die Gleichung (III.) des §. 4, deren Wurzeln die Gröfsen x_1, $x_2, \ldots, x_\varrho$ sind, auch folgendermafsen

$$(24.) \qquad \Sigma\left\{\frac{\partial\, \mathfrak{Al}^{(1)}(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)}{(x-a_a)\,\partial u_a}\right\} = 1$$

ausdrücken kann. Auf diese merkwürdige Form der in Rede stehenden Gleichung werde ich später noch zurückkommen.

Zweites Kapitel.

Einige allgemeine Betrachtungen über die Darstellung eindeutiger analytischer Functionen durch Reihen; Digression über die elliptischen Transcendenten.

§. 7.

Die im vorhergehenden Kapitel durchgeführten Untersuchungen haben hauptsächlich den Zweck, für die Functionen

$$\mathrm{al}(u_1, \ldots)_a \qquad \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{a\beta} \qquad \mathfrak{Al}(u_1, \ldots; a) \qquad \mathfrak{Al}^{(a)}(u_1, \ldots),$$

durch welche sich, wie gezeigt worden ist, alle *Abel*'schen Transcendenten ausdrücken lassen, zu einer völlig bestimmten, auf beliebige Werthe von u_1, $u_2, \ldots, u_\varrho$ anwendbare *Erklärung* zu führen, und die analytische Form derselben in so weit festzustellen, als hierfür und zum Behufe der weitern Entwicklungen erforderlich ist. Die in §. 4. und §. 6. gegebenen Formeln genügen für *diesen* Zweck zwar vollständig, nicht aber, wenn verlangt wird, die genannten Gröfsen in einer ihrem wahren analytischen Charakter entsprechenden, für alle Werthe der Argumente $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ unverändert dieselbe bleibenden Form darzustellen. Diese bleibt vielmehr noch zu ermitteln.

Der Umstand, dafs die unendlichen Reihen, welche in den Formeln (IV, XIII, §. 4) und (6, §. 6) vorkommen, für um so gröfsere Werthe von $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ convergent bleiben, je gröfser man die Zahl μ annimmt, begründet die Vermuthung, es werde sich jede derselben, wenn $\mu = \infty$ gesetzt wird, in eine für *alle* Werthe der genannten Veränderlichen convergirende Reihe verwandeln, und sich auf diese Weise eine Darstellung der in Rede stehenden Functionen in der gesuchten Form ergeben. Es dürfte vielleicht möglich sein, durch eine genauere Untersuchung jener Reihen die Richtigkeit dieser Vermuthung strenge zu erweisen; ich gehe jedoch hierauf nicht ein,

weil man, wenn es auch gelänge, dadurch noch nicht dahin kommen würde, für jede *einzelne* der beiden Functionen, als deren Quotient alsdann irgend eine *Abel*'sche Function sich darstellen liefse, eine analytische Definition zu gewinnen. Es tritt uns hier vielmehr eine Aufgabe entgegen, welche, so viel ich weifs, noch nicht allgemein behandelt worden, und doch für die Theorie der Functionen von besonderer Wichtigkeit ist.

Die einfachsten transcendenten Functionen sind solche, welche sich nach ganzen positiven Potenzen ihrer Argumente in *beständig* convergirende Reihen entwickeln lassen und somit im Wesentlichen den Charakter der *ganzen* rationalen Functionen besitzen. Nach ihnen kommen diejenigen, welche aus mehreren dieser Art in rationaler Weise zusammengesetzt und daher als Quotienten aus zweien dargestellt werden können. Man kann sie als transcendente Gröfsen vom Charakter der *gebrochenen* rationalen Functionen bezeichnen.

Oftmals aber ist eine Function in der Art definirt — und so verhält es sich, der vorhergehenden Darstellung nach, mit den *Abel*'schen — dafs zwar die Möglichkeit gegeben ist, sobald jedes ihrer Argumente auf einen endlichen, übrigens beliebig grofs anzunehmenden Bereich heschränkt wird, dieselbe in der Gestalt eines Bruches, dessen Zähler und Nenner nach ganzen positiven Potenzen der Argumente entwickelte Reihen sind, auszudrücken, während eine *stäts* gültig bleibende Darstellungsform noch unbekannt ist. Angenommen nun, es sei eine derartige Function durch eine (algebraische) Differential-Gleichung definirt, (oder auch im Vereine mit andern durch mehrere solche), so kann man untersuchen, ob sie vielleicht zu den gebrochenen rationalen, in dem eben erklärten Sinne, gehöre. Hierfür aber reichen die gewöhnlichen Entwicklungs-Methoden nicht aus. Es handelt sich dann darum, zu entscheiden, ob man, nachdem in die gegebene Differential-Gleichung statt der gesuchten Function ein Bruch, dessen Zähler und Nenner noch zu bestimmende Gröfsen sind, eingeführt worden, dieselbe in zwei andere, aus denen sie wieder folgt, so zerfällt werden könne, dafs die genannten Gröfsen beide den Charakter einer ganzen Function erhalten. Dazu kann man in vielen Fällen mit Hülfe eines allgemeinen Satzes gelangen, der verdient, bei dieser Gelegenheit entwickelt zu werden.

Wenn $f(u)$ eine Function von u ist, welche durch eine nur ganze positive Potenzen dieser Veränderlichen enthaltende und beständig convergirende Reihe dargestellt werden kann, so wird der Differential-Quotient

$$\frac{\partial^\lambda \log f(u)}{\partial u^\lambda},$$

wo λ eine ganze positive Zahl bezeichnet, nur für solche Werthe von u unendlich grofs, bei denen $f(u)$ verschwindet. Es sei a einer dieser Werthe, so kann man setzen

$$f(a+k) = gk^m + g_1 k^{m+1} + \cdots,$$

wo m eine ganze positive Zahl bedeutet und g nicht Null ist, und hat also

$$\log f(a+k) = m \log k + \log g + \frac{g_1}{g} k + \cdots,$$

wo die nicht hingeschriebenen Glieder nur positive ganze Potenzen von k enthalten; woraus folgt

$$\left(\frac{\partial^\lambda \log f(u)}{\partial u^\lambda}\right)_{u=a+k} = m \frac{\partial^\lambda \log k}{\partial k^\lambda} + \{\text{Glieder mit nur positiven ganzen Potenzen von } k\},$$

welche Reihe convergirt, sobald der absolute Betrag von k kleiner ist als eine gewisse Gröfse, auf deren nähere Bestimmung es nicht ankommt. Dieselbe Darstellung gilt aber auch für jeden andern Werth von a; nur ist dann $m = 0$.

Dieser Satz läfst sich nun in folgender Weise umkehren.

Theorem.

Wenn eine eindeutige Function $F(u)$ der unbeschränkt veränderlichen Gröfse u die Eigenschaft besitzt, dafs

$$F(a+k),$$

wo a irgend einen besondern Werth von u, k aber eine Veränderliche bezeichnet, für hinlänglich kleine Werthe der letztern in eine convergirende Reihe von der Form

$$m \frac{\partial^\lambda \log k}{\partial k^\lambda} + \underset{m=0\ldots\infty}{\mathrm{S}} h_m k^m,$$

wo m entweder Null oder eine ganze positive Zahl bedeuten soll, entwickelbar ist; so läfst sich eine beständig convergirende Reihe

$$f_0 u^\mu + f_1 u^{\mu+1} + \cdots + f_m u^{\mu+m} + \cdots = f(u),$$

in der μ den zu $a = 0$ gehörigen Werth von m bezeichnet, dergestalt be-

stimmen, dafs

$$\frac{\partial^\lambda \log f(u)}{\partial u^\lambda} = F(u)$$

ist. Und zwar erhält man den allgemeinsten Ausdruck von $f(u)$, indem man, unter der Voraussetzung, dafs für hinlänglich kleine Werthe von u

$$F(u) = \mu \frac{\partial^\lambda \log u}{\partial u^\lambda} + \underset{\mathrm{m}=0\ldots\infty}{\mathrm{S}} F_\mathrm{m} u^\mathrm{m}$$

gefunden sei, die Formel

$$u^\mu e^{\mathrm{S}\left\{\frac{F_\mathrm{m} u^{\lambda+\mathrm{m}}}{(\mathrm{m}+1)\ldots(\mathrm{m}+\lambda)}\right\} + C_0 + C_1 u + \ldots + C_{\lambda-1} u^{\lambda-1}},$$

in der C_0, C_1, ..., $C_{\lambda-1}$ willkührliche Constanten bezeichnen, nach Potenzen von u entwickelt, wenn auch die dabei gebrauchte Reihe

$$\mathrm{S}\left\{\frac{F_\mathrm{m} u^{\lambda+\mathrm{m}}}{(\mathrm{m}+1)\cdots(\mathrm{m}+\lambda)}\right\}$$

nicht für alle Werthe von u convergirt.

Beweis.

Es seien a_1, a_2, ..., a_σ unter den Werthen von u, für welche $F(u)$ unendlich grofs wird, diejenigen, die ihrem absoluten Betrage nach kleiner als eine beliebig angenommene Gröfse U sind, den Werth Null, wenn er auch zu denselben gehört, ausgeschlossen. Es ist leicht zu erweisen, dafs es nur eine endliche Anzahl solcher Werthe geben kann. Denn sonst müfste sich in dem angegebenen Bereiche von u wenigstens *ein* Werth a finden, in dessen Nähe eine unbegränzte Menge derselben vorhanden wäre. Dann aber liefse sich $F(a+k)$, wie klein auch k angenommen werde, nicht nach ganzen Potenzen dieser Gröfse in eine convergirende Reihe entwickeln, die, wie doch vorausgesetzt wird, nur eine endliche Zahl Glieder mit negativen Potenzen von k enthält. Bezeichnet man nun mit m_1, m_2, ..., m_σ die zu a_1, a_2, ..., a_σ gehörigen Werthe der Zahl m in den Entwicklungen von

$$F(a_1+k), \quad F(a_2+k), \quad \ldots, \quad F(a_\sigma+k),$$

und setzt

$$u^\mu\left(1-\frac{u}{a_1}\right)^{m_1}\left(1-\frac{u}{a_2}\right)^{m_2}\cdots\left(1-\frac{u}{a_\sigma}\right)^{m_\sigma} = \pi(u),$$

so hat man nach dem oben Bemerkten

$$\left(\frac{\partial^\lambda \log \pi(u)}{\partial u^\lambda}\right)_{u=a+k} = m\frac{\partial^\lambda \log k}{\partial k^\lambda} + \{\text{Glieder mit ganzen positiven Potenzen von } k\},$$

wo $m = \mu, m_1, m_2, \ldots, m_\sigma$ ist für $a = 0, a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$, und Null für jeden andern Werth von a. Setzt man daher

$$F(u) - \frac{\partial^\lambda \log \pi(u)}{\partial u^\lambda} = F_1(u),$$

so ist $F_1(a+k)$ bei jedem Werthe von a, dessen absoluter Betrag kleiner als U ist, in eine nur ganze positive Potenzen von k enthaltende Reihe entwickelbar. Daraus folgt, dafs $F_1(u)$, so lange der absolute Betrag von u unterhalb der genannten Gränze bleibt, stäts einen endlichen Werth hat und sich continuirlich mit u ändert. Dasselbe gilt von $\frac{\partial F_1(u)}{\partial u}$ (so wie von den höhern Differential-Coefficienten dieser Function). Nach einem *Cauchy*'schen Satze läfst sich daher $F_1(u)$ für alle jene Werthe von u durch eine convergirende Reihe

$$\underset{m=0..\infty}{\mathrm{S}} G_a u^m$$

darstellen. Wird daher

$$f_1(u) = \pi(u) e^{\mathrm{S}\left\{\frac{G_m u^{\lambda+m}}{(m+1)\ldots(m+\lambda)}\right\}}$$

gesetzt, so ist $f_1(u)$ in eine, jedenfalls für dieselben Werthe von u convergirende Reihe von der Form

$$f_1(u) = u^\mu + \underset{m=0..\infty}{\overset{1}{\mathrm{S}}} f_m u^{\lambda+m}$$

entwickelbar, *) und man hat

$$\frac{\partial^\lambda \log f_1(u)}{\partial u^\lambda} = \frac{\partial^\lambda \log \pi(u)}{\partial u^\lambda} + F_1(u) = F(u)$$

Nun kann man aber, wenn u dem absoluten Betrage nach kleiner als jede der Gröfsen $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ ist, $F(u)$ durch eine convergirende Reihe

$$\mu \frac{\partial^\lambda \log u}{\partial u^\lambda} + \mathrm{S} F_m u^m$$

ausdrücken, wo μ Null oder eine ganze positive Zahl ist. Nimmt man daher für $f(u)$ die aus der Entwicklung des Ausdrucks

$$u^\mu e^{\mathrm{S}\left\{\frac{F_m u^{\lambda+m}}{(m+1)\ldots(m+\lambda)}\right\} + C_0 + C_1 u + \ldots + C_{\lambda-1} u^{\lambda-1}}$$

hervorgehende Reihe, so convergirt dieselbe sicher bei den eben genannten

*) S. die Sätze des §. 7. der Abhandlung über die Facultäten

Werthen von u, und man hat für dieselben

$$\frac{\partial^\lambda \log f(u)}{\partial u^\lambda} = F(u),$$

und mithin auch

$$\frac{\partial^\lambda \log f(u)}{\partial u^\lambda} = \frac{\partial^\lambda \log f_1(u)}{\partial u^\lambda},$$

woraus durch Integration

$$\log f(u) = \log f_1(u) + C'_0 + C'_1 u + \cdots + C'_{\lambda-1} u^{\lambda-1},$$

$$f(u) = f_1(u).e^{C'_0 + C'_1 u + \cdots + C'_{\lambda-1} u^{\lambda-1}}$$

folgt, wo C'_0, C'_1, ..., $C'_{\lambda-1}$ gleich C_0, C_1, ..., $C_{\lambda-1}$ Constanten sind, und aus den für $f(u)$ und $f_1(u)$ aufgestellten Ausdrücken sofort erhellt, dafs man, wenn

$$\log\left(\frac{\pi(u)}{u^\mu}\right) = c_1 u + c_2 u^2 + \cdots$$

ist,

$$C'_0 + C'_1 u + \cdots + C'_{\lambda-1} u^{\lambda-1} = C_0 + C_1 u + \cdots + C_{\lambda-1} u^{\lambda-1} - c_1 u - \cdots - c_{\lambda-1} u^{\lambda-1}$$

hat. Der Exponential-Factor in dem vorstehenden Ausdrucke von $f(u)$ läfst sich aber nach Potenzen von u in eine beständig convergirende Reihe entwickeln; folglich mufs auch das Product aus derselben und der Reihe für $f_1(u)$, das heifst die mit $f(u)$ bezeichnete Reihe convergiren, sobald der absolute Werth von u kleiner als U ist. Aber U kann beliebig grofs angenommen werden, während die Coefficienten von $f(u)$ stäts dieselben bleiben, welchen Werth auch U haben möge. Mithin mufs die Reihe für $f(u)$ eine *beständig* convergirende sein, wenn auch die bei der Bildung ihrer Coefficienten gebrauchte

$$\mathrm{S}\left\{\frac{F_m u^{\lambda+m}}{(m+1)\cdots(m+\lambda)}\right\}$$

es nicht ist.

Zugleich sieht man aus der vorhergehenden Darstellung, dafs die aufgestellte Formel den allgemeinsten Ausdruck der Function $f(u)$ liefert. Denn gesetzt, es sei $f_0(u)$ irgend eine andere, welche auch der Differential-Gleichung

$$\frac{\partial^\lambda \log f_0(u)}{\partial u^\lambda} = F(u)$$

genügt, so mufs, wie gezeigt,

$$f_0(u) = f(u) e^{\chi(u)}$$

sein, wo $\chi(u)$ eine ganze Function $(\lambda-1)$ten Grades bedeutet, wonach $f_0(u)$ in dem für $f(u)$ gegebenen Ausdrucke mit einbegriffen ist.

Anmerkung. Hätte die Function $F(u)$ nicht für *alle* Werthe von u, sondern nur für alle dem absoluten Betrage nach unterhalb einer gewissen Gränze liegenden, die angegebenen Eigenschaften; so folgt aus dem vorstehenden Beweise, dafs die auf die angezeigte Weise gebildete Reihe $f(u)$ jedenfalls für die bezeichneten Werthe von u convergent sein und der Differential-Gleichung $\frac{\partial^\lambda f(u)}{\partial u^\lambda} = F(u)$ genügen würde.

Der bewiesene Satz kann nun, wenn zwischen zwei veränderlichen Gröfsen x und u eine algebraische Differential-Gleichung besteht, dazu gebraucht werden, um zu entscheiden, ob sich wirklich x als eine Function von u, die den Charakter einer ganzen oder gebrochenen rationalen hat, betrachten lasse, und um, wenn das Letztere der Fall ist, zur Bestimmung des Zählers und des Nenners *zwei* Differential-Gleichungen zu ermitteln. Denn immer wird sich aus der gegebenen Differential-Gleichung für irgend einen λten Differential-Coefficienten von $\log x$ ein Ausdruck von der Form

$$\frac{\partial^\lambda \log x}{\partial u^\lambda} = F\left(u, x, \frac{\partial x}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial^{\lambda-1} x}{\partial u^\lambda}\right)$$

herleiten lassen, wo F eine rationale Function von x, $\frac{\partial x}{\partial u}$ u. s. w. bezeichnen soll, deren Coefficienten Constanten oder eindeutige analytische Functionen von u sind. Wenn nun x in der Gestalt

$$\frac{f_1(u)}{f_2(u)},$$

wo unter $f_1(u)$, $f_2(u)$ zwei nach ganzen positiven Potenzen von u in beständig convergirende Reihen entwickelbare Functionen zu verstehen sind, darstellbar sein soll, so mufs, indem dann

$$\frac{\partial^\lambda \log x}{\partial u^\lambda} = \frac{\partial^\lambda \log f_1(u)}{\partial u^\lambda} - \frac{\partial^\lambda \log f_2(u)}{\partial u^\lambda}$$

ist, F sich auf die Form $F_1 - F_2$ in der Art bringen lassen, dafs F_1, F_2 Functionen von der in dem aufgestellten Satze beschriebenen Art sind. Gelingt es nun, F in dieser Weise umzuformen, wo denn im Allgemeinen F_1, F_2 Functionen von u, x, $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\cdots$, $\frac{\partial^{\lambda-1} x}{\partial u^{\lambda-1}}$ sein werden, und der Nachweis, dafs sie die in Rede stehende Beschaffenheit haben, mit Hülfe dessen, was hinsichtlich des zwischen x und u bestehenden Abhängigkeits-Verhältnisses aus der gegebenen Differential-Gleichung folgt, oder sonst bekannt ist,

geliefert werden mufs; so kann man

$$\frac{\partial^\lambda \log f_1(u)}{\partial u^\lambda} = F_1 \qquad \frac{\partial^\lambda \log f_2(u)}{\partial u^\lambda} = F_2$$

setzen, und dann, indem man für x diejenige Entwicklung nach Potenzen von u sucht, welche für hinlänglich kleine Werthe von u gilt, und hierauf die entsprechenden Entwicklungen von F_1, F_2 ausführt, die Reihen für $f_1(u)$, $f_2(u)$ in der beschriebenen Weise bilden — oder man kann auch, in F_1, F_2 $\frac{f_1(u)}{f_2(u)}$ statt x einführend, aus den so sich ergebenden Gleichungen die Coefficienten der gesuchten Reihen, deren Form und beständige Convergenz ja bereits vor ihrer Entwicklung feststeht, nach irgend einer passenden Methode ableiten; worauf man bei gehöriger Constanten-Bestimmung $x = \frac{f_1(u)}{f_2(u)}$ haben wird.

Wenn man im Stande ist, von der Gröfse x vor ihrer Entwicklung nachzuweisen, dafs sie eine eindeutige Function von u ist, welche sich für alle in der Nähe eines beliebigen besondern Werthes a liegenden Werthe dieses Arguments durch eine convergirende Reihe von der Form

$$A_0(u-a)^\mu + A_1(u-a)^{\mu+1} + A_2(u-a)^{\mu+2} + \cdots,$$

wo μ eine ganze (positive oder negative) Zahl bedeutet, ausdrücken läfst; genügt es, F als die Differenz zweier andern ähnlich gebildeten Ausdrücke F_1, F_2 darzustellen, von denen sich zeigen läfst, dafs der erste nur für solche Werthe von x unendlich grofs werde, bei denen $x=0$, der andere nur für diejenigen, bei denen $x=\infty$ wird — und man kann überzeugt sein, *dafs die aus den Gleichungen*

$$\frac{\partial^\lambda \log f_1(u)}{\partial u^\lambda} = F_1 \qquad \frac{\partial^\lambda \log f_2(u)}{\partial u^\lambda} = F_2$$

auf die beschriebene Weise für $f_1(u)$, $f_2(u)$ sich ergebenden Reihen beständig convergent sein werden.

Denn bei der angenommenen Beschaffenheit von x hat man für jeden Werth von a

$$\left(\frac{\partial^\lambda \log x}{\partial u^\lambda}\right)_{u=a+k} = \pm m \frac{\partial^\lambda \log k}{\partial k^\lambda} + \{\text{Glieder mit nur ganzen positiven Potenzen von } k\}$$
$$= F_1(a+k) - F_2(a+k),$$

wo m eine ganze positive Zahl ist, wenn für $u=a$ $x=0$ oder $=\infty$ wird, und das obere Zeichen im ersten, das untere im andern Falle gilt, während

man $m=0$ für jeden andern Werth von a hat. Ferner geben F_1, F_2, wenn man in denselben $u=a+k$ setzt und nach Potenzen von k entwickelt, Reihen mit nur ganzen Potenzen von k, wobei jedoch, da F_1 und F_2 für keinen Werth von u beide unendlich grofs werden, niemals in beiden zugleich negative Potenzen von k vorkommen können. Daher folgt aus der vorstehenden Gleichung, wenn $F_1(a)=\infty$ ist, (indem man mit (k) eine Reihe von der Form $h_0+h_1k+h_2k^2+\cdots$ andeutet)

$$F_1(a+k)=m\frac{\partial^\lambda \log k}{\partial k^\lambda}+(k), \qquad F_2(a+k)=(k);$$

und wenn $F_2(a)=\infty$,

$$F_2(a+k)=m\frac{\partial^\lambda \log k}{\partial k^\lambda}+(k), \qquad F_1(k)=(k),$$

während man für jeden andern Werth von a

$$F_1(a+k)=(k), \qquad F_2(a+k)=(k)$$

hat. Es besitzen also $F_1(u)$, $F_2(u)$ die bei dem entwickelten Satze für die Function $F(u)$ vorausgesetzte Beschaffenheit.

Wenn sich nur nachweisen liefse, dafs man x für alle Werthe von u, die dem absoluten Betrage nach unterhalb einer gewissen Gränze liegen, als eine Function dieser Veränderlichen von der angegebenen Beschaffenheit anzusehen habe; so würde man, in der beschriebenen Weise verfahrend, zu einer jedenfalls für alle jene Werthe von u geltenden Darstellung von x gelangen.

Sind für mehrere Functionen x_1, x_2, ... von u eben so viele algebraische Differential-Gleichungen gegeben, so kann man bei deren Entwicklung in ganz ähnlicher Weise verfahren. Auch ist es möglich, in dem Falle, wo es sich um Functionen von mehr als einem Argumente handelt, die Untersuchung auf den hier betrachteten zurückzuführen, wie dies an dem Beispiel der *Abel*'schen Functionen wird gezeigt werden. Ich halte es jedoch für zweckmäfsig, zuvor die Fruchtbarkeit des im Vorhergehenden entwickelten Princips für die Darstellung der eindeutigen Functionen in seiner Anwendung auf die *elliptischen* Transcendenten klar zu machen.

§. 8.

Zur Theorie der elliptischen Functionen.

Die in (§. 1—4.) behandelten Differential-Gleichungen reduciren sich für $\rho=1$ auf eine einzige, und zwar, wenn man in diesem Falle u, x statt

u_1, x_1 schreibt, und

$$A_0 = \frac{1}{a_2 - a_1}$$

nimmt, so dafs man

$$(1.)\quad R(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{a_2-a_1},\quad P(x) = x - a_1,\quad Q(x) = \frac{(x-a_2)(x-a_3)}{a_2-a_1}$$

hat, auf die folgende

$$(2.)\qquad du = \tfrac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

Nach den Schlufsformeln des §. 4. kann man, bei der Annahme, dafs $x = a_1$ werde für $u = 0$, die erstere Gröfse in der Form

$$(3.)\qquad x = a_1 + (a_2 - a_1)\,\mathrm{al}^2(u)_1$$

ausdrücken, wo $\mathrm{al}(u)_1$ eine eindeutige Function des unbeschränkt veränderlichen Arguments u bezeichnet, wobei dann

$$(4.)\qquad \sqrt{R(x)} = (a_2 - a_1)\,\mathrm{al}(u)_1 \frac{\partial\, \mathrm{al}(u)_1}{\partial u}$$

zu nehmen ist, und man ferner

$$(5.)\quad \begin{cases} a_2 - x = (a_2 - a_1)\,\mathrm{al}^2(u)_2, & a_3 - x = (a_3 - a_1)\,\mathrm{al}^2(u)_3, \\ \mathrm{al}^2(u)_2 = 1 - \mathrm{al}^2(u)_1, & \mathrm{al}^2(u)_3 = 1 - \dfrac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1}\,\mathrm{al}^2(u)_1 \end{cases}$$

hat, wo $\mathrm{al}(u)_2$, $\mathrm{al}(u)_3$ Functionen derselben Art wie $\mathrm{al}(u)_1$ sind. Für hinlänglich kleine Werthe von u haben $\mathrm{al}(u)_1$, $\mathrm{al}(u)_2$, $\mathrm{al}(u)_3$ die Form

$$(6.)\quad \begin{cases} \mathrm{al}(u)_1 = u + f_1 u^3 + f_2 u^5 + \cdots + f_m u^{2m-1} + \cdots \\ \mathrm{al}(u)_2 = 1 + g_1 u^2 + g_2 u^4 + \cdots + g_m u^{2m} + \cdots \\ \mathrm{al}(u)_3 = 1 + h_1 u^2 + h_2 u^4 + \cdots + h_m u^{2m} + \cdots, \end{cases}$$

wo die Coefficienten der unendlichen Reihen rational aus a_1, a_2, a_3 (welche Gröfsen beliebige complexe Werthe haben können) zusammengesetzt werden. Und wenn man für den absoluten Betrag von u irgend eine beliebig anzunehmende Gränze, die er nicht überschreiten soll, festsetzt, so kann man $\mathrm{al}(u)_1$, $\mathrm{al}(u)_2$, $\mathrm{al}(u)_3$ in der Form

$$(7.)\quad \begin{cases} \mathrm{al}(u)_1 = \dfrac{u + F_1 u^3 + \cdots + F_m u^{2m-1} + \cdots}{1 + E_1 u^2 + \cdots + E_m u^{2m} + \cdots} \\ \mathrm{al}(u)_2 = \dfrac{1 + G_1 u^2 + \cdots + G_m u^{2m} + \cdots}{1 + E_1 u^2 + \cdots + E_m u^{2m} + \cdots} \\ \mathrm{al}(u)_3 = \dfrac{1 + H_1 u^2 + \cdots + H_m u^{2m} + \cdots}{1 + E_1 u^2 + \cdots + E_m u^{2m} + \cdots} \end{cases}$$

ausdrücken, wo die unendlichen Reihen

$$u+F_1u^3+\cdots,\quad 1+G_1u^2+\cdots,\quad 1+H_1u^2+\cdots,\quad 1+E_1u^2+\cdots,$$

deren Coefficienten gleichfalls rational aus a_1, a_2, a_3 zusammengesetzt werden, für alle Werthe von u innerhalb des auf die angegebene Weise begränzten Bereiches convergiren.

Dieses vorausgesetzt werde die Gleichung (2.) auf die Form

$$(8.)\qquad \left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 4R(x)$$

gebracht, so folgt

$$(9.)\qquad \frac{d^2x}{du^2} = 2R'(x),$$

$$(10.)\qquad \frac{(x-a_1)d^2x-dx\,dx}{2(x-a_1)^2du^2} = \frac{R'(x)}{x-a_1}-\frac{2R(x)}{(x-a_1)^2}$$

Aber

$$\frac{R'(x)}{x-a_1} = \frac{R'(a_1)}{x-a_1}+R''(a_1)+\tfrac{1}{2}R'''(a_1)(x-a_1)$$

$$-\frac{2R(x)}{(x-a_1)^2} = \frac{-2R'(a_1)}{x-a_1}-R''(a_1)-\tfrac{1}{3}R'''(a_1)(x-a_1),$$

und daher, indem $R'''(a_1)=\dfrac{6}{a_3-a_1}$ ist,

$$(11.)\qquad \tfrac{1}{2}\frac{d^2\log(x-a_1)}{du^2} = \frac{x-a_1}{a_3-a_1}-\frac{R'(a_1)}{x-a_1}$$

Nimmt man a_2, a_3 statt a_1, so erhält man ebenso

$$(12.)\qquad \tfrac{1}{2}\frac{d^2\log(x-a_2)}{du^2} = \frac{x-a_2}{a_3-a_1}-\frac{R'(a_2)}{x-a_2} = \frac{x-a_1}{a_3-a_1}-\frac{R'(a_2)}{x-a_2}-\frac{a_2-a_1}{a_3-a_1}$$

$$(13.)\qquad \tfrac{1}{2}\frac{d^2\log(x-a_3)}{du^2} = \frac{x-a_3}{a_3-a_1}-\frac{R'(a_3)}{x-a_3} = \frac{x-a_1}{a_3-a_1}-\frac{R'(a_3)}{x-a_3}-1$$

Führt man nun in diese Gleichungen $\mathrm{al}(u)_1$, $\mathrm{al}(u)_2$, $\mathrm{al}(u)_3$ ein, und setzt

$$(14.)\qquad \frac{a_2-a_1}{a_3-a_1}=k^2,\quad \frac{a_3-a_2}{a_3-a_1}=1-k^2,$$

so finden sich, indem

$$R'(a_1)=a_2-a_1,\quad R'(a_2)=\frac{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}{a_3-a_1}=-(a_2-a_1)(1-k^2),$$
$$R'(a_3)=(a_3-a_2)=(a_3-a_1)(1-k^2)$$

ist, die folgenden

$$(15.)\quad \frac{d^2 \log \mathrm{al}(u)_1}{du^2} = k^2 \mathrm{al}^2(u)_1 - \frac{1}{\mathrm{al}^2(u)_1} \qquad = -\frac{1}{\mathrm{al}^2(u)_1} - (-k^2 \mathrm{al}^2(u)_1)$$

$$(16.)\quad \frac{d^2 \log \mathrm{al}(u)_2}{du^2} = k^2 \mathrm{al}^2(u)_1 - \frac{1-k^2}{\mathrm{al}^2(u)_2} - k^2 = -\frac{\mathrm{al}^2(u_3)}{\mathrm{al}^2(u)_2} - (-k^2 \mathrm{al}^2(u)_1)$$

$$(17.)\quad \frac{d^2 \log \mathrm{al}(u)_3}{du^2} = k^2 \mathrm{al}^2(u)_1 + \frac{1-k^2}{\mathrm{al}^2(u)_3} - 1 = -\frac{k^2 \mathrm{al}^2(u)_2}{\mathrm{al}^2(u)_3} - (-k^2 \mathrm{al}^2(u)_1)$$

Indem nun

$-\frac{1}{\mathrm{al}^2(u)_1} = \infty$ wird nur für solche Werthe von u, die $\mathrm{al}^2(u)_1 = 0$ machen,

und

$-k^2 \mathrm{al}^2(u)_1 = \infty$ - - - - - - u; die $\mathrm{al}^2(u)_1 = \infty$ - ,

so kann man, nach dem im vorhergehenden §. bewiesenen Lehrsatze, zwei Functionen $\mathrm{Al}(u)$, $\mathrm{Al}(u)_1$, *die sich nach ganzen positiven Potenzen von u in beständig convergirende Reihen entwickeln lassen,* bestimmen, welche die Gleichungen

$$(18.)\quad \frac{d^2 \log \mathrm{Al}(u)}{du^2} = -k^2 \mathrm{al}^2(u)_1$$

$$(19.)\quad \frac{d^2 \log \mathrm{Al}(u)_1}{du^2} = -\frac{1}{\mathrm{al}^2(u)_1}$$

befriedigen. Ebenso giebt es, weil

$-k^2 \mathrm{al}^2(u)_1 = k^2(\mathrm{al}^2(u)_2 - 1) = \infty$ wird nur für solche Werthe von u,
für die $\mathrm{al}^2(u)_2 = \infty$ ist,

$-\frac{1-k^2}{\mathrm{al}^2(u)_2} - k^2 = \infty$ wird nur für solche Werthe von u,
für die $\mathrm{al}^2(u)_2 = 0$ ist,

und

$-k^2 \mathrm{al}^2(u)_1 = \mathrm{al}^2(u)_3 - 1 = \infty$ wird nur für solche Werthe von u,
für die $\mathrm{al}^2(u)_3 = \infty$ ist,

$\frac{1-k^2}{\mathrm{al}^2(u)_3} - 1 = \infty$ wird nur für solche Werthe von u,
für die $\mathrm{al}^2(u)_3 = 0$ ist,

noch zwei Functionen $\mathrm{Al}(u)_2$, $\mathrm{Al}(u)_3$ von derselben Art wie $\mathrm{Al}(u)$, $\mathrm{Al}(u)_1$, welche den Gleichungen

$$(20.)\quad \frac{d^2 \log \mathrm{Al}(u)_2}{du^2} = -\frac{1-k^2}{\mathrm{al}^2(u)_2} - k^2 = -\frac{\mathrm{al}^2(u)_3}{\mathrm{al}^2(u)_2}$$

$$(21.)\quad \frac{d^2 \log \mathrm{Al}(u)_3}{du^2} = \frac{1-k^2}{\mathrm{al}^2(u)_3} - 1 = -\frac{k^2 \mathrm{al}^2(u)_2}{\mathrm{al}^2(u)_3}$$

genügen. Um dieselben darzustellen hat man die Functionen auf der rechten Seite dieser 4 Differential-Gleichungen nach Potenzen von u in Reihen zu entwickeln, die bei hinlänglich kleinen Werthen von u convergiren, wodurch man, nach den Formeln (6.),

$$(22.)\quad \begin{cases} -k^2\,\mathrm{al}^2(u)_1 = \mathrm{S}\,P_m u^{2m+2}, & -\dfrac{1}{\mathrm{al}^2(u)_1} = -\dfrac{1}{u^2} + \mathrm{S}\,P'_m u^{2m}, \\ -\dfrac{1-k^2}{\mathrm{al}^2(u)_2} - k^2 = \mathrm{S}\,P''_m u^{2m}, & \dfrac{1-k^2}{\mathrm{al}^2(u)_3} - 1 = \mathrm{S}\,P'''_m u^{2m} \\ \qquad\qquad m=0\ldots\infty \end{cases}$$

erhält; und kann dann für $\mathrm{Al}(u)$, $\mathrm{Al}(u)_1$, $\mathrm{Al}(u)_2$, $\mathrm{Al}(u)_3$ die aus der Entwicklung der Ausdrücke

$$(23.)\quad \begin{cases} e^{\mathrm{S}\left\{\frac{P_m u^{2m+4}}{(2m+3)(2m+4)}\right\}}, & u e^{\mathrm{S}\left\{\frac{P'_m u^{2m+2}}{(2m+1)(2m+2)}\right\}} \\ e^{\mathrm{S}\left\{\frac{P''_m u^{2m+2}}{(2m+1)(2m+2)}\right\}}, & e^{\mathrm{S}\left\{\frac{P'''_m u^{2m+2}}{(2m+1)(2m+2)}\right\}} \end{cases}$$

hervorgehenden Reihen nehmen. Dann ist

$$(24.)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\log\mathrm{al}(u)_1}{du^2} = \dfrac{d^2\log\mathrm{Al}(u)_1}{du^2} - \dfrac{d^2\log\mathrm{Al}(u)}{du^2} \\ \dfrac{d^2\log\mathrm{al}(u)_2}{du^2} = \dfrac{d^2\log\mathrm{Al}(u)_2}{du^2} - \dfrac{d^2\log\mathrm{Al}(u)}{du^2} \\ \dfrac{d^2\log\mathrm{al}(u)_3}{du^2} = \dfrac{d^2\log\mathrm{Al}(u)_3}{du^2} - \dfrac{d^2\log\mathrm{Al}(u)}{du^2}, \end{cases}$$

aus welchen Gleichungen man, mit Berücksichtigung des Umstandes, dafs in den Entwicklungen von

$$\frac{\mathrm{Al}(u)_1}{\mathrm{Al}(u)},\quad \frac{\mathrm{Al}(u)_2}{\mathrm{Al}(u)},\quad \frac{\mathrm{Al}(u)_3}{\mathrm{Al}(u)}$$

nach Potenzen von u die Coefficienten von u^0 und u^1 dieselben sein müssen wie in den Reihen (6) für $\mathrm{al}(u)_1$, $\mathrm{al}(u)_2$, $\mathrm{al}(u)_3$,

$$(25.)\quad \mathrm{al}(u)_1 = \frac{\mathrm{Al}(u)_1}{\mathrm{Al}(u)} \qquad \mathrm{al}(u)_2 = \frac{\mathrm{Al}(u)_2}{\mathrm{Al}(u)} \qquad \mathrm{al}(u)_3 = \frac{\mathrm{Al}(u)_3}{\mathrm{Al}(u)}$$

erhält. Man sieht also, *dafs man für* $\mathrm{al}(u)_1$, $\mathrm{al}(u)_2$, $\mathrm{al}(u)_3$, *sobald nur feststeht, dafs sie eindeutige analytische Functionen von u, in dem oben angegebenen Sinne, sind, unmittelbar aus den Differential-Gleichungen, durch welche sie definirt werden, zu Darstellungen gelangen kann, die für alle Werthe von u ihre Gültigkeit behalten.*

Führt man die gefundenen Ausdrücke von $\mathrm{al}(u)_1$, $\mathrm{al}(u)_2$, $\mathrm{al}(u)_3$ in die Gleichungen (18—21) ein, so verwandeln sich dieselben in die folgenden:

$$(26.)\quad \begin{cases} \mathrm{Al}(u)\dfrac{d^2\mathrm{Al}(u)}{du^2}-\dfrac{d\mathrm{Al}(u)}{du}\cdot\dfrac{d\mathrm{Al}(u)}{du}+k^2\mathrm{Al}^2(u)_1=0\\ \mathrm{Al}(u)_1\dfrac{d^2\mathrm{Al}(u)_1}{du^2}-\dfrac{d\mathrm{Al}(u)_1}{du}\cdot\dfrac{d\mathrm{Al}(u)_1}{du}+\mathrm{Al}^2(u)=0\\ \mathrm{Al}(u)_2\dfrac{d^2\mathrm{Al}(u)_2}{du^2}-\dfrac{d\mathrm{Al}(u)_2}{du}\cdot\dfrac{d\mathrm{Al}(u)_2}{du}+\mathrm{Al}^2(u)_3=0\\ \mathrm{Al}(u)_3\dfrac{d^2\mathrm{Al}(u)_3}{du^2}-\dfrac{d\mathrm{Al}(u)_3}{du}\cdot\dfrac{d\mathrm{Al}(u)_3}{du}+k^2\mathrm{Al}^2(u)_2=0, \end{cases}$$

wobei zu bemerken ist, dafs in Folge der Relationen (5.)

$$(27.)\quad \mathrm{Al}^2(u)_2=\mathrm{Al}^2(u)-\mathrm{Al}^2(u)_1,\qquad \mathrm{Al}^2(u)_3=\mathrm{Al}^2(u)-k^2\mathrm{Al}^2(u)_1$$

ist. Berücksichtigt man nun, dafs die Reihen für $\mathrm{Al}(u)$ u. s. w. nach den Formeln (23.) die Gestalt

$$(28.)\quad \begin{cases} \mathrm{Al}(u) &= 1+A_2u^4+\cdots+A_mu^{2m}+\cdots\\ \mathrm{Al}(u)_1 &= u+B_1u^3+\cdots+B_mu^{2m+1}+\cdots\\ \mathrm{Al}(u)_2 &= 1+C_1u^2+\cdots+C_mu^{2m}+\cdots\\ \mathrm{Al}(u)_3 &= 1+D_1u^2+\cdots+D_mu^{2m}+\cdots \end{cases}$$

haben, so ist ersichtlich, dafs die Gleichungen (26.) zur Bestimmung der Coefficienten dieser Reihen hinreichen, und dafs dieselben ganze Functionen von k^2 mit rationalen Zahl-Coefficienten sind.

Aus den Gleichungen (1—5) folgt noch, wenn man

$$\mathrm{al}(u)_1 = \sqrt{\left(\frac{x-a_1}{a_2-a_1}\right)} = \xi$$

setzt,

$$(29.)\quad \mathrm{al}(u)_2=\sqrt{(1-\xi^2)},\qquad \mathrm{al}(u)_3=\sqrt{(1-k^2\xi^2)}$$

und

$$(30.)\quad \begin{cases} \dfrac{d\,\mathrm{al}(u)_1}{du} = \mathrm{al}(u)_2\,\mathrm{al}(u)_3\\ \dfrac{d\,\mathrm{al}(u)_2}{du} = -\mathrm{al}(u)_1\,\mathrm{al}(u)_3\\ \dfrac{d\,\mathrm{al}(u)_3}{du} = -k^2\,\mathrm{al}(u)_1\,\mathrm{al}(u)_2\\ du = \dfrac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}\sqrt{(1-k^2\xi^2)}} \end{cases}$$

Es sind also

$$\mathrm{al}(u)_1\quad \mathrm{al}(u)_2\quad \mathrm{al}(u)_3$$

die von ***Jacobi*** mit

$$\sin \mathrm{am}\, u \qquad \cos \mathrm{am}\, u \qquad \Delta\, \mathrm{am}\, u,$$

und von ***Gudermann*** mit

$$\mathrm{sn}\, u \qquad \mathrm{cn}\, u \qquad \mathrm{dn}\, u$$

bezeichneten *elliptischen Functionen.* Nach der vorstehenden Darstellung ist man im Stande, nicht nur gleich im Eingange der Theorie von denselben eine allgemeine, gleichmäfsig auf alle reellen und imaginären Werthe des Arguments wie des Moduls sich erstreckende Definition zu geben, sondern sie auch sofort wirklich zu entwickeln, und zwar in einer stäts gültig bleibenden und den wahren analytischen Charakter dieser Gröfsen klar hervortreten lassenden Form. Dadurch ist aber für die weitere Theorie derselben eine sichere Grundlage gewonnen, und namentlich die Schwierigkeit beseitigt, welche bei dem gewöhnlichen Verfahren, wenn man $\sin \mathrm{am}\, u$ vermittelst der Gleichung

$$u = \int_0^{\sin \mathrm{am}\, u} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}\sqrt{(1-k^2\xi^2)}}$$

definirt, aus der *Vieldeutigkeit* eines Integrals von dieser Form entspringt. Nachdem nämlich $\sin \mathrm{am}\, u$ als eine eindeutige Function von u erkannt ist, hält es nicht schwer, den richtigen Sinn, in welchem die vorstehende Gleichung aufzufassen ist, festzustellen. Hierauf gehe ich aber hier nicht näher ein, indem dieser Gegenstand weiter unten für die *Abel*'schen Functionen überhaupt zur Sprache kommen mufs. Dagegen möge schon jetzt erwähnt werden, dafs von den Functionen $\mathrm{Al}(u)$ u. s. w. aus ein directer Weg zu den *Jacobi*'schen Θ Functionen führt, sowie überhaupt zu allen Darstellungen der elliptischen Transcendenten, die auf deren periodischem Verhalten beruhen.

Bei den Entwicklungen dieses §. habe ich, mit Rücksicht darauf, dafs sie vorbereitend für die folgenden sein sollen, die für die *Abel*'schen Functionen überhaupt gewonnenen und aus dem *Abel*'schen Theoreme hervorgehenden Ergebnisse der bisherigen Untersuchungen vorausgesetzt. Es beruht aber die Anwendbarkeit des im vorhergehenden §. begründeten Entwicklungs-Verfahrens auf die Differential-Gleichung

$$du = \tfrac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

wesentlich nur darauf, dafs vorher *Zweierlei* festgestellt sein mufs. Zunächst

ist zu zeigen, dafs sich für hinlänglich kleine Werthe von u

$$\sqrt{\left(\frac{x-a_1}{a_2-a_1}\right)}, \quad \sqrt{\left(\frac{a_2-x}{a_2-a_1}\right)}, \quad \sqrt{\left(\frac{a_3-x}{a_3-a_1}\right)}$$

in Reihen von der unter (6.) aufgestellten Gestalt entwickeln lassen, und dann mufs die Möglichkeit nachgewiesen werden, Ausdrücke von der Form

$$\frac{p}{s}, \quad \frac{q}{s}, \quad \frac{r}{s}$$

in denen p, q, r, s ähnlich gestaltete, für alle Werthe von u, die ihrem absoluten Betrage nach eine willkührlich angenommene Gränze nicht übersteigen, convergirende Reihen sein sollen, in der Art zu bestimmen, dafs sie nach Potenzen von u entwickelt in jene drei Reihen übergehen. Denn dies reicht hin, um die Existenz eindeutiger analytischer Functionen $\text{al}(u)_1$, $\text{al}(u)_2$, $\text{al}(u)_3$, durch welche x und $\sqrt{R(x)}$ in der durch die Formeln (3, 4, 5) angegebenen Weise ausgedrückt werden können, zu erweisen. *Beides läfst sich nun in der That durch blofse Betrachtung der aufgestellten Differential-Gleichung in aller Strenge bewerkstelligen; und man kann daher, unmittelbar von dieser Gleichung aus, ohne irgend eine andere Eigenschaft der elliptischen Functionen als bekannt vorauszusetzen, und blofs mit Hülfe allgemeiner Entwicklungs-Principien, zu der hier gegebenen Darstellung dieser Transcendenten gelangen.* Ich kann jedoch dieses, wie es mir scheint, wichtige Ergebnifs hier nicht näher begründen, gedenke aber später darauf zurückzukommen, wenn es mir, was bisher noch nicht vollständig der Fall war, gelingen sollte, für die *Abel*'schen Functionen aller Ordnungen ein ähnliches Resultat zu erhalten. Es möge aber, da man bei den elliptischen Functionen so mancherlei Methoden versucht hat, erlaubt sein, bei dieser Gelegenheit noch ein anderes Verfahren anzudeuten, welches ich in einer bereits im Jahre 1840 verfafsten Prüfungsarbeit zur Entwicklung derselben angewandt habe, und das mir so einfach und elementar zu sein scheint, als man nur wünschen kann.

§. 9.

Fortsetzung.

Ausgehend von den Differential-Gleichungen

$$(1.) \quad \frac{d\xi}{du} = \eta\zeta, \quad \frac{d\eta}{du} = -\xi\zeta, \quad \frac{d\zeta}{du} = -k^2\xi\eta,$$

welche, wenn man noch hinzufügt, dafs für $u=0$, $\xi=0$, $\eta=1$, $\zeta=1$

sein sollen, zu den folgenden

$$(2.)\qquad du = \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}\sqrt{(1-k^2\xi^2)}},\qquad \sqrt{(1-\xi^2)} = \eta,\quad \sqrt{(1-k^2\xi^2)} = \zeta$$

führen, kann man ξ, η, ζ zunächst in der Form gewöhnlicher Potenzreihen

(3.) $\xi = u + f_1 u^3 + \cdots$, $\eta = 1 + g_1 u^2 + \cdots$, $\zeta = 1 + h_1 u^2 + \cdots$ (S. Gl. 6 d. v. §.)

entwickeln, deren Coefficienten ganze Functionen von k^2 sind. Es ist leicht nachzuweisen, dafs dieselben für alle Werthe von u, deren absoluter Betrag unter einer gewissen Gröfse U, deren genauere Kenntnifs nicht erforderlich ist, bleibt, unbedingt convergiren. Beschränkt man nun u zunächst auf diese Werthe, so stellen die Reihen eindeutige Functionen von u dar, die jetzt nach *Gudermann* mit

$$\operatorname{sn} u \qquad \operatorname{cn} u \qquad \operatorname{dn} u$$

bezeichnet werden mögen.

Nun hat man die Formeln herzuleiten, vermittelst welcher, wenn

$$u = v + w$$

ist,

$\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ durch $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$, $\operatorname{sn} w$, $\operatorname{cn} w$, $\operatorname{dn} w$

ausgedrückt werden können, nämlich

$$(4.)\qquad \begin{cases} \operatorname{sn} u = \dfrac{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w + \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v \operatorname{sn} w}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 v \operatorname{sn}^2 w} \\ \operatorname{cn} u = \dfrac{\operatorname{cn} v \operatorname{cn} w - \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v \operatorname{sn} w \operatorname{dn} w}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 v \operatorname{sn}^2 w} \\ \operatorname{dn} u = \dfrac{\operatorname{dn} v \operatorname{dn} w - k^2 \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{sn} w \operatorname{cn} w}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 v \operatorname{sn}^2 w}, \end{cases}$$

wobei vorläufig u, v, w alle drei dem absoluten Betrage nach kleiner als U vorauszusetzen sind. Aus denselben übersieht man sofort, auch ohne die Rechnung auszuführen, dafs man, wenn m eine ganze positive Zahl bedeutet, $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ rational durch $\operatorname{sn}\left(\frac{u}{m}\right)$, $\operatorname{cn}\left(\frac{u}{m}\right)$, $\operatorname{dn}\left(\frac{u}{m}\right)$ ausdrücken kann, in der Form

$$(5.)\qquad \operatorname{sn} u = \frac{P}{S}\qquad \operatorname{cn} u = \frac{Q}{S}\qquad \operatorname{dn} u = \frac{R}{S},$$

wo P, Q, R, S ganze Functionen von $\operatorname{sn}\left(\frac{u}{m}\right)$, $\operatorname{cn}\left(\frac{u}{m}\right)$ und $\operatorname{dn}\left(\frac{u}{m}\right)$ bedeuten. Man kann ferner leicht nachweisen, dafs S und auch P^2, Q^2, R^2 ganze Functionen von $\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{m}\right)$ sind, und dafs sie, als solche betrachtet, keinen ge-

meinschaftlichen Factor haben. (S. ***Abel,*** Précis etc. §. 4, und ***Gudermann,*** Theor. d. Modular-F. §. 149.) Aus den Gleichungen

$$(6.)\quad \begin{cases} \frac{d\,\mathrm{sn}\,u}{du} = \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u, & \frac{d\,\mathrm{cn}\,u}{du} = -\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u, \quad \frac{d\,\mathrm{dn}\,u}{du} = -k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u \\ \mathrm{sn}^2u + \mathrm{cn}^2u = 1, & k^2\mathrm{sn}^2u + \mathrm{dn}^2u = 1 \end{cases}$$

leitet man sodann die Ausdrücke für $\frac{d^2\log\mathrm{sn}\,u}{du^2}$ u. s. w. ab (s. Gl. 15, 16, 17 d. v. §.), und führt in dieselben P, Q, R, S ein, wodurch man

$$(7.)\qquad \frac{d^2\log P}{du^2} + \frac{S^2}{P^2} = \frac{d^2\log Q}{du^2} + \frac{R^2}{Q^2} = \frac{d^2\log R}{du^2} + \frac{k^2Q^2}{R^2} = \frac{d^2\log S}{du^2} + \frac{k^2P^2}{S^2}$$

erhält. Setzt man

$$\frac{d^2\log P}{du^2} = \frac{P_1}{P^2}, \qquad \frac{d^2\log Q}{du^2} = \frac{Q_1}{Q^2}, \qquad \frac{d^2\log R}{du^2} = \frac{R_1}{R^2}, \qquad \frac{d^2\log S}{du^2} = \frac{S_1}{S^2},$$

so ist zunächst S_1 eine ganze Function von $\mathrm{sn}^2\left(\frac{u}{m}\right)$, indem S, $\left(\frac{d\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{u}{m}\right)}{du^2}\right)^2$, $\frac{d^2\mathrm{sn}^2\left(\frac{u}{m}\right)}{du^2}$ solche sind, und dann zeigen die vorstehenden Gleichungen (7.), dafs $\frac{d^2\log P}{du^2}$, $\frac{d^2\log Q}{du^2}$, $\frac{d^2\log R}{du^2}$ rationale, und daher P_1, Q_1, R_1 ganze Functionen von $\mathrm{sn}^2\left(\frac{u}{m}\right)$ sind. Die Gleichungen

$$\frac{P_1+S^2}{P^2} = \frac{Q_1+R^2}{Q^2} = \frac{R_1+k^2Q^2}{R^2} = \frac{S_1+k^2P^2}{S^2}$$

lehren dann, indem P^2, Q^2, R^2, S^2 keinen gemeinschaftlichen Factor haben, dafs in diesen Ausdrücken die Zähler durch die Nenner theilbar sind, und der Quotient eine ganze Function von $\mathrm{sn}^2\left(\frac{u}{m}\right)$ ist. Die Kenntnifs des letztern ist nicht unumgänglich erforderlich; man findet aber, wenn man den Grad von P^2 und von S^2 bestimmt und dann von den Entwicklungen der Ausdrücke $\frac{1}{2}\frac{d^2\log P^2}{du^2} + \frac{S^2}{P^2}$, $\frac{1}{2}\frac{d^2\log S^2}{du^2} + \frac{k^2P^2}{S^2}$ nach steigenden und fallenden Potenzen von $\mathrm{sn}^2\left(\frac{u}{m}\right)$ blofs die Anfangsglieder mit einander vergleicht, dafs derselbe $k^2\mathrm{sn}^2\left(\frac{u}{m}\right)$ ist. Man hat daher

$$(8.)\quad\begin{cases}\dfrac{d^2\log P}{du^2}+\dfrac{1}{\operatorname{sn}^2 u}-k^2\operatorname{sn}^2\left(\dfrac{u}{m}\right)=0\\[2mm] \dfrac{d^2\log Q}{du^2}+\dfrac{\operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 u}-k^2\operatorname{sn}^2\left(\dfrac{u}{m}\right)=0\\[2mm] \dfrac{d^2\log R}{du^2}+\dfrac{k^2\operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 u}-k^2\operatorname{sn}^2\left(\dfrac{u}{m}\right)=0\\[2mm] \dfrac{d^2\log S}{du^2}+k^2\operatorname{sn}^2 u-k^2\operatorname{sn}^2\left(\dfrac{u}{m}\right)=0\end{cases}$$

Bildet man nun, ganz so wie im vorhergehenden §., die 4 Functionen $\mathrm{Al}(u)$, $\mathrm{Al}(u)_1$, $\mathrm{Al}(u)_2$, $\mathrm{Al}(u)_3$, so dafs man

$$(9.)\quad\begin{cases}\dfrac{d^2\log\mathrm{Al}(u)}{du^2}+k^2\operatorname{sn}^2 u=0, & \dfrac{d^2\log\mathrm{Al}(u)_1}{du^2}+\dfrac{1}{\operatorname{sn}^2 u}=0,\\[2mm] \dfrac{d^2\log\mathrm{Al}(u)_2}{du^2}+\dfrac{\operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 u}=0, & \dfrac{d^2\log\mathrm{Al}(u)_3}{du^2}+\dfrac{k^2\operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 u}=0\end{cases}$$

hat, so geben die Gleichungen (8.)

$$(10.)\quad\begin{cases}\dfrac{d^2\log P}{du^2}=\dfrac{d^2\log\mathrm{Al}(u)_1}{du^2}-m^2\dfrac{d^2\log\mathrm{Al}\left(\frac{u}{m}\right)}{du^2}\\[3mm] \dfrac{d^2\log Q}{du^2}=\dfrac{d^2\log\mathrm{Al}(u)_2}{du^2}-m^2\dfrac{d^2\log\mathrm{Al}\left(\frac{u}{m}\right)}{du^2}\\[3mm] \dfrac{d^2\log R}{du^2}=\dfrac{d^2\log\mathrm{Al}(u)_3}{du^2}-m^2\dfrac{d^2\log\mathrm{Al}\left(\frac{u}{m}\right)}{du^2}\\[3mm] \dfrac{d^2\log S}{du^2}=\dfrac{d^2\log\mathrm{Al}(u)}{du^2}-m^2\dfrac{d^2\log\mathrm{Al}\left(\frac{u}{m}\right)}{du^2}\end{cases}$$

Hieraus aber folgt, mit Rücksicht auf die ersten Glieder in den Reihen-Entwicklungen der vorkommenden Gröfsen,

$$(11.)\quad\begin{cases}\mathrm{Al}(u)_1=\mathrm{Al}^{mm}\left(\dfrac{u}{m}\right)\cdot P & \mathrm{Al}(u)_2=\mathrm{Al}^{mm}\left(\dfrac{u}{m}\right)\cdot Q\\[2mm] \mathrm{Al}(u)_3=\mathrm{Al}^{mm}\left(\dfrac{u}{m}\right)\cdot R & \mathrm{Al}(u)=\mathrm{Al}^{mm}\left(\dfrac{u}{m}\right)\cdot S,\end{cases}$$

und somit (gemäfs 5)

$$(12.)\quad \operatorname{sn}u=\frac{\mathrm{Al}(u)_1}{\mathrm{Al}(u)}\qquad \operatorname{cn}u=\frac{\mathrm{Al}(u)_2}{\mathrm{Al}(u)}\qquad \operatorname{dn}u=\frac{\mathrm{Al}(u)_3}{\mathrm{Al}(u)}$$

$$(13.)\begin{cases} d\left(\frac{\mathrm{Al}(u)_1}{\mathrm{Al}(u)}\right) = \frac{\mathrm{Al}(u)_2\,\mathrm{Al}(u)_3}{\mathrm{Al}(u)\,\mathrm{Al}(u)}du \\ d\left(\frac{\mathrm{Al}(u)_2}{\mathrm{Al}(u)}\right) = -\frac{\mathrm{Al}(u)_1\,\mathrm{Al}(u)_3}{\mathrm{Al}(u)\,\mathrm{Al}(u)}du \\ d\left(\frac{\mathrm{Al}(u)_3}{\mathrm{Al}(u)}\right) = -\frac{k^2\mathrm{Al}(u)_1\,\mathrm{Al}(u)_2}{\mathrm{Al}(u)\,\mathrm{Al}(u)}du \end{cases}$$

Alle diese Gleichungen sind zunächst nur unter der Voraussetzung erwiesen, dafs u dem absoluten Betrage nach kleiner als U sei, weil ja nur für solche Werthe des Arguments die Functionen $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$ bis jetzt definirt sind. Aber P, Q, R, S sind ganze Functionen von $\mathrm{sn}\left(\frac{u}{m}\right)$, $\mathrm{cn}\left(\frac{u}{m}\right)$, $\mathrm{dn}\left(\frac{u}{m}\right)$, und können daher nach Potenzen von u in Reihen entwickelt werden, welche convergiren, sobald der absolute Werth von u kleiner als mU ist. Für die Werthe, die dem absoluten Betrage nach kleiner als U sind, convergirt ferner auch die Reihe, welche aus der für $(-k^2\mathrm{sn}^2 u)$ durch zweimalige Integration hervorgeht, und die in dem Ausdrucke von $\mathrm{Al}(u)$, der im vorhergehenden §. unter Nr. (23.) gegeben ist, den Exponenten von e bildet. Da nun die Exponential-Reihe eine *beständig* convergirende ist, so mufs die für $\mathrm{Al}(u)$ hervorgehende Reihe jedenfalls für die genannten Werthe von u convergiren. Die für $\mathrm{Al}\left(\frac{u}{m}\right)$, und somit auch die für $\mathrm{Al}^{mm}\left(\frac{u}{m}\right)$ mufs es also, sobald der absolute Betrag von u kleiner als mU ist, und die Gleichungen (11.) lehren sodann, dafs die Reihen für $\mathrm{Al}(u)_1$, $\mathrm{Al}(u)_2$, $\mathrm{Al}(u)_3$, $\mathrm{Al}(u)$ ebenfalls für diese Werthe von u noch convergent sind. Daraus folgt unmittelbar, dafs diese letzteren Reihen *beständig* convergiren müssen, indem einerseits mU beliebig grofs gemacht werden kann, und anderseits die Coefficienten der genannten Reihen in keinerlei Weise von m abhangen. Nach der in §. 4. in Betreff der dort mit $F(u_1, \ldots)$, $G(u_1, \ldots)$, $F'(u_1, \ldots)$, $G'(u_1, \ldots)$ bezeichneten Functionen gemachten Bemerkung gelten daher die Gleichungen (13.) jetzt für *alle* Werthe von u; und wenn man nunmehr $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$ allgemein durch die Gleichungen (12.) definirt, so genügen dieselben nicht nur den Differential-Gleichungen

$$\frac{d\,\mathrm{sn}\,u}{du} = \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u, \quad \frac{d\,\mathrm{cn}\,u}{du} = -\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u, \quad \frac{d\,\mathrm{dn}\,u}{du} = -k^2\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u,$$

sondern es haben für dieselben, die für hinlänglich kleine Werthe von u (in Folge der Gleichungen (11, 5)) mit den ursprünglich so bezeichneten und durch die Reihen (3.) dargestellten übereinstimmen, auch alle übrigen im

Vorhergehenden entwickelten Gleichungen (namentlich Nr. 4, 6, 9) unbedingte Gültigkeit.

Verfährt man auf die im Vorstehenden angegebene Weise, so braucht man, um zur Entwicklung der elliptischen Functionen zu gelangen, nur einige wenige, auf die Convergenz der gewöhnlichen Potenz-Reihen sich beziehenden und sehr einfach zu erweisenden Sätze vorauszusetzen. (S. die mehrfach angeführte Abhandlung über die Facultäten, §. 7.) Dagegen sind die Formeln, welche $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ durch $\operatorname{sn}\left(\frac{u}{m}\right)$, $\operatorname{cn}\left(\frac{u}{m}\right)$, $\operatorname{dn}\left(\frac{u}{m}\right)$ auszudrücken lehren, etwas genauer zu untersuchen, als sich dies bei den analogen, für die *Abel'*schen Functionen geltenden füglich ausführen läfst. Aus diesem Grunde suchte ich die Ableitung der Functionen $\operatorname{Al}(u)$ u. s. w. aus den ursprünglichen-Differential-Gleichungen von aller speciell auf den betrachteten Einzelfall sich beziehenden Rechnung möglichst frei zu machen, und kam so auf die im vorhergehenden §. befolgte Methode, deren allgemeinere Anwendbarkeit sich deutlich genug herausstellt.

§. 10.

Fortsetzung.

Die Bestimmung der Coefficienten in den Reihen-Entwicklungen von $\operatorname{Al}(u)$ u. s. w. mit Hülfe der Gleichungen (§. 7, 26 oder 22, 23) ist zwar ausführbar, aber beschwerlich. Obgleich man nun wohl niemals zur *numerischen Berechnung* einer elliptischen Function sich dieser Reihen bedienen wird, so ist es doch nicht ohne Interesse, dafs es zur wirklichen Darstellung derselben noch einen andern, die Rechnung ungemein erleichternden Weg giebt. *Jacobi* hat nämlich zur Bestimmung der im vorhergehenden §. mit P, Q, R, S bezeichneten Gröfsen eine *lineare* Differential-Gleichung gegeben, in der dieselben aufser nach $\operatorname{sn}\left(\frac{u}{m}\right)$ oder u, auch noch in Beziehung auf den Modul k differentiirt erscheinen. Da nun die angeführten Ausdrücke für $m=\infty$, nach den Formeln (11.) des v. §., in $\operatorname{Al}(u)_1$, $\operatorname{Al}(u)_2$, $\operatorname{Al}(u)_3$, $\operatorname{Al}(u)$ übergehen, so mufs es auch ähnliche partielle Differential-Gleichungen für diese Functionen geben. Man kann dieselben in einfacher Weise aus den obigen Gleichungen (18—21.) herleiten, und sie dann selbst wieder benutzen, um die erwähnten Gleichungen *Jacobi's* aus den unter Nr. 8. des v. §. aufgestellten herzuleiten (so wie auch die analogen, welche zur Bestimmung der Zähler und des Nenners in den Transformations-Formeln dienen und ebenfalls

von *Jacobi* ohne Beweis mitgetheilt sind). Auch dieses habe ich in der erwähnten Arbeit ausgeführt; ich begnüge mich aber hier, nur die Ableitung der für $\mathrm{Al}(u)$ u. s. w. geltenden partiellen Differential-Gleichungen selbst zu geben, und zwar aus dem Grunde, weil das Verfahren, *gegebene Differential-Gleichungen nach einer darin vorkommenden Constanten zu differentiiren, und durch Combinationen der so erhaltenen mit den ursprünglichen andere Gleichungen zu ermitteln, welche für die Reihen-Entwicklung der zu bestimmenden Gröfsen eine geeignetere Form haben,* einer weitern Anwendbarkeit fähig sein dürfte.

Es werde

$$\mathrm{Al}(u)_1 = p, \quad \mathrm{Al}(u)_2 = q, \quad \mathrm{Al}(u)_3 = r, \quad \mathrm{Al}(u) = s, \quad \frac{\mathrm{Al}(u)_1}{\mathrm{Al}(u)} = \xi$$

gesetzt, so hat man (§. 8, 30)

$$(1.)\ \left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)^2 = (1-\xi^2)(1-k^2\xi^2) = 1-(1+k^2)\xi^2+k^2\xi^4, \quad \frac{\partial^2\xi}{\partial u^2} = -(1+k^2)\xi+2k^2\xi^3$$

Differentiirt man jetzt diese Gleichung, indem man ξ, sowie p, q, r, s als Functionen von u und k betrachtet, in Beziehung auf k, so erhält man

$$\frac{\partial\xi}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial k} = (-(1+k^2)\xi+2k^2\xi^3)\frac{\partial\xi}{\partial k} - k\xi^2(1-\xi^2)$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial k} - \frac{\partial\xi}{\partial k}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2} = -k\xi^2(1-\xi^2)$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial\xi}{\partial k}:\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)}{\partial u} = -\frac{k\xi^2}{1-k^2\xi^2} = -\frac{1}{k}\left(\frac{1}{1-k^2\xi^2}-1\right)$$

Nach (§. 8, 17) hat man aber, indem $\mathrm{al}^2(u)_3 = 1-k^2\xi^2$ ist,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\log(1-k^2\xi^2)}{\partial u^2} = k^2\xi^2+\frac{1-k^2}{1-k^2\xi^2}-1 = -\frac{\partial^2\log s}{\partial u^2}+\frac{1-k^2}{1-k^2\xi^2}-1,$$

oder

$$\frac{1-k^2}{1-k^2\xi^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial\log s}{\partial u}+\frac{1}{2}\frac{\partial\log(1-k^2\xi^2)}{\partial u}+u\right)}{\partial u}$$

Multiplicirt man daher die zweitvorhergehende Gleichung noch mit $k(1-k^2)$, und integrirt in Beziehung auf u, so kommt

$$k(1-k^2)\frac{\partial\xi}{\partial k}:\frac{\partial\xi}{\partial u} = -\frac{\partial\log s}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial\log(1-k^2\xi^2)}{\partial u}-k^2u,$$

oder wenn man mit $\frac{\partial\xi}{\partial u}$ multiplicirt, indem

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial\log(1-k^2\xi^2)}{\partial u}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial u} = \frac{k^2\xi}{1-k^2\xi^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)^2 = k^2\xi(1-\xi^2)$$

ist,

$$(2.)\qquad k(1-k^2)\frac{\partial\xi}{\partial k} = k^2\xi(1-\xi^2)-\left(k^2u+\frac{\partial\log s}{\partial u}\right)\frac{\partial\xi}{\partial u}.$$

Diese Gleichung multiplicire man mit $4k^2\xi$, so folgt, weil (§. 8, 18)

$$(3.)\qquad \frac{\partial^2\log s}{\partial u^2}+k^2\xi^2 = 0,$$

und daher

$$2k^2\xi\frac{\partial\xi}{\partial k} = -\frac{\partial^3\log s}{\partial u^2\partial k}-2k\xi^2,\qquad 2k^2\xi\frac{\partial\xi}{\partial u} = -\frac{\partial^3\log s}{\partial u^3}$$

ist,

$$2k(1-k^2)\frac{\partial^3\log s}{\partial u^2\partial k}+2k^2u\frac{\partial^3\log s}{\partial u^3}+2\frac{\partial\log s}{\partial u}\cdot\frac{\partial^3\log s}{\partial u^3}+4k^2\xi^2-4k^4\xi^4=0,$$

oder da

$$2k^2u\frac{\partial^3\log s}{\partial u^3} = 2\frac{\partial^2\left(k^2u\frac{\partial\log s}{\partial u}\right)}{\partial u^2}-4k^2\frac{\partial^2\log s}{\partial u^2}$$

$$2\frac{\partial\log s}{\partial u}\cdot\frac{\partial^3\log s}{\partial u^3} = \frac{\partial^2\cdot\left(\frac{\partial\log s}{\partial u}\right)^2}{\partial u^2}-2\left(\frac{\partial^2\log s}{\partial u^2}\right)^2$$

$$= \frac{\partial^2\cdot\left(\frac{\partial\log s}{\partial u}\right)^2}{\partial u^2}-2k^4\xi^4$$

ist,

$$\frac{\partial^2\left\{2k(1-k^2)\frac{\partial\log s}{\partial k}+2k^2u\frac{\partial\log s}{\partial u}+\left(\frac{\partial\log s}{\partial u}\right)^2\right\}}{\partial u^2}+4k^2(1+k^2)\xi^2-6k^4\xi^4 = 0$$

Aber

$$\frac{\partial^4\log s}{\partial u^4} = -2k^2\xi\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2}-2k^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)^2 = -2k^2+4k^2(1+k^2)\xi^2-6k^4\xi^4,$$

und man kann daher die vorstehende Gleichung zweimal in Beziehung auf u integriren, wodurch man

$$\frac{\partial^2\log s}{\partial u^2}+2k(1-k^2)\frac{\partial\log s}{\partial k}+2k^2u\frac{\partial\log s}{\partial u}+\left(\frac{\partial\log s}{\partial u}\right)^2+k^2u^2 = 0$$

erhält. Durch Betrachtung der ersten Glieder in der Reihen-Entwicklung von s überzeugt man sich, daſs bei keiner dieser Integrationen eine Constante hinzuzufügen ist. Multiplicirt man nun die vorstehende Gleichung noch mit s, so ergiebt sich die folgende lineare partielle Differential-Gleichung für s

$$(4.) \qquad \frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + 2k^2 u \frac{\partial s}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial s}{\partial k} + k^2 u s = 0$$

Setzt man nun in (2.) $\xi = \frac{p}{s}$, so ergiebt sich

$$k(1-k^2)\frac{s\frac{\partial p}{\partial k} - p\frac{\partial s}{\partial k}}{s^2} + \left(k^2 u + \frac{1}{s}\cdot\frac{\partial s}{\partial u}\right)\frac{s\frac{\partial p}{\partial u} - p\frac{\partial s}{\partial u}}{s^2} - k^2\frac{p}{s} + k^2\frac{p^3}{s^3} = 0,$$

oder wenn man mit $2ps^3$ multiplicirt,

$$ps^2\left(2k^2 u\frac{\partial p}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial p}{\partial k}\right) - sp^2\left(2k^2 u\frac{\partial s}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial s}{\partial k}\right)$$
$$+ 2ps\frac{\partial p}{\partial u}\cdot\frac{\partial s}{\partial u} - 2p^2\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2 - 2k^2p^2s^2 + 2k^2p^4 = 0$$

Aus der Gleichung (1.) aber folgt

$$s^2\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 + p^2\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2 - 2ps\frac{\partial p}{\partial u}\cdot\frac{\partial s}{\partial u} = s^4 - (1+k^2)p^2s^2 + k^2p^4,$$

und man erhält daher, wenn man vermittelst dieser Gleichung aus der vorhergehenden das Glied $\left(2p\frac{\partial p}{\partial u}\cdot\frac{\partial s}{\partial u}\right)$ eliminirt,

$$ps^2\left(2k^2 u\frac{\partial p}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial p}{\partial k} + (1-k^2)p\right) + s^2\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 - s^4$$
$$= sp^2\left(2k^2 u\frac{\partial s}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial p}{\partial k}\right) + p^2\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2 - k^2p^4$$

Aber (§. 8, 26) $\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 = p\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} + s^2$, $\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2 = s\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + k^2p^2$; daher verwandelt sich die vorstehende Gleichung in die folgende:

$$s\left(\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} + 2k^2 u\frac{\partial p}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial p}{\partial u} + (1-k^2)p\right)$$
$$= p\left(\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + 2k^2 u\frac{\partial s}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial s}{\partial u}\right),$$

woraus wegen der 4ten

$$(5.) \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial u^2} + 2k^2 u\frac{\partial p}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial p}{\partial k} + (1-k^2+k^2u^2)p = 0$$

folgt. Ferner hat man (§. 8, 27) $s^2 = p^2 + q^2$, woraus sich

$$s\frac{\partial s}{\partial u} = p\frac{\partial p}{\partial u} + q\frac{\partial q}{\partial u}, \qquad s\frac{\partial s}{\partial k} = p\frac{\partial p}{\partial k} + q\frac{\partial q}{\partial k},$$
$$s\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2 = p\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 + q\frac{\partial^2 q}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2$$

findet, und da, wenn man in der dritten dieser Gleichungen

$$\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 = p\frac{\partial^2 p}{\partial u^2}+s^2,\qquad \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2 = q\frac{\partial^2 q}{\partial u^2}+r^2 = q\frac{\partial^2 q}{\partial u^2}+s^2-k^2p^2,$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2 = s\frac{\partial^2 s}{\partial u^2}+k^2p^2$$

setzt, sich

$$s\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} = p\frac{\partial^2 p}{\partial u^2}+(1-k^2)p^2+q\frac{\partial^2 q}{\partial u^2}+q^2$$

ergiebt,

$$s\left(\frac{\partial^2 s}{\partial u^2}+2k^2u\frac{\partial s}{\partial u}+2k(1-k^2)\frac{\partial s}{\partial k}+k^2u^2s\right)$$

$$= p\left(\frac{\partial^2 p}{\partial u^2}+2k^2u\frac{\partial p}{\partial u}+2k(1-k^2)\frac{\partial p}{\partial k}+(1-k^2+k^2u^2)p\right)$$

$$+q\left(\frac{\partial^2 q}{\partial u^2}+2k^2u\frac{\partial q}{\partial u}+2k(1-k^2)\frac{\partial q}{\partial k}+(1+k^2u^2)q\right);$$

woraus mit Rücksicht auf (4, 5)

$$(6.)\qquad \frac{\partial^2 q}{\partial u^2}+2k^2u\frac{\partial q}{\partial u}+2k(1-k^2)\frac{\partial q}{\partial k}+(1+k^2u^2)q = 0$$

folgt.

Endlich ist

$$s^2 = k^2p^2+r^2$$

$$s\frac{\partial s}{\partial u} = k^2p\frac{\partial p}{\partial u}+r\frac{\partial r}{\partial u},\qquad s\frac{\partial s}{\partial k} = k^2p\frac{\partial p}{\partial k}+r\frac{\partial r}{\partial k}+kp^2$$

$$s\frac{\partial^2 s}{\partial u^2}+\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2 = k^2p\frac{\partial^2 p}{\partial u^2}+k^2\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2+r\frac{\partial^2 r}{\partial u^2}+\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2,$$

oder weil

$$\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2 = s\frac{\partial^2 s}{\partial u^2}+k^2p^2,\qquad \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 = p\frac{\partial^2 p}{\partial u^2}+s^2,\qquad \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2 = r\frac{\partial^2 r}{\partial u^2}+k^2s^2-k^2p^2,$$

$$s\left(\frac{\partial^2 s}{\partial u^2}+2k^2u\frac{\partial s}{\partial u}+2k(1-k^2)\frac{\partial s}{\partial k}+k^2u^2s\right)$$

$$= k^2p\left(\frac{\partial^2 p}{\partial u^2}+2k^2u\frac{\partial p}{\partial u}+2k(1-k^2)\frac{\partial p}{\partial k}+(1-k^2+k^2u^2)p\right)$$

$$+r\left(\frac{\partial^2 r}{\partial u^2}+2k^2u\frac{\partial r}{\partial u}+2k(1-k^2)\frac{\partial r}{\partial k}+(k^2+k^2u^2)r\right),$$

woraus

$$(7.)\qquad \frac{\partial^2 r}{\partial u^2}+2k^2u\frac{\partial r}{\partial u}+2k(1-k^2)\frac{\partial r}{\partial k}+(k^2+k^2u^2)r = 0$$

folgt. Mit Hülfe dieser Gleichungen (4—7), die hier nun noch einmal zu-

sammengestellt werden mögen:

$$(8.)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 \mathrm{Al}(u)}{\partial u^2}+2k^2u\dfrac{\partial \mathrm{Al}(u)}{\partial u}+2k(1-k^2)\dfrac{\partial \mathrm{Al}(u)}{\partial k}+k^2u^2\,\mathrm{Al}(u)=0\\ \dfrac{\partial^2 \mathrm{Al}(u)_1}{\partial u^2}+2k^2u\dfrac{\partial \mathrm{Al}(u)_1}{\partial u}+2k(1-k^2)\dfrac{\partial \mathrm{Al}(u)_1}{\partial k}+(1-k^2+k^2u^2)\mathrm{Al}(u)_1=0\\ \dfrac{\partial^2 \mathrm{Al}(u)_2}{\partial u^2}+2k^2u\dfrac{\partial \mathrm{Al}(u)_2}{\partial u}+2k(1-k^2)\dfrac{\partial \mathrm{Al}(u)_2}{\partial k}+(1+k^2u^2)\,\mathrm{Al}(u)_2=0\\ \dfrac{\partial^2 \mathrm{Al}(u)_3}{\partial u^2}+2k^2u\dfrac{\partial \mathrm{Al}(u)_3}{\partial u}+2k(1-k^2)\dfrac{\partial \mathrm{Al}(u)_3}{\partial k}+(k^2+k^2u^2)\,\mathrm{Al}(u)_3=0\end{cases}$$

lassen sich nunmehr die Reihen für $\mathrm{Al}(u)$, $\mathrm{Al}(u)_1$, $\mathrm{Al}(u)_2$, $\mathrm{Al}(u)_3$ ohne Mühe entwickeln, wobei man noch mit Vortheil die leicht zu erweisenden Relationen

$$(9.)\begin{cases}\mathrm{Al}\left(ku,\frac{1}{k}\right)_1=k\,\mathrm{Al}(u,k)_1 & \mathrm{Al}\left(ku,\frac{1}{k}\right)_2=\mathrm{Al}(u,k)_3\\ \mathrm{Al}\left(ku,\frac{1}{k}\right)_3=\ \mathrm{Al}(u,k)_2 & \mathrm{Al}\left(ku,\frac{1}{k}\right)\ =\mathrm{Al}(u,k)\end{cases}$$

benutzen kann. Die Resultate der leicht auszuführenden Rechnung sind folgende.

Es seien $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ ganze Zahlen, die unabhängig von einander alle Werthe von 0 bis $+\infty$ zu durchlaufen haben, so ist

$$(10.)\begin{cases}\mathrm{Al}(u)\ =1-\mathrm{S}\left\{(-1)^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}k^{2\mathfrak{m}+2}\cdot\dfrac{u^{2\mathfrak{m}+2\mathfrak{n}+4}}{(2\mathfrak{m}+2\mathfrak{n}+4)!}\right\}\\ \mathrm{Al}(u)_1=\qquad \mathrm{S}\left\{(-1)^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}b_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}k^{2\mathfrak{m}}\cdot\dfrac{u^{2\mathfrak{m}+2\mathfrak{n}+1}}{(2\mathfrak{m}+2\mathfrak{n}+1)!}\right\}\\ \mathrm{Al}(u)_2=1-\mathrm{S}\left\{(-1)^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}c_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}k^{2\mathfrak{m}}\cdot\dfrac{u^{2\mathfrak{m}+2\mathfrak{n}+2}}{(2\mathfrak{m}+2\mathfrak{n}+2)!}\right\}\\ \mathrm{Al}(u)_3=1-\mathrm{S}\left\{(-1)^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}c_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}k^{2\mathfrak{n}+2}\cdot\dfrac{u^{2\mathfrak{m}+2\mathfrak{n}+2}}{(2\mathfrak{m}+2\mathfrak{n}+2)!}\right\}\end{cases}$$

In diesen Formeln ist mit $\mathfrak{n}!$ das Product $(1.2\ldots\mathfrak{n})$ bezeichnet, und

$$a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}\qquad b_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}\qquad c_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$$

sind ganze Zahlen, welche vermittelst der folgenden Recursions-Formeln zu berechnen sind:

$$(11.)\begin{cases}a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}=(4\mathfrak{m}+4)a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}-1}+(2\mathfrak{n}+4)a_{\mathfrak{m}-1,\mathfrak{n}}-(2\mathfrak{m}+2\mathfrak{n}+1)(2\mathfrak{m}+2\mathfrak{n}+2)a_{\mathfrak{m}-1,\mathfrak{n}-1}\\ b_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}=(4\mathfrak{m}+1)b_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}-1}+(2\mathfrak{n}+1)b_{\mathfrak{m}-1,\mathfrak{n}}-(2\mathfrak{m}+2\mathfrak{n}-2)(2\mathfrak{m}+2\mathfrak{n}-1)b_{\mathfrak{m}-1,\mathfrak{n}-1}\\ c_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}=(4\mathfrak{m}+1)c_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}-1}+(4\mathfrak{n}+4)c_{\mathfrak{m}-1,\mathfrak{n}}-(2\mathfrak{m}+2\mathfrak{n}-1)(2\mathfrak{m}+2\mathfrak{n})c_{\mathfrak{m}-1,\mathfrak{n}-1}\end{cases}$$

Beim Gebrauche dieser Formeln hat man

$$a_{0,0}=2,\quad b_{0,0}=1,\quad c_{0,0}=1,\quad c_{1,0}=2,\quad c_{0,1}=1$$

zu setzen, so wie jedem Coefficienten, bei dem einer der Indices negativ wird, den Werth Null beizulegen. Ferner mufs in der ersten $m+n>0$, eben so in der zweiten, und in der dritten $m+n>1$ sein. Auch ist

$$a_{m,n}=a_{n,m} \qquad b_{m,n}=b_{n,m}$$

Da es nützlich sein kann, die Reihen für $\mathrm{Al}(u)$ u. s. w. in einer Anzahl von Gliedern wirklich dargestellt zu haben, so mögen hier noch für die 10 ersten Coefficienten derselben die vollständig berechneten Ausdrücke Platz finden.

$$\mathrm{Al}(u)=1-A_2\frac{u^4}{4!}+A_3\frac{u^6}{6!}-\cdots+(-1)^{m-1}A_m\frac{u^{2m}}{(2m)!}\cdots$$

$A_2=2k^2$
$A_3=8(k^2+k^4)$
$A_4=32(k^2+k^6)+68k^4$
$A_5=128(k^2+k^8)+480(k^4+k^6)$
$A_6=512(k^2+k^{10})3008(k^4+k^8)+5400k^6$
$A_7=2048(k^2+k^{12})+17408(k^4+k^{10})+49568(k^6+k^8)$
$A_8=8192(k^2+k^{14})+95232(k^4+k^{12})+395520(k^6+k^{10})+603376k^8$
$A_9=32768(k^2+k^{16})+499712(k^4+k^{14})+2853888(k^6+k^{12})+5668096(k^8+k^{10})$
$A_{10}=131072(k^2+k^{18})+2539520(k^4+k^{16})+19097600(k^6+k^{14})$
$\qquad+38153728(k^8+k^{12})+42090784k^{10}$

u. s. w.

$$\mathrm{Al}(u)_1=u-B_1\frac{u^3}{3!}+B_2\frac{u^5}{5!}-\cdots+(-1)^m B_m\frac{u^{2m+1}}{(2m+1)!}\cdots$$

$B_1=1+k^2$
$B_2=1+k^4+4k^2$
$B_3=1+k^6+9(k^2+k^4)$
$B_4=1+k^8+16(k^2+k^6)-6k^4$
$B_5=1+k^{10}+25(k^2+k^8)-494(k^4+k^6)$
$B_6=1+k^{12}+36(k^2+k^{10})-5781(k^4+k^8)-12184k^6$
$B_7=1+k^{14}+49(k^2+k^{12})-55173(k^4+k^{10})-179605(k^6+k^8)$
$B_8=1+k^{16}+64(k^2+k^{14})-502892(k^4+k^{12})-2279488(k^6+k^{10})-3547930k^8$
$B_9=1+k^{18}+81(k^2+k^{16})-4537500(k^4+k^{14})-27198588(k^6+k^{12})$
$\qquad-59331498(k^8+k^{10})$
$B_{10}=1+k^{20}+100(k^2+k^{18})-40856715(k^4+k^{16})-313180080(k^6+k^{14})$
$\qquad 909015270(k^8+k^{12})-1278530856k^{10}$

u. s. w.

$$\mathrm{Al}(u)_2 = 1 - C_1 \frac{u^2}{2!} + C_2 \frac{u^4}{4!} - \cdots + (-1)^m C_m \frac{u^{2m}}{(2m)!} \cdots$$

$C_1 = 1$

$C_2 = 1 + 2k^2$

$C_3 = 1 + 6k^2 + 8k^4$

$C_4 = 1 + 12k^2 + 60k^4 + 32k^6$

$C_5 = 1 + 20k^2 + 348k^4 + 448k^6 + 128k^8$

$C_6 = 1 + 30k^2 + 2372k^4 + 4600k^6 + 2880k^8 + 512k^{10}$

$C_7 = 1 + 42k^2 + 19308k^4 + 51816k^6 + 45024k^8 + 16896k^{10} + 2048k^{12}$

$C_8 = 1 + 56k^2 + 169320k^4 + 628064k^6 + 757264k^8 + 370944k^{10} + 93184k^{12} + 8192k^{14}$

$C_9 = 1 + 72k^2 + 1515368k^4 + 7594592k^6 + 12998928k^8 + 9100288k^{10} + 2725888k^{12} + 491520k^{14} + 32768k^{16}$

$C_{10} = 1 + 90k^2 + 13623480k^4 + 89348080k^6 + 211064400k^8 + 219361824k^{10} + 100242944k^{12} + 18450432k^{14} + 2506752k^{16} + 131072k^{18}$

u. s. w.

$$\mathrm{Al}(u)_3 = 1 - D_1 \frac{u^2}{2!} + D_2 \frac{u^4}{4!} - \cdots + (-1)^m D_m \frac{u^{2m}}{(2m)!} \cdots$$

$D_1 = k^2$

$D_2 = 2k^2 + k^4$

$D_3 = 8k^2 + 6k^4 + k^6$

$D_4 = 32k^2 + 60k^4 + 12k^6 + k^8$

$D_5 = 128k^2 + 448k^4 + 348k^6 + 20k^8 + k^{10}$

$D_6 = 512k^2 + 2880k^4 + 4600k^6 + 2372k^8 + 30k^{10} + k^{12}$

$D_7 = 2048k^2 + 16896k^4 + 45024k^6 + 51816k^8 + 19308k^{10} + 42k^{12} + k^{14}$

$D_8 = 8192k^2 + 93184k^4 + 370944k^6 + 757264k^8 + 628064k^{10} + 169320k^{12} + 56k^{14} + k^{16}$

$D_9 = 32768k^2 + 491520k^4 + 2725888k^6 + 9100288k^8 + 12998928k^{10} + 7594592k^{12} + 1515368k^{14} + 72k^{16} + k^{18}$

$D_{10} = 131072k^2 + 2506752k^4 + 18450432k^6 + 100242944k^8 + 219361824k^{10} + 211064400k^{12} + 89348080k^{14} + 13623480k^{16} + 90k^{18} + k^{20}$

u. s. w.

Ordnet man diese Ausdrücke von $\mathrm{Al}(u)$ u. s. w. nach Potenzen von k, so erscheinen die Coefficienten als unendliche Reihen, die sich aber summiren lassen.

§. 11.

Uebergang zu den *Jacobi*'schen Reihen.

Nunmehr möge gezeigt werden, wie man von den Functionen $\mathrm{Al}(u)$, $\mathrm{Al}(u)_1$, $\mathrm{Al}(u)_2$, $\mathrm{Al}(u)_3$ aus zu den unendlichen Reihen gelangen kann, durch welche *Jacobi* die elliptischen Functionen auszudrücken gelehrt hat. Dabei nehme ich jedoch an, dafs der absolute Betrag des Moduls k kleiner als Eins sei, was erlaubt ist, weil man vermittelst der Formeln

$$\mathrm{Al}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \mathrm{Al}(u, k) \qquad \mathrm{Al}\left(ku, \frac{1}{k}\right)_2 = \mathrm{Al}(u, k)_3$$

$$\mathrm{Al}\left(ku, \frac{1}{k}\right)_1 = k\,\mathrm{Al}(u, k)_1 \qquad \mathrm{Al}\left(ku, \frac{1}{k}\right)_3 = \mathrm{Al}(u, k)_2$$

jede der 4 genannten Functionen, wenn der absolute Betrag des Moduls die Einheit übersteigt, auf eine andere zurückführen kann, bei welcher derselbe kleiner als 1 ist.

Es werde nun, unter dieser Voraussetzung,

$$(1.) \quad \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}\sqrt{(1-k^2\xi^2)}} = K, \quad \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2-1)}\sqrt{(1-k^2\xi^2)}} = K'$$

gesetzt, wobei, um diesen Integralen eine ganz bestimmte Bedeutung zu geben, festgestellt werden möge, es solle bei beiden Integrationen für $\sqrt{(1-k^2\xi^2)}$ der durch die Reihe

$$1 - \tfrac{1}{2}k^2\xi^2 - \frac{1}{2\cdot 4}k^4\xi^4 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\xi^6 - \cdots$$

gegebene Werth dieser Wurzelgröfse, und bei der ersten

$$\sqrt{(1-\xi^2)} = 1 - \tfrac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2\cdot 4}\xi^4 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\xi^6 - \cdots,$$

so wie bei der zweiten

$$\sqrt{(\xi^2-1)} = \xi - \tfrac{1}{2}\xi^3 - \frac{1}{2\cdot 4}\xi^5 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\xi^7 - \cdots$$

genommen werden. Dann erhält man, wenn man die Reihe

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \cdots + \left(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\right)^2 k^{2n} + \cdots \quad \text{mit } \mathfrak{K},$$

und die Summe ihrer $(n+1)$ ersten Glieder

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \cdots + \left(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\right)^2 k^{2n} \quad \text{mit } \mathfrak{K}_n$$

bezeichnet.

$$(2.)\quad \begin{cases} K = \frac{\pi}{2}\mathfrak{K} \\ K' = \mathfrak{K}\log\left(\frac{4}{k}\right) - (\mathfrak{K}-1) - \frac{2}{3\cdot 4}(\mathfrak{K}-\mathfrak{K}_1) - \frac{2}{5\cdot 6}(\mathfrak{K}-\mathfrak{K}_2) - \cdots, \end{cases}$$

und es ergeben sich die folgenden Gleichungen

$$(3.)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(K) = 1 & \operatorname{cn}(K) = 0 & \operatorname{dn}(K) = k' \\ \operatorname{sn}(K - iK') = \frac{1}{k} & \operatorname{cn}(K - iK') = \frac{k'i}{k} & \operatorname{dn}(K - iK') = 0, \end{cases}$$

in denen

$$(4.)\quad k' = \sqrt{(1-k^2)} = 1 - \tfrac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2\cdot 4}k^4 - \cdots$$

ist.

Die Herleitung derselben, so wie auch die Entwicklung der Reihen für K und K', muſs bei dem hier eingeschlagenen Wege, die Theorie der elliptischen Functionen zu begründen, in einer etwas andern als der gewöhnlichen Weise geschehen. Doch gehe ich hierauf nicht näher ein, sondern verweise auf das folgende Kapitel, wo man alles, was hier zu bemerken wäre, in den daselbst anzustellenden allgemeinern Untersuchungen gehörig erörtert finden wird.

Die Formeln für $\operatorname{sn}(u \pm v)$, $\operatorname{cn}(u \pm v)$, $\operatorname{dn}(u \pm v)$ führen sodann, wenn man $v = K$, und $v = K - iK'$ setzt, zu den Relationen

$$(5.)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u+K) = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} & \operatorname{sn}(u-K) = -\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} \\ \operatorname{cn}(u+K) = \frac{-k'\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u} & \operatorname{cn}(u-K) = \frac{k'\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u} \\ \operatorname{dn}(u+K) = \frac{k'}{\operatorname{dn} u} & \operatorname{dn}(u-K) = \frac{k'}{\operatorname{dn} u} \end{cases}$$

$$(6.)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u+K-iK') = \frac{\operatorname{dn} u}{k\operatorname{cn} u} & \operatorname{sn}(u-K+iK') = -\frac{\operatorname{dn} u}{k\operatorname{cn} u} \\ \operatorname{cn}(u+K-iK') = \frac{k'i}{k\operatorname{cn} u} & \operatorname{cn}(u-K+iK') = \frac{k'i}{k\operatorname{cn} u} \\ \operatorname{dn}(u+K-iK') = -\frac{ik'\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u} & \operatorname{dn}(u-K+iK') = \frac{ik'\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u} \end{cases}$$

Und wenn man in diesen letztern Formeln $u-K$, sowie auch $u+K$ für u setzt, so erhält man

$$(7.)\quad\begin{cases}\operatorname{sn}(u+iK')=\dfrac{1}{k\operatorname{sn}u} & \operatorname{sn}(u-iK')=\dfrac{1}{k\operatorname{sn}u}\\ \operatorname{cn}(u+iK')=\dfrac{-i\operatorname{dn}u}{\operatorname{sn}u} & \operatorname{cn}(u-iK')=\dfrac{i\operatorname{dn}u}{\operatorname{sn}u}\\ \operatorname{dn}(u+iK')=\dfrac{-i\operatorname{cn}u}{\operatorname{sn}u} & \operatorname{dn}(u-iK')=\dfrac{i\operatorname{cn}u}{\operatorname{sn}u}\end{cases}$$

Aus (5, 7) folgt nun

$$(8.)\quad\begin{cases}\operatorname{sn}(u+K)=-\operatorname{sn}(u-K) & \operatorname{sn}(u+iK')=\operatorname{sn}(u-iK')\\ \operatorname{cn}(u+K)=-\operatorname{cn}(u-K) & \operatorname{cn}(u+iK')=-\operatorname{cn}(u-iK')\\ \operatorname{dn}(u+K)=\operatorname{dn}(u-K) & \operatorname{dn}(u+iK')=-\operatorname{dn}(u-iK'),\end{cases}$$

und hieraus, indem man $u+K$ und $u+iK'$ für u setzt,

$$(9).\quad\begin{cases}\operatorname{sn}(u+2K)=-\operatorname{sn}u & \operatorname{sn}(u+2iK')=\operatorname{sn}u\\ \operatorname{cn}(u+2K)=-\operatorname{cn}u & \operatorname{cn}(u+2iK')=-\operatorname{cn}u\\ \operatorname{dn}(u+2K)=\operatorname{dn}u & \operatorname{dn}(u+2iK')=-\operatorname{dn}u\end{cases}$$

Diese Gleichungen führen endlich zu den folgenden allgemeinern, in denen m, n beliebige ganze Zahlen bedeuten:

$$(10.)\quad\begin{cases}\operatorname{sn}(u+2\mathrm{m}K+2\mathrm{n}iK')=(-1)^{\mathrm{m}}\operatorname{sn}u\\ \operatorname{cn}(u+2\mathrm{m}K+2\mathrm{n}iK')=(-1)^{\mathrm{m}+\mathrm{n}}\operatorname{cn}u\\ \operatorname{dn}(u+2\mathrm{m}K+2\mathrm{n}iK')=(-1)^{\mathrm{n}}\operatorname{dn}u\end{cases}$$

Man hat ferner, wenn man

$$\frac{d\operatorname{Al}(u)}{du}\text{ mit }\operatorname{Al}'(u)\text{ bezeichnet,}$$

$$(11.)\quad d\frac{\operatorname{Al}'(u)}{\operatorname{Al}(u)}=-k^2\operatorname{sn}^2u\,du,$$

oder wenn

$$\xi=\operatorname{sn}u,$$

$$(12.)\quad d\frac{\operatorname{Al}'(u)}{\operatorname{Al}(u)}=-\frac{k^2\xi^2d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}\sqrt{(1-k^2\xi^2)}}$$

Wird daher

$$(13.)\quad\int_0^1\frac{k^2\xi^2d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}\sqrt{(1-k^2\xi^2)}}=J,\quad\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{k^2\xi^2d\xi}{\sqrt{(\xi^2-1)}\sqrt{(1-k^2\xi^2)}}=J'$$

gesetzt, mit der Bestimmung, dafs bei jeder dieser Integrationen ξ und die

Wurzelgröfsen dieselben Werthe durchlaufen sollen, wie bei der entsprechenden, durch welche man beziehl. K oder K' findet; so ergiebt sich

$$(14.)\qquad \frac{\mathrm{Al}'(K)}{\mathrm{Al}(K)} = -J \qquad \frac{\mathrm{Al}'(K-iK')}{\mathrm{Al}(K-iK')} = -J+iJ'$$

Aus den Gleichungen (11, 8) aber folgt

$$d\frac{\mathrm{Al}'(u+K)}{\mathrm{Al}(u+K)} = d\frac{\mathrm{Al}'(u-K)}{\mathrm{Al}(u-K)},$$

und daher

$$\frac{\mathrm{Al}'(u+K)}{\mathrm{Al}(u+K)} = \frac{\mathrm{Al}'(u-K)}{\mathrm{Al}(u-K)}+C,$$

wo C eine von u unabhängige Gröfse bedeutet. Indem man $u=0$ nimmt. und bemerkt, dafs $\mathrm{Al}(u)$ eine gerade, $\mathrm{Al}'(u)$ aber eine ungerade Function von u ist, findet sich

$$C = \frac{\mathrm{Al}'(K)}{\mathrm{Al}(K)} - \frac{\mathrm{Al}'(-K)}{\mathrm{Al}(-K)} = 2\frac{\mathrm{Al}'(K)}{\mathrm{Al}(K)} = -2J.$$

Setzt man nun in der vorhergehenden Gleichung $u+K$ für u, so ergiebt sich

$$(15.)\qquad \frac{\mathrm{Al}'(u+2K)}{\mathrm{Al}(u+2K)} = \frac{\mathrm{Al}'(u)}{\mathrm{Al}(u)} - 2J$$

In ganz ähnlicher Weise findet sich

$$(16.)\qquad \frac{\mathrm{Al}'(u+2K-2iK')}{\mathrm{Al}(u+2K-2iK')} = \frac{\mathrm{Al}'(u)}{\mathrm{Al}(u)} - 2J + 2iJ'$$

Und wenn man in dieser Gleichung $u+2iK'$ an die Stelle von u setzt, so kommt

$$(17.)\qquad \frac{\mathrm{Al}'(u+2iK')}{\mathrm{Al}(u+2iK')} = \frac{\mathrm{Al}'(u)}{\mathrm{Al}(u)} - 2iJ',$$

worauf man dann aus (15, 17) die allgemeinere Relation

$$(18.)\qquad \frac{\mathrm{Al}'(u+2\mathrm{m}K+2\mathrm{n}iK')}{\mathrm{Al}(u+2\mathrm{m}K+2\mathrm{n}iK')} = \frac{\mathrm{Al}'(u)}{\mathrm{Al}(u)} - 2\mathrm{m}J + 2\mathrm{n}iJ'$$

herleiten kann.

Jetzt werde zur Abkürzung

$$(19.)\qquad \begin{cases} \mathrm{m}K+\mathrm{n}iK' = \omega \\ \mathrm{m}J+\mathrm{n}iJ' = \eta \end{cases}$$

gesetzt. Dann folgt aus der vorstehenden Gleichung

$$\mathrm{Al}(u+2\omega) = C\cdot e^{-2\eta u}\,\mathrm{Al}(u),$$

wo C eine Constante bedeutet. Zur Bestimmung derselben setze man $u=-\omega$,

so findet sich

$$\mathrm{Al}(\omega) = Ce^{2\eta\omega}\,\mathrm{Al}(-\omega) = Ce^{2\eta\omega}\,\mathrm{Al}(\omega),$$

und daher, wofern nicht $\mathrm{Al}(\omega) = 0$ ist, $C = e^{-2\eta\omega}$. Es wird aber, wie aus der Gleichung

$$\frac{d^2 \log \mathrm{Al}(u)}{du^2} = -k^2 \,\mathrm{sn}^2 u$$

folgt, $\mathrm{Al}(\omega)$ nur dann $= 0$, wenn $\mathrm{sn}\,\omega = \infty$ ist; was, wie die Formeln (7, 10) lehren, nur der Fall ist, wenn für m eine gerade und für n eine ungerade Zahl angenommen wird. Dann aber ist, wie die Gleichung

$$\frac{d^2 \log \mathrm{Al}(u)_1}{du^2} = -\frac{1}{\mathrm{sn}^2 u}$$

zeigt, $\mathrm{Al}(\omega)_1$ nicht $= 0$; und da man, nach (10.), jetzt $\mathrm{sn}(u+2\omega) = \mathrm{sn}\,u$ hat, und somit aus der vorstehenden Gleichung für $\mathrm{Al}(u+2\omega)$

$$\mathrm{Al}(u+2\omega)_1 = Ce^{-2\eta u}\,\mathrm{Al}(u)_1$$

folgt, so findet sich jetzt, wenn man wieder $u = -\omega$ setzt, $C = -e^{-2\eta\omega}$. Demgemäfs hat man,

$$\mathrm{Al}(u+2\omega) = \pm e^{-2\eta(u+\omega)}\,\mathrm{Al}(u),$$

in welcher Gleichung das untere Zeichen gilt, wenn m gerade und gleichzeitig n ungerade, oder wenn das Product $(m+1)n$ ungerade ist. Daher

$$\mathrm{Al}(u+2\omega) = (-1)^{(m+1)n} e^{-2\eta(u+\omega)}\,\mathrm{Al}(u)$$

Verbindet man nun mit dieser Gleichung die unter (10.) aufgestellten, so ergeben sich für die Functionen $\mathrm{Al}(u)$, $\mathrm{Al}(u)_1$, $\mathrm{Al}(u)_2$, $\mathrm{Al}(u)_3$ folgende Relationen:

$$(20.)\quad \begin{cases} \mathrm{Al}(u+2\omega) = (-1)^{mn+n} e^{-2\eta(u+\omega)}\,\mathrm{Al}(u) \\ \mathrm{Al}(u+2\omega)_1 = (-1)^{mn+m+n} e^{-2\eta(u+\omega)}\,\mathrm{Al}(u)_1 \\ \mathrm{Al}(u+2\omega)_2 = (-1)^{mn+m} e^{-2\eta(u+\omega)}\,\mathrm{Al}(u)_2 \\ \mathrm{Al}(u+2\omega)_3 = (-1)^{mn} e^{-2\eta(u+\omega)}\,\mathrm{Al}(u)_3 \end{cases}$$

Diese Gleichungen sprechen charakteristische Eigenschaften der Functionen $\mathrm{Al}(u)$ u. s. w. aus, und führen in einfacher Weise zur Darstellung derselben durch die *Jacobi*'schen Reihen. Dabei ist die bekannte unter den Gröfsen K, K', J, J' statt findende Relation von wesentlicher Bedeutung, die man aus den vorhergehenden Formeln folgendermafsen erhält.

Aus (20.) folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{Al}(u+2K)_3 &= e^{-2J(u+K)}\,\mathrm{Al}(u)_3\\ \mathrm{Al}(u+2iK')_3 &= e^{-2iJ'(u+iK')}\,\mathrm{Al}(u)_3\end{aligned}$$

Setzt man in der ersten dieser Gleichungen $u+2iK'$, und in der andern $u+2K$ für u, so kommt

$$\begin{aligned}\mathrm{Al}(u+2K+2iK')_3 &= e^{-2J(u+2iK'+K)}\,\mathrm{Al}(u+2iK')_3\\ &= e^{-2J(u+2iK'+K)-2iJ'(u+iK')}\,\mathrm{Al}(u)_3\\ \mathrm{Al}(u+2K+2iK')_3 &= e^{-2iJ'(u+2K+iK')}\,\mathrm{Al}(u+2K)_3\\ &= e^{-2iJ'(u+2K+iK')-2J(u+K)}\,\mathrm{Al}(u)_3\end{aligned}$$

Folglich mufs

$$\begin{aligned}e^{-4JK'i} &= e^{-4KJ'i}\\ e^{4(KJ'-JK')i} &= 1,\end{aligned}$$

d. h. es mufs

$$KJ'-JK' = \mu\frac{\pi}{2}$$

sein, wo μ eine ganze Zahl bedeutet. Nun aber erhält man, wenn man die Gröfsen J, J' in ähnlicher Weise wie K, K' in Reihen entwickelt

$$(21.)\quad \begin{cases} J = \frac{\pi}{2}\mathfrak{J}\\ J' = \mathfrak{J}\log\frac{4}{k}+1-(\mathfrak{J}-\mathfrak{J}_1)-\frac{2}{3.4}(\mathfrak{J}-\mathfrak{J}_2)-\frac{2}{5.6}(\mathfrak{J}-\mathfrak{J}_3)-\cdots.\end{cases}$$

wo

$$\mathfrak{J} = \tfrac{1}{2}k^2+\tfrac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2k^4+\tfrac{5}{6}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2k^6+\tfrac{7}{8}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2k^8+\cdots$$

$$\mathfrak{J}_1 = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}k^2,\qquad \mathfrak{J}_2 = \tfrac{1}{2}k^2+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2k^4 \text{ etc.}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}_n = \tfrac{1}{2}k^2+\tfrac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2k^4+\cdots+\frac{2n-3}{2n-2}\left(\frac{1.3\ldots 2n-5}{2.4\ldots 2n-4}\right)^2k^{2n-2}\\ +\tfrac{1}{2}\frac{2n-1}{2n}\left(\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}\right)^2k^{2n}\end{aligned}$$

ist; und man hat daher

$$\left.\begin{aligned}K' &= \frac{2K}{\pi}\log\left(\frac{4}{k}\right)+\\ J' &= 1+\frac{2J}{\pi}\log\left(\frac{4}{k}\right)+\end{aligned}\right\}\text{Glieder, welche für } k=0 \text{ verschwinden.}$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die vorstehende Gleichung, so findet sich,

dafs $\mu = 1$ ist. Mithin hat man

$$(22.)\qquad KJ' - JK' = \frac{\pi}{2},$$

aus welcher Gleichung sich, wenn man

$$\omega = \mathfrak{m}K + \mathfrak{n}iK' \qquad \eta = \mathfrak{m}J + \mathfrak{n}iJ'$$
$$\omega' = \mathfrak{m}'K + \mathfrak{n}'iK' \qquad \eta' = \mathfrak{m}'J + \mathfrak{n}'iJ'$$

setzt, und nun unter $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}'$ ganz willkührliche Gröfsen versteht, die allgemeinere

$$(23.)\qquad \omega\eta' - \eta\omega' = (\mathfrak{m}\mathfrak{n}' - \mathfrak{n}\mathfrak{m}')\frac{\pi}{2}i$$

ergiebt.

§. 12.

Fortsetzung.

Man bezeichne jetzt mit $F(u)$ irgend eine der Functionen $\mathrm{Al}(u)$, $\mathrm{Al}(u)_1$, $\mathrm{Al}(u)_2$, $\mathrm{Al}(u)_3$, so hat man nach dem Vorhergehenden, wenn $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ zwei beliebige ganze Zahlen bedeuten, und

$$\mathfrak{m}K + \mathfrak{n}iK' = \omega \qquad \mathfrak{m}J + \mathfrak{n}iJ' = \eta$$

gesetzt wird,

$$F(u+2\omega) = e^{-2\eta(u+\omega)+m\pi i}F(u),$$

wo m für jede Function durch die Formeln (20.) bestimmt ist. Diese Gleichung läfst sich folgendermafsen darstellen:

$$e^{\frac{\eta}{2\omega}(u+2\omega)^2 - \frac{m\pi i}{2\omega}(u+2\omega)}F(u+2\omega) = e^{\frac{\eta u^2}{2\omega} - \frac{m\pi i}{2\omega}u}F(u),$$

und zeigt dann, dafs

$$e^{\frac{\eta u^2}{2\omega} - \frac{m\pi i}{2\omega}u}F(u)$$

eine *periodische* Function von u ist. Nun gilt aber folgender allgemeiner Satz:

Eine eindeutige periodische Function einer unbeschränkt veränderlichen Gröfse u läfst sich, mag nun die Periode, die durch a bezeichnet werde, reell oder imaginär sein, wenn sie zugleich den Charakter einer ganzen rationalen Function — in dem oben erklärten Sinne des Worts — besitzt, stets, und zwar nur auf eine einzige Weise, durch eine für jeden Werth von u convergirende Reihe von der Form

$$\sum_\nu \left\{ A_\nu e^{\frac{2\nu\pi}{a}ui} \right\}$$

darstellen, wo der Zeiger ν, auf den sich das Summenzeichen bezieht, die Reihe der ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ zu durchlaufen hat, und die Coefficienten A_ν von u unabhängig sind.

Zum Beweise werde die Function, in welche die in Rede stehende durch die Substitution

$$u = \frac{a}{2\pi} v$$

übergeht, mit $f(v)$ bezeichnet, so hat man

$$f(v+2\pi) = f(v)$$

Setzt man nun

$$v = t + si,$$

und versteht unter t, s reelle Gröfsen, so hat man nach dem *Fourier*'schen Satze, indem $f(t+si)$ eine continuirliche Function von t, s ist, welche in Beziehung auf t die Periode 2π besitzt,

$$2\pi i . f(t+si) = \Sigma B_\nu e^{\nu t i},$$

wo

$$iB_\nu = \int_0^{2\pi} f(t+si) e^{-\nu t i} dt$$

ist. Zugleich weifs man, dafs sich $f(t+si)$ auf keine andere Weise in dieser Form darstellen läfst. Nun ist aber nicht nur $f(t+si)$ eine continuirliche Function von t, s, sondern auch, nach dem, was hinsichtlich des analytischen Charakters von $f(v)$ angenommen worden ist,

$$\frac{\partial f(t+si)}{\partial t} \text{ und } \frac{\partial f(t+si)}{\partial s} = i \frac{\partial f(t+si)}{\partial t}$$

Mithin müssen auch B_ν und $\frac{\partial B_\nu}{\partial s}$ continuirliche Functionen von s sein, und man hat daher

$$\frac{\partial . B_\nu e^{\nu s}}{\partial s} = \frac{\partial \int_0^{2\pi} f(t+si) e^{-\nu(t+si)i} dt}{\partial s}$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f(t+si)}{\partial s} + \nu f(t+si) \right) e^{-\nu(t+si)i} dt$$

Aber

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial f(t+si)}{\partial s} e^{-\nu(t+si)i} dt = i \int_0^{2\pi} \frac{\partial f(t+si)}{\partial t} e^{-\nu(t+si)i} dt$$
$$= -\nu \int_0^{2\pi} f(t+si) e^{-\nu(t+si)i} dt,$$

indem $f(t+si)e^{-\nu(t+si)i}$ für $t=0$ und $t=2\pi$ denselben Werth hat. Daher ist

$$\frac{\partial . B_\nu e^{\nu s}}{\partial s} = 0,$$

d. h. der Werth von $B_\nu e^{\nu s}$ ist unabhängig von s, und bleibt, weil B_ν eine continuirliche Function dieser Gröfse ist, für jeden Werth von s derselbe. Bezeichnet man ihn durch $2\pi i A_\nu$, wo man dann, indem $s=0$ genommen wird,

$$2\pi i A_\nu = \int_0^{2\pi} f(t) e^{-\nu t i} dt$$

erhält, so ist

$$B_\nu = 2\pi i A_\nu e^{-\nu s},$$

und es ergiebt sich

$$f(t+si) = \sum_\nu A_\nu e^{\nu(t+si)i}$$

für alle Werthe von t, s, oder

$$f(v) = \sum_\nu A_\nu e^{\nu v i}$$

für jeden complexen Werth von v, woraus, wenn man $\frac{2\pi u}{a}$ für v setzt, die angegebene Reihe für die ursprüngliche Function sich unmittelbar ergiebt *).

Uebrigens ist leicht zu zeigen, dafs sich eine Reihe von der betrachteten Form, wenn sie für *jeden* Werth von u convergirt, immer in eine andere von der Gestalt

$$\sum_{\nu=0\ldots\infty} \{ A'_\nu u^\nu \},$$

die ebenfalls beständig convergent ist, unmwandeln läfst; woraus erhellt, dafs der bewiesene Satz eben nur dann gilt, wenn die Function, um die es sich handelt, den Charakter einer ganzen rationalen hat.

---

*) Setzt man $e^{\frac{2\pi u i}{a}} = x$, so gehören zu jedem Werthe von x zwar unendlich viele von u, für die aber, da sie sich nur um ein Vielfaches von a unterscheiden, die betrachtete Function denselben Werth hat. Man kann daher die letztere als eine eindeutige Function von x ansehn, die durch $\varphi(x)$ bezeichnet werden möge. Dann ist leicht zu zeigen, dafs nicht nur $\varphi(x)$, sondern auch $\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}$ sich continuirlich mit x ändert, ohne jemals unendlich grofs zu werden, sobald man nur für den absoluten Betrag von x irgend eine, wenn auch noch so kleine Gränze festsetzt, oberhalb welcher er bleiben soll. Dies reicht aber, nach einem von *Cauchy* gegebenen Theorem hin, um nachzuweisen, dafs sich $\varphi(x)$ durch eine für jeden Werth von x, der nicht Null ist, convergirende Reihe

$$\sum_{\nu=-\infty\ldots+\infty} \{ A_\nu x^\nu \}$$

darstellen läfst; woraus der aufgestellte Satz unmittelbar folgt. Ich habe es aber hier vorgezogen, denselben aus dem *Fourier*'schen abzuleiten.

Hiernach läfst sich

$$e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}-\frac{m\pi i}{2\omega}u}F(u)$$

in eine beständig convergirende Reihe

$$\sum_{\nu}\left\{A_\nu e^{\frac{\nu\pi u i}{\omega}}\right\}$$

entwickeln, und es handelt sich jetzt um die Bestimmung der Coefficienten derselben. Dazu gelangt man auf folgende Weise. Man darf unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, dafs m, n keinen gemeinschaftlichen Factor haben. Dann kann man zwei andere ganze Zahlen m', n' dergestalt bestimmen, dafs

$$mn'-nm' = 1$$

ist, und es gelten, wenn man mit ω', η', m' die Gröfsen bezeichnet, in welche ω, η, m übergehn, indem m', n' an die Stelle von m, n treten, für $F(u)$ die beiden Gleichungen

$$(1.)\quad\begin{cases} F(u+2\omega) = e^{-2\eta(u+\omega)+m\pi i}F(u) \\ F(u+2\omega') = e^{-2\eta'(u+\omega')+m'\pi i}F(u), \end{cases}$$

während zugleich die Gröfsen ω, η, ω', η' der Formel (23.) des v. §. gemäfs durch die Relation

$$(2.)\qquad \omega\eta'-\eta\omega' = \frac{\pi}{2}i$$

mit einander verbunden sind. Man kann dabei bemerken, dafs diese Gleichungen bestehen bleiben, wenn

$$\omega',\ -\omega,\quad \eta',\ -\eta,\quad m',\ -m$$
an die Stelle von $\omega,\quad \omega',\quad \eta,\quad \eta',\quad m,\quad m'$

treten, wie man sofort sieht, sobald man nur in der ersten $u-2\omega$ für u setzt, und $e^{-2\eta(u-\omega)+m\pi i}$ auf die andere Seite bringt. Man wird daher aus jeder Gleichung, welche eine Folge der vorstehenden (1, 2) ist, sofort eine neue ableiten können, indem man in ihr die angegebenen Substitutionen macht.

Es werde jetzt

$$(3.)\qquad \frac{\eta' u^2}{2\omega'}-\frac{\eta u^2}{2\omega} = \frac{\pi i u^2}{4\omega\omega'} \text{ mit } \chi(u)$$

bezeichnet, und

$$(4.)\quad e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}+\chi(u-m'\omega)}F(u) = f(u)$$

$$(5.)\quad e^{\frac{\eta' u^2}{2\omega'}-\chi(u+m\omega')}F(u) = f'(u)$$

gesetzt. Dann hat man für beliebige Werthe von p, q

$$(6.)\quad \begin{cases}\chi(u+p\omega)-\chi(u) = \frac{p\pi i}{2\omega'}\left(u+\frac{p\omega}{2}\right)\\ \chi(u+q\omega')-\chi(u) = \frac{q\pi i}{2\omega}\left(u+\frac{q\omega'}{2}\right),\end{cases}$$

woraus weiter

$$(7.)\quad \begin{cases}\chi(u+p\omega+q\omega')-\chi(u+q\omega') = \chi(u+p\omega)-\chi(u)+\frac{pq}{2}\pi i, \text{ oder}\\ \chi(u+p\omega+q\omega')-\chi(u+p\omega) = \chi(u+q\omega')-\chi(u)+\frac{pq}{2}\pi i\end{cases}$$

folgt.

Die Gleichung (4.) läfst sich nun auch so schreiben:

$$f(u) = e^{\frac{\eta' u^2}{2\omega'}+\chi(u-m'\omega)-\chi(u)}F(u),$$

und man hat daher, indem

$$\frac{\eta'(u+2\omega')^2}{2\omega'} = \frac{\eta' u^2}{2\omega'}+2\eta'(u+\omega'),$$

und nach (7.), wenn $p=-m'$, $q=2$ genommen wird

$$\chi(u-m'\omega+2\omega')-\chi(u+2\omega') = \chi(u-m'\omega)-\chi(u)-m'\pi i$$

ist, in Folge von (1.)

$$(8.)\quad f(u+2\omega') = f(u)$$

Ebenso, oder wenn man die vorhin angegebenen Substitutionen macht, wodurch sich $\chi(u)$ in $-\chi(u)$, $f(u)$ in $f'(u)$ und $f'(u)$ in $f(u)$ verwandelt, erhält man

$$(9.)\quad f'(u-2\omega)=f'(u), \quad \text{oder auch} \quad f'(u+2\omega)=f'(u)$$

Ferner folgt aus (4.), wenn man bemerkt, dafs nach (7.)

$$\chi(u-m'\omega+m\omega') = \chi(u+m\omega')+\chi(u-m\omega')-\chi(u)-\frac{mm'}{2}\pi i$$

ist, und

$$(10.)\quad m\omega'-m'\omega = \dot{\omega}$$

setzt,

$$(11.)\quad \begin{cases} f(u) = e^{\frac{mm'}{2}\pi i + \chi(u+\dot{\omega})} f'(u) \\ f'(u) = e^{-\frac{mm'}{2}\pi i - \chi(u+\dot{\omega})} f(u) \end{cases}$$

Der Gleichung (9.) gemäfs kann man nun $f'(u)$ durch eine Reihe

$$\sum_{\nu}\left\{A_\nu e^{\frac{\nu\pi}{\omega}ui}\right\}$$

darstellen. Man hat aber nach (6.)

$$(12.)\quad \chi(u+\dot{\omega}+2\nu\omega')-\chi(u+\dot{\omega}) = \frac{\nu\pi i}{\omega}(u+\dot{\omega}+\nu\omega')$$

Folglich, wenn man

$$A_\nu = C_\nu e^{\frac{\nu\pi i}{\omega}(\dot{\omega}+\nu\omega')}$$

setzt,

$$(13.)\quad f'(u) = \sum_{\nu}\left\{C_\nu e^{\chi(u+\dot{\omega}+2\nu\omega')-\chi(u+\dot{\omega})}\right\},$$

und daher (nach 11.)

$$(14.)\quad f(u) = e^{\frac{mm'}{2}\pi i}\sum\left\{C_\nu e^{\chi(u+\dot{\omega}+2\nu\omega')}\right\}$$

In dieser Gleichung werde jetzt $u+2\omega'$ für u gesetzt, und zugleich $\nu-1$ für ν, was erlaubt ist, weil $\nu-1$ so gut als ν jede ganze Zahl repräsentirt, so kommt mit Berücksichtigung von (8.)

$$f(u) = e^{\frac{mm'}{2}\pi i}\sum_{\nu}\left\{C_{\nu-1} e^{\chi(u+\dot{\omega}+2\nu\omega')}\right\}$$

In dieser Reihe mufs aber jeder Coefficient mit dem gleichstelligen der vorhergehenden übereinstimmen, weil sich, wenn dies nicht der Fall wäre, aus ihr durch Multiplication mit $e^{-\chi(u+\dot{\omega})}$ für $f'(u)$ eine zweite Reihe von der Form

$$\sum_{\nu}\left\{A'_\nu e^{\frac{\nu\pi u i}{\omega}}\right\}$$

ergeben würde, welche es nicht giebt. Daher mufs $C_\nu = C_{\nu-1}$ sein, woraus folgt, dafs sämmtliche Coefficienten C_ν denselben Werth haben, der durch

$$g e^{-\frac{mm'}{2}\pi i}$$

bezeichnet werden möge. Somit erhält man, wenn zugleich statt $f(u)$ wieder $F(u)$ eingeführt wird.

$$(15.)\quad e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}+\chi(u-m'\omega)}F(u) = g.\sum_\nu\left\{e^{\chi(u+\dot{\omega}+2\nu\omega')}\right\},$$

oder, da

$$(16.)\quad \chi(u+\dot{\omega}+\nu\omega')-\chi(u-m'\omega) = \frac{2\nu+m}{2}.\frac{\pi i}{\omega}\left(u-m'\omega+\frac{2\nu+m}{2}\omega'\right)$$

ist,

$$(17.)\quad e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}F(u) = g.\sum_\nu\left\{e^{\frac{2\nu+m}{2}.\frac{\pi i}{\omega}\left(u-m'\omega+\frac{2\nu+m}{2}\omega'\right)}\right\}$$

Da m eine ganze Zahl ist, so darf man in dieser Reihe $(-\nu-m)$ statt ν setzen; verbindet man dann die so sich ergebende Gleichung mit der vorstehenden, so kommt

$$(18.)\quad e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}F(u) = g.\sum_\nu\left\{e^{-\left(\nu+\frac{m}{2}\right)^2\frac{\omega'\pi}{\omega i}}\cos(2\nu+m)\left(\frac{u}{2\omega}-\frac{m'}{2}\right)\pi\right\}$$

Aus diesen Gleichungen (15, 16, 17) erhält man nun sofort drei neue, indem man die oben angegebene Substitution ω' für ω u. s. w. macht, wobei zugleich $(-\nu)$ für ν geschrieben, und der Werth, den die Constante g alsdann annehmen mufs, mit g' bezeichnet werde.

$$(19.)\quad e^{\frac{\eta' u^2}{2\omega'}-\chi(u+m\omega')}F(u) = g'.\sum_\nu\left\{e^{-\chi(u+\dot{\omega}+2\nu\omega)}\right\}$$

$$(20.)\quad e^{\frac{\eta' u^2}{2\omega'}}F(u) = g'.\sum_\nu\left\{e^{-\frac{2\nu-m'}{2}.\frac{\pi i}{\omega'}\left(u+m\omega'+\frac{2\nu-m'}{2}\omega\right)}\right\}$$

$$(21.)\quad e^{\frac{\eta' u^2}{2\omega'}}F(u) = g'.\sum_\nu\left\{e^{-\left(\nu-\frac{m'}{2}\right)^2\frac{\omega i\pi}{\omega'}}\cos(2\nu-m')\left(\frac{u}{2\omega'}+\frac{m}{2}\right)\pi\right\}$$

Man sieht also, dafs die Function $F(u)$, bei dem vorausgesetzten analytischen Charakter derselben, durch die Gleichungen (1, 2) völlig bestimmt ist, bis auf eine Constante (g oder g'), welche ebenfalls vermittelst der vorstehenden Formeln gefunden wird, sobald man für irgend einen besondern Werth von u den von $F(u)$ kennt, vorausgesetzt, dafs der letztere nicht Null ist. Man kann dabei bemerken, dafs die Gleichungen (15, 17, 19, 20) auch dann noch eine strenge Folgerung aus den eben genannten bleiben, wenn auch unter m, m' nicht mehr ganze Zahlen verstanden werden.

Da die erhaltenen Reihen für jeden Werth von u convergiren, so kann man schliefsen, dafs $\frac{\omega'}{\omega i}$, wie auch der Modul k beschaffen sein möge, entweder eine reelle positive Gröfse sein mufs, oder eine imaginäre, deren reeller Theil positiv ist. Umgekehrt sind die Reihen stäts wirklich convergent, sobald man für ω, ω' beliebige Gröfsen annimmt, welche diese Bedingung erfüllen, abgesehen davon, ob sie in der oben angegebenen Form durch K und K' ausgedrückt werden können oder nicht. Stellt man sich nun vor, man bestimme, indem man mit h irgend eine (complexe) Gröfse, deren reeller Theil positiv ist, bezeichnet, bei willkührlicher Annahme von ω, η (wobei jedoch für ω der Werth Null auszuschliefsen ist) ω', η' durch die Gleichungen

$$(22.)\qquad \frac{\omega'}{\omega i} = h,\quad \frac{\eta'}{\omega'} - \frac{\eta}{\omega} = \frac{\pi i}{2\omega\omega'},\quad \eta' = h\eta + \frac{\pi i}{2\omega},$$

und definire dann, m, m', g ebenfalls beliebig annehmend (also auch die Voraussetzung, dafs m, m' ganze Zahlen seien, fallen lassend) eine Function $F(u)$ durch die Gleichung (15.) oder (17.); so besitzt dieselbe den Charakter einer ganzen rationalen Function, und es läfst sich zeigen, dafs sie stäts auch die Gleichungen (1.) befriedigt, und dafs daher für sie auch die Gleichungen (19, 20.) gelten.

Denn die Gleichung (17.) — und es ist ganz einerlei, ob man von dieser oder von Nr. (15.) ausgeht, indem jede von ihnen eine unmittelbare Folge der andern ist — zeigt, dafs man

$$e^{\frac{\eta(u+2\omega)^2}{2\omega}} F(u+2\omega) = e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}+m\pi i} F(u)$$

hat, was die erste der genannten Gleichungen ist, indem jedes Glied der Reihe auf der Rechten, wenn man $u+2\omega$ für u setzt, dieselbe Veränderung erfährt, als wenn es mit $e^{(2\nu+m)\pi i} = e^{m\pi i}$ multiplicirt wird. In der Reihe auf der Rechten der Gleichung (15.) aber darf man $\nu-1$ für ν setzen, und wenn man dann $u+2\omega'$ an die Stelle von u treten läfst, so sieht man, dafs

$$e^{\frac{\eta(u+2\omega')^2}{2\omega}+\chi(u-m'\omega+2\omega')} F(u+2\omega') = e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}+\chi(u-m'\omega)} F(u)$$

ist, woraus, da man

$$\chi(u-m'\omega+2\omega') - \chi(u-m'\omega) = \chi(u+2\omega') - \chi(u) - m'\pi i$$

$$\frac{\eta u^2}{2\omega} + \chi(u) = \frac{\eta' u^2}{2\omega'},\qquad \frac{\eta(u+2\omega')^2}{2\omega} + \chi(u+2\omega') = \frac{\eta'(u+2\omega')^2}{2\omega'}$$

hat,

$$e^{\frac{\eta'(u+2\omega')^2}{2\omega'}} F(u+2\omega') = e^{\frac{\eta' u^2}{2\omega'}+m'\pi i} F(u)$$

folgt, was die zweite der Gleichungen (1) ist. Von denselben sind aber die unter (18—21) angegebenen eine Folge.

Hätte man bei willkührlicher Annahme von ω', η', m, m', g' die Gröfsen η, ω vermittelst der Formeln (22) bestimmt, und dann $F(u)$ durch die Gleichung (19) oder (20) definirt; so würde sich eben so ergeben, dafs für $F(u)$ die Gleichungen (1) gelten, und somit auch (15, 17, 18).

Betrachten wir jetzt insbesondere die Function, welche durch die Gleichung (17) bei der Annahme

$$2\omega = 1,\quad \eta = 0,\quad 2\omega' = hi,\quad \eta' = \pi i,\quad m = 0,\quad m' = 0,\quad g = 1$$

definirt wird, welche die einfachste von allen ist, und nach dem Vorschlage *Lejeune Dirichlet's*, weil sie von *Jacobi* in die Analysis eingeführt worden ist, die *Jacobi'sche Function* genannt, und dieser Benennung entsprechend durch

$$Jc(u, h)$$

bezeichnet werden möge; wo man dann

$$(23.)\qquad Jc(u,h) = \sum_\nu \left\{ e^{(-\nu^2 h + 2\nu u i)\pi} \right\} = \sum_\nu \left\{ e^{-\nu^2 h\pi} \cos 2\nu u\pi \right\}$$

hat, und wenn die Gröfse h, die, wie bemerkt, stäts eine positive reelle, oder eine imaginäre, deren reeller Theil positiv ist, sein mufs, im Verlaufe einer Untersuchung denselben Werth beibehält, kürzer auch blofs $Jc(u)$ schreiben kann. Die Gleichungen (1) gestalten sich dann folgendermafsen

$$(24.)\qquad \begin{cases} Jc(u+1, h) = Jc(u, h) \\ Jc(u+hi, h) = e^{-(2u+hi)\pi i} Jc(u, h) \end{cases}$$

Ferner ist jetzt nach (19), indem $\chi(u) = \frac{\pi}{h} u^2$, $\frac{\eta'}{2\omega'} = \frac{\pi}{h}$,

$$Jc(u, h) = g' . \sum_\nu \left\{ e^{-\frac{\pi}{h}(u+\nu)^2} \right\},$$

wo die Constante g', nach *Jacobi*, auf folgende Weise ermittelt wird. Es ist, wenn man sich jetzt unter u eine reelle Gröfse denkt,

$$\int_0^1 Jc(u,h)\,du = \sum_\nu \int_0^1 e^{-\nu^2 h\pi} \cos 2\nu u\pi . du = 1$$

Daher mufs

$$\frac{1}{g'} = \int_0^1 \sum_\nu \left\{ e^{-\frac{\pi}{h}(u+\nu)^2} \right\} du = \sum_\nu \int_0^1 e^{-\frac{\pi}{h}(u+\nu)^2} du$$

$$= \sum_\nu \int_\nu^{\nu+1} e^{-\frac{\pi}{h}u^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{h}u^2} du$$

sein. Aber

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{h}u^2} du = \sqrt{h},$$

wo, wenn h reell ist, der positive Werth der Wurzel, und, wenn h imaginär, derjenige, dessen reeller Theil positiv ist, genommen werden mufs. Folglich hat man

$$(25.)\qquad \sqrt{h}\,.\,Jc(u,h) = \sum_\nu \left\{ e^{-\frac{\pi}{h}(u+\nu)^2} \right\}$$

Nach der Formel (15.) aber ist

$$(26.)\qquad e^{\frac{\pi}{h}u^2} Jc(u,h) = \sum_\nu \left\{ e^{\frac{\pi}{h}(u+\nu hi)^2} \right\} = \sum_\nu \left\{ e^{-h\pi\left(\frac{u}{hi}+\nu\right)^2} \right\}$$

Aber

$$\sum_\nu \left\{ e^{-h\pi\left(\frac{u}{hi}+\nu\right)^2} \right\} = \frac{1}{\sqrt{h}} Jc\left(\frac{u}{hi}, \frac{1}{h}\right)$$

Daher

$$(27.)\qquad Jc(u,h) = \frac{e^{-\frac{\pi}{h}u^2}}{\sqrt{h}} \cdot Jc\left(\frac{u}{hi}, \frac{1}{h}\right) = \frac{e^{-\frac{\pi}{h}u^2}}{\sqrt{h}} \cdot Jc\left(\frac{ui}{h}, \frac{1}{h}\right)$$

$$(28.)\qquad Jc(ui,h) = \frac{e^{\frac{\pi}{h}u^2}}{\sqrt{h}} \cdot Jc\left(\frac{u}{h}, \frac{1}{h}\right)$$

In der Reihe (23) bleibt ferner das allgemeine Glied ungeändert, wenn man $u+\frac{\tau}{2}$ für u, und zugleich $h+\tau i$ für h setzt, τ aber eine ganze Zahl bedeutet. Denn dadurch wird dasselbe nur mit $e^{-\nu(\nu+1)\tau\pi i} = 1$ multiplicirt. Folglich hat man

$$(29.)\qquad Jc(u,h) = Jc\left(u+\frac{\tau}{2}, h+\tau i\right),$$

und erhält aus (27.)

$$(30.)\qquad Jc(u,h) = \frac{e^{-\frac{\pi}{h}u^2}}{\sqrt{h}}\cdot Jc\left(\frac{u}{hi}+\frac{\tau}{2},\, h_1\right),$$

$$\text{wenn } h_1 = \frac{1}{h}+\tau i \text{ ist.}$$

In den vorstehenden Formeln (23—30) sind die wichtigsten Eigenschaften der *Jacobi*'schen Function ausgesprochen. Durch dieselbe lassen sich nun die obigen Reihen (15, 17, 19, 20) leicht ausdrücken. Man hat nämlich

$$\chi(u+\mathring{\omega}+2\nu\omega') = -\frac{\omega'\pi}{\omega i}\left(\frac{u+\mathring{\omega}}{2\omega'}+\nu\right)^2$$

$$-\chi(u+\mathring{\omega}+2\nu\omega) = -\frac{\omega i\pi}{\omega'}\left(\frac{u+\mathring{\omega}}{2\omega}+\nu\right)^2,$$

und daher

$$(31.)\qquad \sum_\nu\left\{e^{-\chi(u+\mathring{\omega}+2\nu\omega)}\right\} = \sqrt{\frac{\omega'}{\omega i}}\cdot Jc\left(\frac{u+\mathring{\omega}}{2\omega},\,\frac{\omega'}{\omega i}\right)$$

$$(32.)\qquad \sum_\nu\left\{e^{\chi(u+\mathring{\omega}+2\nu\omega')}\right\} = \sqrt{\frac{\omega i}{\omega'}}\cdot Jc\left(\frac{u+\mathring{\omega}}{2\omega'},\,\frac{\omega i}{\omega'}\right)$$

Nach (27) aber ist

$$(33.)\qquad \sqrt{\frac{\omega'}{\omega i}}\cdot Jc\left(\frac{u}{2\omega},\,\frac{\omega'}{\omega i}\right) = e^{-\chi(u)}Jc\left(\frac{u}{2\omega'},\,\frac{\omega i}{\omega'}\right),$$

und daher

$$(34.)\quad \sum_\nu\left\{e^{\frac{2\nu+m}{2}\cdot\frac{\pi i}{\omega}\left(u-m'\omega+\frac{2\nu+m}{2}\omega'\right)}\right\} = e^{\chi(u+\mathring{\omega})-\chi(u-m'\omega)}\,Jc\left(\frac{u+\mathring{\omega}}{2\omega},\,\frac{\omega'}{\omega i}\right)$$

$$(35.)\quad \sum_\nu\left\{e^{-\frac{2\nu-m'}{2}\cdot\frac{\pi i}{\omega'}\left(u+m\omega'+\frac{2\nu-m'}{2}\omega\right)}\right\} = e^{\chi(u+m\omega')-\chi(u+\mathring{\omega})}\,Jc\left(\frac{u+\mathring{\omega}}{2\omega'},\,\frac{\omega i}{\omega'}\right)$$

Hiernach geben die Gleichungen (15, 17, 19, 20)

$$(36.)\qquad e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}F(u) = g e^{\chi(u+\mathring{\omega})-\chi(u-m'\omega)}\,Jc\left(\frac{u+\mathring{\omega}}{2\omega},\,\frac{\omega'}{\omega i}\right)$$

$$= g\sqrt{\frac{\omega i}{\omega'}}\cdot e^{-\chi(u-m'\omega)}\,Jc\left(\frac{u+\mathring{\omega}}{2\omega'},\,\frac{\omega i}{\omega'}\right)$$

$$(37.)\quad e^{\frac{\eta' u^2}{2\omega'}} F(u) = g' e^{-\chi(u+\overset{\bullet}{\omega})+\chi(u+m\omega')} Jc\left(\frac{u+\overset{\bullet}{\omega}}{2\omega'}, \frac{\omega i}{\omega'}\right)$$

$$= g' \sqrt{\frac{\omega'}{\omega i}} \cdot e^{\chi(u+m\omega')} Jc\left(\frac{u+\overset{\bullet}{\omega}}{2\omega}, \frac{\omega'}{\omega i}\right)$$

Aus der Vergleichung dieser Ausdrücke ergiebt sich noch, indem

$$\chi(u+\overset{\bullet}{\omega}) - \chi(u-m'\omega) - \chi(u+m\omega') = -\chi(u) - \frac{mm'}{2}\pi i$$

ist,

$$(38.)\quad g' = e^{-\frac{mm'}{2}\pi i} \sqrt{\frac{\omega i}{\omega'}} \cdot g$$

Das Ergebnifs der vorstehenden Untersuchung ist also, dafs sich jede Function, welche die im Anfange dieses §. angegebenen Eigenschaften besitzt, welche Werthe auch die Gröfsen ω, ω', η, η', m, m' haben mögen, auf die *Jacobi*'sche zurückführen läfst.

§. 13.

Schlufs der die elliptischen Functionen betreffenden Entwicklungen.

Die specielle Anwendung der entwickelten Formeln auf die Functionen $\mathrm{Al}(u)$ u. s. w. will ich hier nur kurz andeuten. Zuerst bemerke ich, dafs $(\mathfrak{m}+1)\mathfrak{n}+\mathfrak{m}$ und $(\mathfrak{m}'+1)\mathfrak{n}'+\mathfrak{m}'$ aus dem Grunde, weil weder $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ noch $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}'$ einen gemeinschaftlichen Theiler haben, beide ungerade Zahlen sind, und man daher

$$(1.)\quad \begin{cases} \mathfrak{mn}+\mathfrak{n} \equiv \mathfrak{m}+1 & \mathfrak{m'n'}+\mathfrak{n}' \equiv \mathfrak{m}+1 \\ \mathfrak{mn}+\mathfrak{m}+\mathfrak{n} \equiv 1 & \mathfrak{m'n'}+\mathfrak{m}'+\mathfrak{n}' \equiv 1 \\ \mathfrak{mn}+\mathfrak{m} \equiv \mathfrak{n}+1 & \mathfrak{m'n'}+\mathfrak{m}' \equiv \mathfrak{n}'+1 \\ \mathfrak{mn} \equiv \mathfrak{m}+\mathfrak{n}+1 & \mathfrak{mn} \equiv \mathfrak{m}+\mathfrak{n}+1 \end{cases} \quad (\text{mod. } 2)$$

hat. Nimmt man daher

$$(2.)\quad \begin{cases} m \equiv \mathfrak{m}+1 & m' \equiv \mathfrak{m}'+1 & l = 1-m-n \\ n \equiv \mathfrak{n}+1 & n' \equiv \mathfrak{n}'+1 & l' = 1-m'-n', \end{cases}$$

wobei man jeder der Zahlen m, n, m', n' einen der Werthe 0, 1 beilegen kann, und dann auch l sowohl als l' entweder $=0$, oder $=1$ erhält; so geben die Gleichungen (20) d. §. 11.

$$(3.)\begin{cases} \mathrm{Al}(u+2\omega) = e^{-2\eta(u+\omega)+m\pi i}\mathrm{Al}(u) & \mathrm{Al}(u+2\omega') = e^{-2\eta'(u+\omega')+m'\pi i}\mathrm{Al}(u) \\ \mathrm{Al}(u+2\omega)_1 = e^{-2\eta(u+\omega)+\pi i}\mathrm{Al}(u)_1 & \mathrm{Al}(u+2\omega')_1 = e^{-2\eta'(u+\omega')+\pi i}\mathrm{Al}(u)_1 \\ \mathrm{Al}(u+2\omega)_2 = e^{-2\eta(u+\omega)+n\pi i}\mathrm{Al}(u)_2 & \mathrm{Al}(u+2\omega')_2 = e^{-2\eta'(u+\omega')+n'\pi i}\mathrm{Al}(u)_2 \\ \mathrm{Al}(u+2\omega)_3 = e^{-2\eta(u+\omega)+l\pi i}\mathrm{Al}(u)_3 & \mathrm{Al}(u+2\omega')_3 = e^{-2\eta'(u+\omega')+l'\pi i}\mathrm{Al}(u)_3 \end{cases}$$

Es ist leicht nachzuweisen, dafs die Combinationen

$$m,\ m' \qquad n,\ n' \qquad l,\ l'$$

mit den folgenden

$$0,\ 1 \qquad 1,\ 0 \qquad 0,\ 0$$

übereinstimmen müssen, abgesehen von der Aufeinanderfolge. Hiernach geben die Formeln (15, 17, 18, 19, 20, 21, 36, 37) d. v. §. unmittelbar die Ausdrücke von $\mathrm{Al}(u)$, $\mathrm{Al}(u)_1$, $\mathrm{Al}(u)_2$, $\mathrm{Al}(u)_3$, sobald die Constanten g, g' für jede einzelne dieser Functionen bestimmt sind. Dies kann aber unter Andern für die 1ste, 3te und 4te dadurch geschehen, dafs man $u = 0$ setzt, indem die letztern dann den Werth 1 erhalten.

Zur Abkürzung werde

$$(4.)\qquad e^{\chi(u+p\omega'-q\omega)-\chi(u-q\omega)}\,Jc\Big(\frac{u+p\omega'-q\omega}{2\omega},\ \frac{\omega'}{\omega i}\Big) = \Theta(u)_{p,q}$$

$$(5.)\qquad e^{-\chi(u+p\omega'-q\omega)+\chi(u+p\omega')}\,Jc\Big(\frac{u+p\omega'-q\omega}{2\omega'},\ \frac{\omega i}{\omega'}\Big) = \Theta'(u)_{q,p}$$

gesetzt, wo p, q beliebige Zahlen bedeuten, und man in Folge von (33) und (7) d. v. §.

$$(6.)\qquad \Theta(u)_{p,q} = \sqrt{\frac{\omega i}{\omega'}}\cdot e^{-\chi(u)-\frac{pq}{2}\pi i}\,\Theta'(u)_{q,p}$$

hat. Dann erhält man aus den Gleichungen (36, 37) nach dem eben Bemerkten

$$(6.)\qquad e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}\mathrm{Al}(u) = \frac{\Theta(u)_{m,m'}}{\Theta(0)_{m,m'}} \qquad\qquad e^{\frac{\eta' u^2}{2\omega'}}\mathrm{Al}(u) = \frac{\Theta'(u)_{m',m}}{\Theta'(0)_{m',m}}$$

$$(7.)\qquad e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}\mathrm{Al}(u)_2 = \frac{\Theta(u)_{n,n'}}{\Theta(0)_{n,n'}} \qquad\qquad e^{\frac{\eta' u^2}{2\omega'}}\mathrm{Al}(u)_2 = \frac{\Theta'(u)_{n',n}}{\Theta'(0)_{n',n}}$$

$$(8.)\qquad e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}\mathrm{Al}(u)_3 = \frac{\Theta(u)_{l,l'}}{\Theta(0)_{l,l'}} \qquad\qquad e^{\frac{\eta' u^2}{2\omega'}}\mathrm{Al}(u)_3 = \frac{\Theta'(u)_{l',l}}{\Theta'(0)_{l',l}}$$

Ferner hat man

$$e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}\mathrm{Al}(u)_1 = g\Theta(u)_{1,1}$$

und daher

$$\operatorname{sn} u = g\Theta(0)_{m,m'}\cdot\frac{\Theta(u)_{1,1}}{\Theta(u)_{m,m'}}$$

In dieser Gleichung setze man

$$u = (n-1)\omega' - (n'-1)\omega,$$

so erhält man aus (42, 43) nach einigen Reductionen

$$\operatorname{sn}((n-1)\omega' - (n'-1)\omega) = i^{(n-1)(1-m')}\frac{g\Theta(0)_{m,m'}\Theta(0)_{n,n'}}{\Theta(0)_{l,l'}}$$

Aber

$$(n-1)\omega' - (n'-1)\omega = ((n-1)\mathfrak{m}' - (n'-1)\mathfrak{m})K + ((n-1)\mathfrak{n}' - (n'-1)\mathfrak{n})K'i,$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichung $\mathfrak{m}\mathfrak{n}' - \mathfrak{n}\mathfrak{m}' = 1$,

$$(n-1)\omega' - (n'-1)\omega = (2\mathfrak{r}-1)K + 2\mathfrak{r}'K'i,$$

wo

$$(9.)\quad \begin{cases} 2\mathfrak{r} = (\mathfrak{n}'+1-n')\mathfrak{m} - (\mathfrak{n}+1-n)\mathfrak{m}' \\ 2\mathfrak{r}' = (\mathfrak{n}'+1-n')\mathfrak{n} - (\mathfrak{n}+1-n)\mathfrak{n}' \end{cases}$$

ist, und aus (40) sich ergiebt, dafs $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'$ ganze Zahlen sind. Daher hat man

$$\operatorname{sn}((n-1)\omega' - (n'-1)\omega) = \operatorname{sn}(-K + 2\mathfrak{r}K + 2\mathfrak{r}'K'i) = (-1)^{\mathfrak{r}-1}$$

Damit ist der Werth von g bestimmt, und man erhält

$$(10.)\quad \begin{cases} e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}\operatorname{Al}(u)_1 = \dfrac{(-1)^{\mathfrak{r}-1}}{i^{(n-1)(1-m')}}\cdot\dfrac{\Theta(0)_{l,l'}}{\Theta(0)_{m,m'}}\cdot\dfrac{\Theta(u)_{1,1}}{\Theta(0)_{n,n'}} \\[2ex] e^{\frac{\eta' u^2}{2\omega'}}\operatorname{Al}(u)_1 = \dfrac{(-1)^{\mathfrak{r}-1}}{i^{(n-1)(1-m')+1}}\cdot\dfrac{\Theta'(0)_{l',l}}{\Theta'(0)_{m',m}}\cdot\dfrac{\Theta'(u)_{1,1}}{\Theta'(0)_{n',n}} \end{cases}$$

Die zweite dieser Gleichungen ergiebt sich aus der ersten vermittelst der Relation (6), wobei zu bemerken ist, dafs nach dem Obigen $mm' = 0$, $nn' = 0$, $ll' = 0$ ist.

Wenn p, q ganze Zahlen sind, so erhält man nach dem, was im vorhergehenden §. in Betreff der Ableitung der Formeln (18, 21) aus den unter (17, 20) aufgestellten bemerkt ist

$$(11.)\quad \begin{cases} \Theta(u)_{p,q} = \sum\limits_{\nu}\left\{e^{-\left(\nu+\frac{p}{2}\right)^2\frac{\omega' \pi}{\omega i}}\cos(2\nu+p)\left(\frac{u}{2\omega}-\frac{q}{2}\right)\pi\right\} \\[2ex] \Theta'(u)_{q,p} = \sum\limits_{\nu}\left\{e^{-\left(\nu-\frac{q}{2}\right)^2\frac{\omega i \pi}{\omega'}}\cos(2\nu-q)\left(\frac{u}{2\omega'}+\frac{p}{2}\right)\pi\right\} \end{cases}$$

Und hieraus

$$(12.)\quad\begin{cases}\Theta(u)_{0,0} = \sum\limits_{\nu}\left\{e^{-\nu^2\frac{\omega'\pi}{\omega i}}\cos 2\nu\frac{u\pi}{2\omega}\right\}\\ \Theta(u)_{0,1} = \sum\limits_{\nu}\left\{(-1)^\nu e^{-\nu^2\frac{\omega'\pi}{\omega i}}\cos 2\nu\frac{u\pi}{2\omega}\right\}\\ \Theta(u)_{1,0} = \sum\limits_{\nu}\left\{e^{-(\nu+\frac{1}{2})^2\frac{\omega'\pi}{\omega i}}\cos(2\nu+1)\frac{u\pi}{2\omega}\right\}\\ \Theta(u)_{1,1} = \sum\limits_{\nu}\left\{(-1)^\nu e^{-(\nu+\frac{1}{2})^2\frac{\omega'\pi}{\omega i}}\sin(2\nu+1)\frac{u\pi}{2\omega}\right\}\end{cases}$$

$$(13.)\quad\begin{cases}\Theta'(u)_{0,0} = \sum\limits_{\nu}\left\{e^{-\nu^2\frac{\omega i\pi}{\omega'}}\cos 2\nu\frac{u\pi}{\omega'}\right\}\\ \Theta'(u)_{0,1} = \sum\limits_{\nu}\left\{(-1)^\nu e^{-\nu^2\frac{\omega i\pi}{\omega'}}\cos 2\nu\frac{u\pi}{\omega'}\right\}\\ \Theta'(u)_{1,0} = \sum\limits_{\nu}\left\{e^{-(\nu-\frac{1}{2})^2\frac{\omega i\pi}{\omega'}}\cos(2\nu-1)\frac{u\pi}{\omega'}\right\}\\ \Theta'(u)_{1,1} = \sum\limits_{\nu}\left\{(-1)^\nu e^{-(\nu-\frac{1}{2})^2\frac{\omega i\pi}{\omega'}}\sin(2\nu-1)\frac{u\pi}{\omega'}\right\}\end{cases}$$

Nimmt man $\omega = K$, $\omega' = iK'$, so erhält man die von *Jacobi* in den Fundamentis zur Darstellung von $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ gegebenen Reihen.

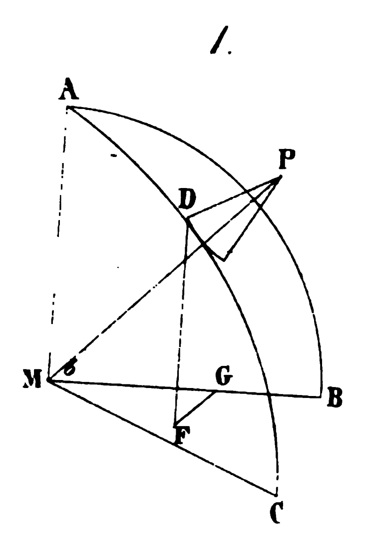
Die in den Formeln (6, 7, 8, 10) vorkommenden Gröfsen $\Theta(0)_{0,0}$ u. s. w. lassen sich bekanntlich durch k, k', K, K' ausdrücken; was aber für beliebige Werthe von m, n, m′, n′ einige Erörterungen nöthig macht, in die ich hier nicht eingehn kann.

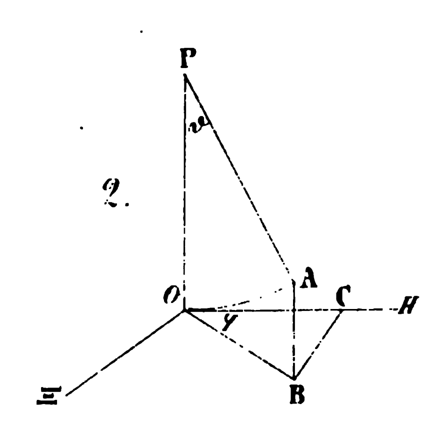
Hiermit breche ich die auf die elliptischen Functionen sich beziehenden Entwicklungen ab, die, obwohl die Resultate bekannt sind, hier einen Platz gefunden haben, weil die dabei befolgte Methode im Wesentlichen dieselbe ist, welche im Folgenden auch bei den *Abel*'schen Functionen zur Anwendung kommen wird.

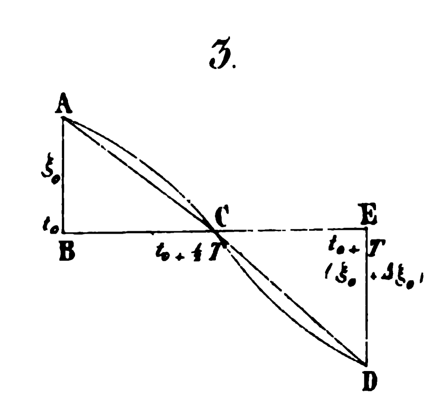
Ehe ich mich nun aber wieder zu diesen wende, darf ich nicht unerwähnt lassen, dafs ursprünglich eine Bemerkung *Abel's* *), in der er auf die in (§. 8—10) hergeleitete Darstellungsform der elliptischen Transcendenten hinweis't, es gewesen ist, die mich zu einer neuen Behandlung dieser Functionen in der vorgetragenen Weise veranlafste, und so auf den Weg führte, der mir auch in die Theorie der hyperelliptischen den Eingang eröffnete.

(Fortsetzung folgt.)

*) S. die Einleitung zu dessen Précis d'une théorie des fonctions elliptiques, Oeuvr. compl. Tom. I, pag. 234, sowie auch Lettre à Mr. Legendre, ib. Tom. II, pag. 259.


1.
A
P
D
M
G
B
F
C


P
2.
A
O
C
H
B
Ξ


3.
A
C
E
B
D



6.

X N O

y' y y"

A M B C Y ω

8.

7.

O X

A

11.

E

B C

Y

A

B

O Y

6.

7.

8.

11.

D
M
Z
y
F_2
F
F_1
E
Q
e



